Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1911.

Von der
Akademie der Wissenschaften, Göttingen
genehmigter Nachdruck
KRAUS REPRINT LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1967

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1911.

Ueber den Bau der Erdkruste in Deutsch-Ostafrika.

Vorläufige Mitteilung.

Von

E. Kohlschütter.

Mit 1 Tafel.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. November 1910 von H. Wagner.

Die Reduktion der Schwerkraftmessungen der ostafrikanischen Pendel-Expedition der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen hat folgende vorläufige Resultate ergeben, die durch die Diskussion der Fehlerquellen und die Berücksichtigung der Reduktionen auf horizontales Gelände im einzelnen zwar noch erheblich abgeändert werden können, das Gesamtresultat aber doch richtig darstellen dürften.

Es bezeichne in der von Helmert angegebenen Weise g die gemessene, g_0 die auf das Meeresniveau wie in freier Luft reduzierte Schwerebeschleunigung, g_0'' ihren nach der Bouguer'schen Formel auf das Meeresniveau reduzierten Wert und γ_0 den aus Albrecht, Formeln und Hilfstafeln (4. Aufl.), entnommenen und der Helmertschen Formel entsprechenden theoretischen Wert. Dann ist in cm/sec²

$$g_0 = g + g \cdot \frac{2H}{R} = g + 0.000\,309\,H \qquad g_0'' = g_0 - g_0 \tfrac{3}{4} \frac{\theta}{\theta_m} \cdot \frac{2H}{R} = g_0 - 0.000\,114\,H$$

Bei den angegebenen Zahlen-Koëffizienten ist $\theta = \frac{1}{2}\theta_m$ angenommen worden, da es sich zunächst nur um eine Überschlagsrechnung handelt, und die Dichte der Gneiße und Schiefer, die in der Hauptsache die Massive von Ostafrika bilden, diesem Werte nahe kommen dürften.

Tabelle 1. Störungswerte und Kompensationen der einzelnen Schwerestationen.

1	2	3	4	5	6	7	8
Station	Höhe über dem Meeres-niveau H m	Totale Störung $g_0 - \gamma_0$ 0.001 cm/sec²	Kompensierender Schwere-Überschuß (+) oder Schwere-Defekt (—) unterhalb des Meeresniveaus $g_0'' - \gamma_0$ 0.001 cm/sec²	Störungsreste n. Anbr. d. Steilrand-Korrektion bei isostatischer Massenlagerung $g_0^{is} - \gamma_0$ 0.001 cm/sec²	Abstand vom Konti-nental-rand a km	Helmert's Steilrand-Korrektion für Kontinental-abfall $\delta\gamma$ 0.001 cm/sec²	Störungsreste bei Pratts Hypothese mit $T = 120$ km $g_0^{is} - (\gamma_0 + \delta\gamma)$ 0.001 cm/sec²
			Küstenferne Stationen auf höheren Plateaus				
Ssuráe	2195	+ 94	— 159	+ 41	480	+ 9	+ 32
Umburru	1823	+ 61	— 149	+ 8	430	+ 10	— 2
Isimia	1733	+ 74	— 125	+ 19	880	+ 5	+ 14
Donjo Ndorobbo	1715	+ 32	— 166	+ 9	510	+ 9	0
Masaúrua	1701	+ 90	— 107	+ 60	540	+ 8	+ 52
Matabatú	1688	+ 58	— 136	+ 23	390	+ 11	+ 12
Kwera-See	1601	+ 84	— 100	+ 37	830	+ 5	+ 32
Mittel	1780	+ 70	— 135	+ 27			
			Küstenferne Stationen auf mittelhohen Plateaus				
Ipuani	1419	+ 20	— 143	+ 9	550	+ 8	+ 1
Kakoma	1270	+ 3	— 143	— 16	990	+ 5	— 21
Ndjilla	1242	+ 8	— 135	— 4	750	+ 6	— 10
Tambarale	1229	— 7	— 148	— 14	620	+ 7	— 21
Taḥora	1214	— 21	— 161	— 21	730	+ 6	— 27
Massonso	1094	+ 37	— 89	+ 37	830	+ 5	+ 32
Ugaga	1075	+ 13	— 111	+ 7	900	+ 5	+ 2
Kondsi	1053	+ 1	— 120	— 7	970	+ 5	— 12
Mittel	1199	+ 7	— 131	— 1			

			Küstenferne Graben-Stationen				
Niarasa	1066	— 36	— 159	+ 15	480	+ 9	+ 6
Wembäre	1062	— 38	— 160	— 17	590	+ 7	— 24
Umbugwe	978	— 23	— 135	+ 11	400	+ 11	0
Kamsamba	864	— 72	— 172	— 22	790	+ 5	— 27
Bangwe	829	— 33	— 128	— 9	1030	+ 4	— 13
Bismarckburg	807	— 78	— 170	— 35	900	+ 5	— 40
Moliro	792	— 57	— 148	— 30	960	+ 5	— 35
Guasso njirŏ	676	— 89	— 167	— 4	440	+ 10	— 14
Alt-Langenburg	477	— 119	— 174	— 2	580	+ 8	— 10
Mittel	839	— 61	— 157	— 10			
			Stationen am Fuß des Kilimandscharo				
Moschi	1141	+ 16	— 115	+ 16	270	+ 15	+ 1
Ssigirari	1139	+ 9	— 122	+ 9	330	+ 13	— 4
			Küstennahe Plateau-Stationen				
Wilhelmstal	1878	+ 101	— 57	+ 23	140	+ 22	+ 1
Donjo Benne	1146	+ 29	— 103	+ 10	270	+ 15	— 5
Kwamkoro	925	+ 92	— 14	+ 42	130	+ 25	+ 17
Maji ja njuu	891	+ 23	— 80	+ 11	210	+ 18	— 7
			Küstennahe Graben-Stationen				
Rufu	656	— 22	— 99	+ 13	240	+ 17	— 4
Kihuiro	504	— 5	— 63	+ 25	180	+ 21	+ 4
			Küsten-Stationen				
Daressalam	7	+ 18	+ 17	+ 18	40	+ 41	— 23
Pangani	7	— 35	— 36	— 26	90	+ 29	— 55
Moçambique	3	+ 75	+ 75	+ 75	9	+ 54	+ 21

Werden die Stationen ihrer morphologischen Lage entsprechend in Gruppen eingeteilt, so finden sich die in Tabelle 1 zusammengestellten Schwerestörungen gegenüber der Helmertschen Formel.

Aus der Tabelle (Spalte 3 und 4) läßt sich folgendes ersehen. Die küstenfernen Plateaustationen haben einen Massenüberschuß, der auf den höheren Plateaus einen merklichen Betrag (+ 0,070) aufweist, während er auf den mittelhohen Plateaus fast verschwindet (0,007). Dagegen stimmen die Werte von $g_0'' - \gamma_0$ für beide Plateauarten im Mittel nahezu überein. Dies deutet darauf hin, daß derjenige Teil der sichtbaren Massen der höheren Plateaus, der über dem Niveau der mittelhohen Plateaus liegt, nicht kompensiert ist, während die mittelhohen Plateaus und die Sockel der höheren Plateaus bis zur Höhe von ungefähr 1140 m vollständig kompensiert sind.

Noch weniger als die höheren Plateaus sind die Gräben kompensiert. Zu dem sichtbaren Massenmangel (im Vergleich zu den einschließenden Plateaus) tritt noch ein kleiner unsichtbarer Massendefekt (— 0,023) hinzu.

Würde man die höheren Plateaus abtragen bis zur mittleren Niveaufläche der mittelhohen Plateaus und die Gräben bis zu dieser Fläche auffüllen, so würden die Abweichungen der Schwerebeschleunigungen vom normalen Werte im Mittel betragen:

an den Stellen der höheren Plateaus	= + 0,004	cm/sec²
„ „ „ „ mittelhohen „	= + 0,007	„
„ „ „ „ Gräben	= — 0,020	„

Es würde durch diesen Massentransport also nahezu Gleichmäßigkeit erreicht werden. Die fortgenommenen (höhere Plateaus) und hinzugefügten Massen (Gräben) sind daher unterirdisch nicht kompensiert, und es ist nur eine allgemeine Kontinental-Kompensation vorhanden, die so bemessen ist, daß sie gerade mittelhohe Plateaus von etwa 1140 m Höhe kompensiert. Bei den ausgedehnten, in größerer Höhe liegenden Hochebenen und Horsten, sowie den tiefer hinabsteigenden großen Grabeneinbrüchen und Bruchspalten ist somit Isostasie nicht vorhanden. Daher herrscht an den Bruchspalten nicht hydrostatisches sondern nur elastisches Gleichgewicht, wodurch die vielen Erdbeben, die sowohl von mir als anderen in Ostafrika beobachtet worden sind, ihre Erklärung finden dürften. Nur ist auffallend, daß noch nie größere Beben aus diesen Zentren gekommen sind, sondern nur schwache, rein lokalen Charakter tragende.

Tabelle 2. Störungswerte und Kompensationen der küstennahen Stationen unter Berücksichtigung der Steilrand-Störungen des Kontinental-Abfalls.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Station	Abstand vom Konti-nental-Rand a km	Morphologische Lage der Station	Höhe über dem Meere H m	Totale Störung $g_0-(\gamma_0+\delta\gamma)$ 0.001 cm/sec²	Kompensierender Schwere-Ueberschuß (+) oder Defekt (—) unterhalb des Meeresniveaus $g_0''-(\gamma_0+\delta\gamma)$ 0.001 cm/sec² beobachtet	ausgeglichen	Beob. minus Ausgl. 0.001 cm/sec²	Störungsreste bei Pratts Hypothese mit $T = 120$ km $g_0''-(\gamma_0+\delta\gamma)$ 0.001 cm/sec²
Ssigirari	330	Fuß des Kili-	1139	— 4	— 135	— 144	+ 9	— 4
Moschi	270	mandscharo	1141	+ 1	— 130	— 120	— 10	+ 1
Donjo Benne	270	Plateau	1146	+ 14	— 118	— 120	+ 2	— 5
Rufu	240	Graben	656	— 39	— 116	— 109	— 7	— 4
Maji ja njuu	210	Plateau	891	+ 5	— 98	— 97	— 1	— 7
Kihuiro	180	Graben	504	— 26	— 84	— 85	+ 1	+ 4
Wilhelmstal	140	Plateau	1378	+ 79	— 79	— 70	— 9	+ 1
Kwamkoro	130	Plateau	925	+ 67	— 39	— 66	+ 27	+ 17
Pangani	90	Graben	7	— 64	— 65	— 51	— 14	— 55
Daressalam	40	Küstenrand	7	— 23	— 24	— 31	+ 7	— 23
Moçambique	9		3	+ 21	+ 21	— 19	+ 40	+ 21

Ob diese Isostasie im großen vollständig ist, d. h. ob eine genaue Kompensation der sichtbaren überschüssigen Massen der höheren Plateaus durch die sichtbaren und die unterirdischen Defekte der Gräben herbeigeführt wird, kann erst eine spätere eingehende Berechnung der in Betracht kommenden Massen lehren. Schätzungsweise möchte ich annehmen, daß die Massen der Plateaus etwas überwiegen, sodaß die Kontinental-Kompensation in Deutsch-Ostafrika im ganzen keine vollständige ist, sondern das Land eine regionale positive Störung (Massenüberschuß) geringen Betrages aufweist.

Bei den küstennahen Stationen ist vor der weiteren Untersuchung noch eine Reduktion wegen des Einflusses des Kontinentalabfalls zur Tiefsee erforderlich. Nach Helmert ist dieser Einfluß so allgemein und regelmäßig verbreitet, daß der theoretische Wert γ_0 für küstennahe Stationen nicht gilt, sondern daß statt dessen ein Wert $\gamma_0 + \delta\gamma$ zu setzen ist, wo $\delta\gamma$ mit dem Küstenabstand der Station (a) variiert. Die Reduktionswerte $\delta\gamma$ sind aus der Helmertschen Tabelle[1]) für eine Tiefe der Ausgleichsfläche = 120 km entnommen worden. Die hier $\delta\gamma$ genannte Größe heißt bei Helmert δg, da er sie als Störung des Gleichgewichts behandelt, während sie bei der vorliegenden speziellen Untersuchung, die sich auf Störungen höherer Ordnung bezieht, als ein Teil des normalen Wertes der Schwerebeschleunigung aufgefaßt werden und daher mit dem Symbol $\delta\gamma$ bezeichnet werden muß.

Die auf diese Weise ermittelten Störungs- und Kompensationswerte sind in Tabelle 2, geordnet nach ihrem Abstand vom Kontinentalrand, zusmmengestellt.

Die Störungen $g_0 - (\gamma_0 + \delta\gamma)$ haben, wie bei den küstenfernen Stationen einen unregelmäßigen Verlauf, dagegen zeigen die Kompensationen auch hier ein ganz regelmäßiges Verhalten. Von dem für das Innere des Kontinents gültigen mittleren Kompensationswerte (−0,133) ausgehend nimmt die Kompensation nach der Küste hin allmählich ab. Diese Abnahme hat einen sehr regelmäßigen, fast linearen Verlauf, der sich durch die folgende Ausgleichsformel darstellen läßt.

$$g_0'' - (\gamma_0 + \delta\gamma) = -0{,}0158 - 0{,}000\,386\,a.$$

---

1) F. R. Helmert: Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der Prattschen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten. Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, Bd. 48, S. 1197 u. 1198. Berlin 1909.

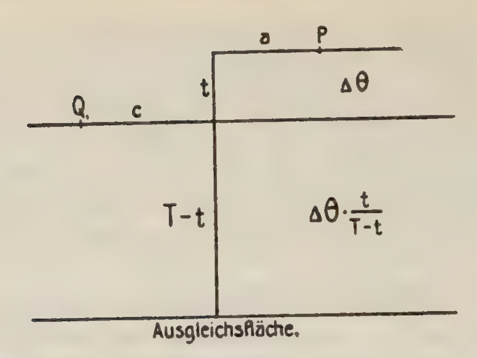
Die nach dieser Formel ausgeglichenen Werte stehen in Spalte 7 der Tabelle 2. Die Kleinheit der Werte „Beob.—Ausgl." (Spalte 8) zeigt, wie regelmäßig die Abnahme der Kontinental-Kompensation nach der Küste zu erfolgt, obwohl die Pendelstationen sowohl der Höhe als der Art ihrer Lage nach große Unterschiede aufweisen. Die Differenzen der sichtbaren Massen sind daher auch bei den küstennahen Stationen unterirdisch nicht kompensiert.

Das in den vorstehenden Erörterungen gegebene Bild ändert sich jedoch fast völlig, wenn man von vornherein die Pratt'sche Hypothese als richtig und demgemäß die Massenlagerung als isostatisch voraussetzt. In diesem Falle ist es erforderlich auch bei den ostafrikanischen Graben- und Bruchrändern, trotzdem es sich hier nur um Störungen zweiter Ordnung handelt, auf die Steilrand-Korrektion Rücksicht zu nehmen, auf die Helmert für Störungen erster Ordnung, d. h. solche zwischen Kontinent und Ozean in der oben angezogenen Schrift neuerdings wieder aufmerksam gemacht hat. Infolge des größeren Dichteunterschieds „Gestein — Luft" und der Nähe der Stationen an den Steilabstürzen erreichen diese Störungen auch in den vorliegenden Fällen teilweis erhebliche Werte, und übertreffen an manchen Stellen sogar noch diejenigen an den Rändern der Kontinente.

Die von Helmert abgeleitete Formel für die Steilrand-Störung gilt nur für Stationen, die im Niveau des Plateaus liegen; für Stationen am Fuß des Absturzes bedarf sie einer Abänderung, da die Abnahme der Schwerkraft mit der Höhe von Massenstörungen besonders stark beeinflußt wird. Der zahlenmäßige Betrag dieser Abänderung ist allerdings nur gering, aber es schien mir doch notwendig dies ausdrücklich festzustellen.

Da es sich zunächst nur um eine Überschlagsrechnung handelt, weil die gemessenen Schwerkraftswerte noch nicht endgültig feststehen, habe ich den Einfluß der Böschung der Steilränder vernachlässigt. Ich konnte dies um so eher tun, als die ostafrikanischen Gräben außerordentlich steil eingeschnitten sind. Es kommen stellenweise Neigungen von 1 : 2,5 und mehr bei Höhenunterschieden von 1 bis 1,5 km vor und der mittlere Böschungswinkel (ν) dürfte wenigstens 12^0 ($\text{ctg}\ \nu = 5$) betragen.

Bezeichnet, wie bei Helmert, t die Höhe des Steilrandes, a den Abstand der oberen Station P, c den der unteren Station Q vom Rande, T die Tiefe der Ausgleichsfläche und $\Delta\theta$ die Dichte des Plateaugesteins minus Dichte der Luft, so ist



die Auflockerung unter dem Plateau bis zur Ausgleichsfläche herab gleich $\varDelta\theta \cdot \frac{t}{T-t}$.

In Q bringt sowohl das Heraustreten der Platte mit der Dichte $\varDelta\theta$, als die Auflockerung darunter eine Verminderung der Schwerebeschleunigung hervor, beide Dichtigkeiten sind daher mit negativem Vorzeichen einzusetzen. Die Integration hat sich in der von Helmert angegebenen Weise

$$\text{für die Dichte } -\varDelta\theta \left\{ \begin{array}{l} \text{in horizontaler Richtung von } c \text{ bis } \infty \\ \text{in vertikaler Richtung von } -t \text{ bis } 0 \end{array} \right.$$

$$\text{für die Dichte} -\varDelta\theta \cdot \frac{t}{T-t} \left\{ \begin{array}{l} \text{in horizontaler Richtung von } c \text{ bis } \infty \\ \text{in vertikaler Richtung von } 0 \text{ bis } (T-t) \end{array} \right.$$

zu erstrecken. Sie liefert unter den von Helmert angeführten Voraussetzungen und Beschränkungen die Formel:

$$\delta g = -\tfrac{3}{2} \frac{\varDelta\theta g}{\pi \theta_m R} \cdot \left\{ t \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{c}{T-t} + \operatorname{arctg} \frac{t}{c} \right] \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{2} c \left[\lg \frac{c^2 + t^2}{c^2} + \frac{t}{T-t} \lg \frac{c^2 + (T-t)^2}{c^2} \right] \right\}.$$

Für den Punkt P dagegen erzeugt die Platte mit der Dichtigkeit $\varDelta\theta$ eine Vermehrung der Anziehung, sodaß in diesem Falle $\varDelta\theta$ positiv zu nehmen ist. Die Grenzen der Integration sind

$$\text{für die Dichte } +\varDelta\theta \left\{ \begin{array}{ll} \text{in horizontaler Richtung} & -a \text{ und } 0 \\ \text{in vertikaler Richtung} & 0 \text{ und } t \end{array} \right.$$

$$\text{für die Dichte } -\varDelta\theta \cdot \frac{t}{T-t} \left\{ \begin{array}{ll} \text{in horizontaler Richtung} & -a \text{ und } 0 \\ \text{in vertikaler Richtung} & t \text{ und } T. \end{array} \right.$$

Die Ausführung der Integration liefert

$$\delta g = + \tfrac{3}{2} \frac{\varDelta\theta g}{\pi\theta_m R} \cdot \left\{ \frac{T \,.\, t}{T-t} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{a}{T} - \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \right] \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2}\, a \left[\lg \frac{a^2+t^2}{a^2} - \frac{t}{T-t} \lg \frac{a^2+T^2}{a^2+t^2} \right] \right\}.$$

Führt man mit Helmert $\varDelta\theta = 2{,}73$ und $\theta_m = 5{,}52$ ein und entwickelt die Formeln unter Vernachlässigung der höheren Glieder, so bekommt man die Ausdrücke

für Plateaustationen:

$$\delta g = +0{,}0362\; t \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{T} + \frac{a}{T} \lg \frac{a}{T} - \tfrac{1}{2} \frac{t}{a} + \frac{\pi}{2} \frac{t}{T} \right)$$

für Grabenstationen:

$$\delta g = -0{,}0362\; t \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{c}{T} + \frac{c}{T} \lg \frac{c}{T} + \tfrac{1}{2} \frac{t}{c} \right).$$

Die Formeln gelten der Entwicklung gemäß nur für $\frac{a}{T}$, $\frac{t}{a}$, $\frac{c}{T}$, $\frac{t}{c}$, $\frac{t}{T}$ kleiner als 1, die höheren Glieder gehen in diesem Falle nicht über 0,001 cm/sec² hinaus.

Für T wurde gemäß den Untersuchungen von Hayford und Helmert über diese Größe der Wert $T = 120$ km gesetzt. Die für a, c und t angenommenen Beträge und die nach den vorstehenden Formeln damit berechneten Steilrand-Störungen sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Um Korrektionen zu bekommen, wurden die gefundenen δg mit -1 multipliziert.

Tabelle 3. Ungefähre Randabstände, Absturzhöhen und Steilrand-Korrektionen für die meisten Stationen.

Station	Richtung, in der der Steilrand von der Station aus liegt	Randabstand		Höhe des Absturzes	Steilrand-Korrektion für $T = 120$ km	
		Plateau-station a km	Graben-station c km	t km	$-\delta g$ cm/sec²	
Njassa-Graben						
Masaürua	SW	70		1.2		−0.030
Alt-Langenburg	NO		4	1.5	+0.088	+0.117
"	SW		50	1.0	+0.029	

Station	Richtung, in der der Steilrand von der Station aus liegt.	Randabstand Plateaustation a km	Randabstand Grabenstation c km	Höhe des Absturzes t km	Steilrand-Korrektion für $T = 120$ km $-\delta g$ cm/sec²	
			Rukwa-Graben			
Ndjilla	SW	40		0.4		— 0.012
Kamsamba	NO		40	0.3	+ 0.010	+ 0.050
„	SW		20	0.9	+ 0.037	
„	SO		30	0.6	+ 0.003[1])	
Kwera-See	NO	10		0.7	— 0.031	— 0.047
„	W	85		0.7	— 0.016	
			südlicher Tanganjika-Graben			
Isimia	NO	35		0.9	— 0.030	— 0.055
„	W	50		0.9	— 0.025	
Bismarckburg	O		2	0.7	+ 0.044	+ 0.043
„	W	2		0.4[2])	— 0.013	
„	W		50	0.4	+ 0.012	
Moliro	O		60	0.7	+ 0.018	+ 0.027
„	O	6		0.4[2])	— 0.012	
„	W		6	0.4	+ 0.021	
Kakoma	O	25		0.5		— 0.019
			nördlicher Tanganjika-Graben			
Bangwe	O				0.000[3])	+ 0.024
„	W		60	0.9	+ 0.024	
Kondsi	W	50		0.3		— 0.008[4])
Ugaga	W	120		0.3		— 0.006[4])
			Wembäre-Graben			
Tambarale	O	5		0.15		— 0.007
Wembäre	W		25	0.15	+ 0.006	+ 0.021
„	O		15	0.35	+ 0.015	
Ipuani	W	40		0.35		— 0.011
			Niarasa-Graben			
Donjo Ndorobbo	SO	20		0.6		— 0.023
Niarasa	NW		10	0.8	+ 0.038	+ 0.051
„	SO		15	0.3	+ 0.013[4])	
			südliche ostafrikanische Bruchstufe			
Umburru	NW	60		0.7	— 0.019[4])	— 0.053
„	O	15		0.8	— 0.034	
Umbugwe	W		18	0.8		+ 0.034
			nördliche ostafrikanische Bruchstufe			
Ssurae	O	30		1.5		— 0.053
Guasso njiro	W		13	1.3	+ 0.060	+ 0.085
„	O		30	0.7	+ 0.025[4])	
Matabatt	W	30		0.7	— 0.025[4])	— 0.035
„	O	40		0.5	— 0.010[4])	

Station	Richtung, in der der Steilrand von der Station aus liegt	Randabstand Plateau-station a km	Randabstand Graben-station c km	Höhe des Absturzes t km	Steilrand-Korrektion für $T = 120$ km $-\delta g$ cm/sec²	
		oberer Pangani-Graben				
Donjo Benne	O	25		0.5		−0.019
Rufu	W		9	0.5	+0.024	+0.035
„	O		22	0.3	+0.011	
Maji ja njuu	W	15		0.3		−0.012[5]
		Mkomasi-Graben				
Kihuiro	W		15	0.6	+0.026	+0.030[6]
„	O		20	0.8	+0.033	
Wilhelmstal	zylindrisch	15		0.8		−0.079[7]
		Pemba-Graben[8]				
Kwamkoro	W	7		0.5	−0.024	−0.050[9]
„	O	8		0.5	−0.023	
„	zylindrisch	8		0.5	−0.052	
Pangani	W		60	0.9	+0.024[10]	+0.009
„	W		30	0.4	+0.015[11]	
„	O	20		0.8	−0.019[12]	
„	O	15		0.07	−0.002[13]	

1) Diese Korrektion rührt von dem Unika-Horst her, der wie ein Keil mit 20° Öffnungswinkel den Rukwa-Graben in zwei Arme teilt.

2) Dies ist die vermutete Tiefe des Tanganjika-Sees. Da der Absturz sich unter dem Seespiegel noch fortsetzt, ist eine Zusatzkorrektion mit dem Dichteunterschied $\Delta\Theta = 1{,}73$ (Gestein — Wasser) erforderlich. Da genaue Angaben über die Tiefe des See's nicht zur Hand waren, im einzelnen auch überhaupt nicht vorhanden sind, ist diese Korrektion sehr unsicher.

3) Hier ist auf der Ostseite des Grabens der Anstieg so allmählich, daß die obigen Formeln nicht benutzbar sind. Doch dürften sich die positiven und negativen Störungen ungefähr gegenseitig aufheben.

4) Korrektion sehr unsicher, da der Anstieg allmählich erfolgt, und ein ausgesprochener Steilrand fehlt.

5) Korrektion sehr unsicher, da zwischen dieser Station und dem Graben noch ein Teil der Pareberge liegt.

6) Da die begrenzenden Plateaus (Pare und West-Usambara) nahezu in gleicher Breite mit der Station abbrechen, so ist nur die Hälfte der berechneten Korrektion in Ansatz gebracht worden.

7) Bei West-Usambara ist die vorausgesetzte Ausdehnung der Steilränder auf große Strecken so wenig erfüllt, daß das Plateau als Kreiszylinder mit einer Grundfläche vom Radius a aufgefaßt und die Korrektion entsprechend berechnet wurde.

8) Als Pembagraben ist die Einsenkung zwischen dem Festlande und den Inseln Pemba und Sansibar bezeichnet, die sich weiterhin im Kingani- und oberen Rufidjitale fortsetzt.

9) Wegen der Lage dieser Station im Südzipfel von Ost-Usambara ist die Korrektion einmal nach der Formel für geradlinige und sich weithin erstreckende Steilränder und einmal nach der Zylinderformel mit dem Radius *a* berechnet worden. Verwendet wurde das Mittel beider.

10) Dieser Teil der Korrektion gilt für die nördliche Hälfte des Plateaus (Usambara). Sie ist daher nur zur Hälfte angebracht worden.

11) Dieser Teil gilt für die südliche Hälfte des Plateaus (südlich vom Pangani). Da hier ein Steilrand fehlt, ist die Korrektion unsicher. Sie ist nur mit dem halben Betrage eingesetzt worden.

12) Bei diesem Teil der Korrektion ist Pangani als obere Station zu betrachten inbezug auf den vom Wasser bedeckten Teil der Grabenrinne des Pembagrabens. Der Dichtigkeitsunterschied ist daher hier zu $\Delta\Theta = 1,73$ anzusetzen. Die Korrektion gilt nur für den nördlichen Teil des Grabens. Es ist daher nur die Hälfte des berechneten Wertes benutzt worden.

13) Dieser Teil gilt für die südliche Hälfte des Pembagrabens. Sie ist zur Hälfte berücksichtigt worden.

Werden die Steilrand-Korrektionen $(-\delta g)$ an die wie in freier Luft reduzierten Schwerebeschleunigungen g_0 angebracht, so erhält man die Werte g_0^{is}, die demnach die Schwerkraft im Meeresniveau bedeuten unter der Voraussetzung, daß die Isostasie tatsächlich besteht. Der Vergleich der g_0^{is} und der γ_0 bezw. $(\gamma_0 + \delta\gamma)$ führte zu den in Spalte 5 und 8 der Tabelle 1 und Spalte 9 der Tabelle 2 stehenden Abweichungen von den aus den Helmert'schen Formeln sich ergebenden Normalwerten der Schwerebeschleunigung für Kontinent und Küste.

Der Schwerkraftsüberschuß auf den höheren Plateaus ist auch nach Berücksichtigung der Steilrand-Korrektionen geblieben, wenn auch in stark verringertem Maße (+ 0,027). Unter diesen Plateaus und Horsten scheint also trotz ihrer großen Ausdehnung ein Massenüberschuß vorhanden zu sein. Um den Ueberschuß, den man im allgemeinen bei Berg-Stationen findet, kann es sich hier nicht handeln, da die Stationen ausnahmslos in Senken oder wenigstens nur auf flachen Hügeln geringer relativer Erhebung (Masaürua und Donjo Ndorobbo) liegen. Will man das Vorhandensein größerer unterirdischer Dichte, die einer ideellen störenden Schicht von etwa 240 m Dicke entsprechen würde, nicht annehmen, so könnte man die vorhandene Störung der Isostasie sich auch durch oberirdische Erosion entstanden denken. Um den Ueberschuß von + 0,027 cm/sec² zu erklären, müßte eine Schicht von etwa 140 m mittlerer Dicke im Laufe der Zeit von den höheren Plateaus abtransportiert sein. Da die meisten dieser Hochplateau-Stationen in breiten Talfurchen liegen, die durch Erosion, wenn nicht entstanden, so doch kräftig vertieft worden sind, so ist diese Erklärung vielleicht nicht ganz von der Hand zu weisen.

Allerdings muß die Erosion so stark gewirkt haben, daß die Isostasie seitdem noch keine Zeit gehabt hat sich wieder herzustellen. Vielleicht erklärt sich auf diese Weise auch ein Teil der üblichen positiven Störung auf Berggipfeln.

Die mittelhohen Plateaus schließen sich im Mittel genau dem Normalwert an.

Bei den Gräben sind die in $g_0 - \gamma_0$ auftretenden Störungen durch die Steilrand-Korrektionen fast völlig beseitigt worden, nur der Rukwa-, der südliche Tanganjika- und der Pemba-Graben weisen größere negative Störungen auf und erinnern damit an den nördlichen Teil des Roten Meeres. Der gleich gewaltige Njassa-Graben, der große Ostafrikanische Bruch und die kleineren Gräben haben nahezu normale Schwere, wenn man die Pratt'sche Hypothese als richtig annimmt.

Die Annahme der Isostasie im Sinne der Pratt'schen Hypothese ist also ausreichend, die meisten der beobachteten Abweichungen von der normalen Schwere als Steilrand-Störungen zu erklären, sodaß die großen störenden Schichten, die die Werte $g_0 - \gamma_0$ anfänglich anzudeuten schienen, nicht als bestehend angesehen zu werden brauchen. Die nicht als Steilrand-Korrektionen zu deutenden Reste, für die nun wohl allerdings keine andere Entstehungsursache, als lokale Störungen der Massenlagerung zu finden ist, halten sich in bescheideneren Grenzen (Extreme $+0{,}060$ und $-0{,}055$ gegen $+0.094$ und -0.119 ohne Annahme der Isostasie).

Die Anordnung der Beobachtungen auf den Grabenrändern und den Grabensohlen geben ein Mittel an die Hand, die Tiefe T der Ausgleichsfläche im Innern des Kontinents zu bestimmen, sowie Helmert es in der oben angezogenen Schrift aus den Störungen des Kontinentalrandes getan hat.

Um es dabei nur mit Störungen zweiter Ordnung zu tun zu haben, schien es mir jedoch erforderlich, auch bei den weiter landeinwärts liegenden Stationen den Einfluß des Abfalls des Festlandes zur Tiefsee zu berücksichtigen, da er nach der Helmert'schen Tabelle noch an der küstenfernsten Station der Pendel-Expedition merklich ist.

Es wurden deshalb die Helmert'schen Steilrand-Störungen $\delta\gamma$ für $T = 120$ km aus der Tabelle entnommen und von $g_0^{is} - \gamma_0$ in Abzug gebracht. Die Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von T haben dann folgende Form, wenn man mit ΔG das Mittel der Abweichungen aller beobachteten Schwerkraftswerte vom Normalwert bezeichnet.

$$g_0^{is} + \frac{d(-\delta g)}{dT} \cdot (T - 120) - (\gamma_0 + \delta\gamma) = \varDelta G$$

woraus folgt

$$\varDelta G + \frac{d(-\delta g)}{dT}(120 - T) = g_0^{is} - (\gamma_0 + \delta\gamma).$$

Die Differentialquotienten sind für eine Plateau-Station:

$$\frac{d(-\delta g)}{dT} = -0.0362 \frac{t}{T} \frac{a}{T} \lg \frac{T}{a} + 0.0362 \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{T}\right)^2,$$

für eine Graben-Station:

$$\frac{d(-\delta g)}{dT} = +0.0362 \frac{t}{T} \frac{c}{T} \lg \frac{T}{c}.$$

Diese Gleichungen sind in Tabelle 4, geordnet nach der Größe der Absolutglieder zusammengestellt. Bei der Ausgleichung ist es notwendig, die offensichtlich lokal stärker gestörten Stationen auszuschließen, da sie das Resultat stark zu verfälschen vermögen. Es bleibt nur zweifelhaft, wo die Grenze für die auszuschließenden stärkeren Störungen zu ziehen ist. Die Ausgleichung ist deshalb mehrmals unter verschiedener Festsetzung dieser Grenzen durchgeführt worden. Die Grenzen wurden symmetrisch zum Mittelwert aller $g_0^{is} - (\gamma_0 + \delta\gamma)$, der nahe bei -5 liegt, angenommen.

Dies führte zu folgenden Resultaten:

Gruppe	Grenzen 0.001 cm/sec²	Anzahl der Stationen	$\varDelta G$ 0.001 cm/sec²	T km	Mittl. Abweichung eines Schwerewerts 0.001 cm/sec²
1	0 bis — 10	9	— 4.7 ± 1.3	134 ± 17	± 4.0
2	10 „ — 20	18	— 3.4 ± 1.4	143 ± 18	± 6.0
3	15 „ — 25	24	— 5.4 ± 2.0	165 ± 25	± 10.0
4	20 „ — 30	27	— 6.1 ± 2.2	180 ± 27	± 11.5

Die übrigbleibenden Fehler v_1 bis v_4 sind in Tabelle 4 angegeben.

Von Gruppe 1 zu Gruppe 2 nehmen die mittleren Fehler der Unbekannten fast gar nicht zu, obwohl sich die Anzahl der Gleichungen verdoppelt hat. Von der zweiten zur dritten Gruppe dagegen ist eine starke Zunahme dieser Fehler vorhanden, die bei der vierten Gruppe noch weiter anhält. Dies Verhalten läßt darauf schließen, daß bei der zweiten Gruppe die Fehler jedenfalls noch als zufällig betrachtet werden können, bei der dritten Gruppe die stärkeren lokalen Störungen anfangen, sich bemerkbar zu machen,

Tabelle 4. Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Tiefe der Ausgleichsfläche T.

Stationen	Gruppe	Bedingungsgleichungen			Uebrigbleibende lokale Störungen v_1	v_2	v_3	v_4	v
Masaürua		$1\,\Delta G$	$-0.11\,(120-T) =$	$+52$					$+57$
Ssurăé		1	-0.15	$+32$					$+37$
Kwera-See		1	-0.09	$+32$					$+37$
Massonso		1	0	$+32$					$+37$
Moçambique		1	0	$+21$					$+26$
Kwamkoro	Vierte	1	-0.03	$+17$				$+21$	$+22$
Isimia	Dritte, Vierte	1	-0.19	$+14$			$+11$	$+9$	$+19$
Matabati	Dritte, Vierte	1	-0.10	$+12$			$+13$	$+12$	$+17$
Niarasa	Zweite, Dritte, Vierte	1	$+0.07$	$+6$		$+11$	$+15$	$+16$	$+11$
Kihuiro	Zweite, Dritte, Vierte	1	$+0.06$	$+4$		$+9$	$+12$	$+14$	$+9$
Ugaga	Zweite, Dritte, Vierte	1	0	$+2$		$+5$	$+7$	$+8$	$+7$
Ipuani	Zweite, Dritte, Vierte	1	-0.04	$+1$		$+3$	$+5$	$+5$	$+6$
Wilhelmstal	Zweite, Dritte, Vierte	1	-0.09	$+1$		$+2$	$+2$	$+2$	$+6$
Moschi	Zweite, Dritte, Vierte	1	0	$+1$		$+4$	$+6$	$+7$	$+6$
Umbugwe	Erste, Zweite, Dritte, Vierte	1	$+0.07$	0	$+6$	$+5$	$+9$	$+10$	$+5$
Donjo Ndorobbo	Erste, Zweite, Dritte, Vierte	1	-0.05	0	$+4$	$+2$	$+3$	$+3$	$+5$
Umburru	Erste, Zweite, Dritte, Vierte	1	-0.13	-2	$+1$	-2	-2	-4	$+3$
Rufu	Erste, Zweite, Dritte, Vierte	1	$+0.06$	-4	$+2$	$+1$	$+4$	$+6$	$+1$
Ssigirari	Erste, Zweite, Dritte, Vierte	1	0	-4	$+1$	-1	$+1$	$+2$	$+1$
Donjo Benne	Erste, Zweite, Dritte, Vierte	1	-0.05	-5	-1	-3	-2	-2	0
Maji ja njuu	Erste, Zweite, Dritte, Vierte	1	-0.02	-7	-3	-4	-3	-2	-2
Alt-Langenburg	Erste, Zweite, Dritte, Vierte	1	$+0.16$	-10	-3	-3	$+3$	$+6$	-5
Ndjilla	Erste, Zweite, Dritte, Vierte	1	-0.04	-10	-6	-8	-6	-6	-5
Kondsi	Zweite, Dritte, Vierte	1	-0.03	-12		-9	-8	-8	-7
Bangwe	Zweite, Dritte, Vierte	1	$+0.09$	-13		-8	-3	-1	-8
Guasso njirŏ	Zweite, Dritte, Vierte	1	$+0.17$	-14		-7	-1	$+2$	-9
Tambarale	Dritte, Vierte	1	-0.01	-21			-16	-16	-16
Kakoma	Dritte, Vierte	1	-0.05	-21			-18	-18	-16
Daressalam	Dritte, Vierte	1	0	-23			-18	-17	-18
Wembäre	Dritte, Vierte	1	$+0.04$	-24			-17	-16	-19
Tabora	Vierte	1	0	-27				-21	-22
Kamsamba	Vierte	1	$+0.12$	-27				-14	-22
Moliro		1	$+0.08$	-35					-30
Bismarckburg		1	$+0.05$	-40					-35
Pangani		1	$+0.04$	-55					-50

um von der vierten Gruppe an den völligen Ausschluß notwendig erscheinen zu lassen.

Daß der Ausschluß der außerhalb Gruppe 3 liegenden Stationen gerechtfertigt ist, geht auch daraus hervor, daß diese Beobachtungen sämtlich ein T verlangen, das größer als unendlich ist. Zum Beweise sind die vom Einfluß der Kontinental-Störungen befreiten beobachteten Störungswerte und die $T = \infty$ entsprechenden Steilrand-Störungen für die ausgeschlossenen Stationen zusammengestellt.

	$g_0 - (\gamma_0 + \delta\gamma + \Delta G)$	δg für $T = \infty$
Masaürua	$+ 86 \cdot 10^{-3}$ cm/sec²	$+ 68 \cdot 10^{-3}$ cm/sec²
Ssuráe	+ 89	+ 84
Kwera-See	+ 83	+ 78
Kwamkoro	+ 71	+ 55
Wembäre	— 41	— 29
Kamsamba	— 73	— 72
Moliro	— 58	— 49
Bismarckburg	— 79	— 54
Pangani	— 60	— 22

Daraus geht hervor, daß auch von Gruppe 3 jedenfalls noch Wembäre auszuscheiden ist. Die Ausgleichung dieser Gruppe ohne Wembäre gibt

$$\Delta G = -0.0048 \text{ cm/sec}^2 \quad T = 161 \text{ km}.$$

Doch ist auch dieser Wert für T sicher noch zu groß, da bei einem derartigen hohen Betrage der Unbekannten ($T - 120$) die zweiten Differentialquotienten schon in's Gewicht fallen und daher nicht hätten vernachlässigt werden dürfen.

Zum Nachweis dessen wurden die δg für zwei andere Tiefen der Ausgleichsfläche, nämlich $T = 70$ km und $T = 170$ km berechnet und die Widersprüche $g_0^{is} - (\gamma_0 + \delta\gamma + \Delta G)$ für die drei Annahmen von T gebildet. Für ΔG wurde der aus den Ausgleichungen gefundene mittlere Wert $\Delta G = -5$ angenommen. Man bekommt auf diese Weise die auf der folgenden Seite zusammengestellten Widersprüche in 0.001 cm/sec².

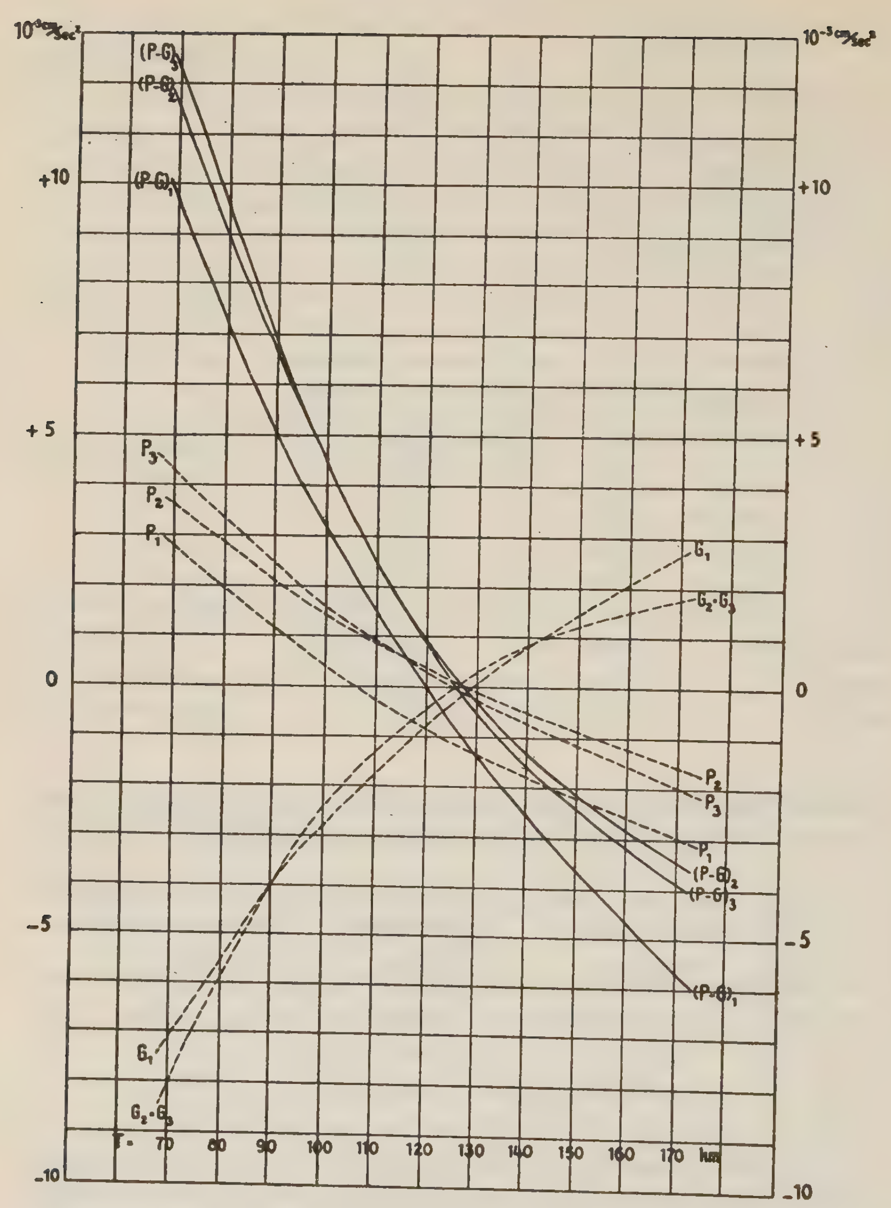
Die Gruppenmittel wurden mit T als Abszisse in Gitterpapier eingetragen und zwanglose Kurven hindurchgelegt (gestrichelte

			Plateau-Stationen $T =$	70	120	170 km	Graben-Stationen $T =$	70	120	170 km
Gruppe 3 ohne Wembäre	Gruppe 2	Gruppe 1	D. Ndorobbo	+ 7	+ 4	+ 2	Umbugwe	— 1	+ 4	+ 6
			Umburru	+ 10	+ 2	— 3	Rufu	— 3	0	+ 3
			Donjo Benne	+ 3	— 1	— 2	Alt-Langenb.	— 17	— 6	— 1
			Maji ja njuu	— 2	— 3	— 4				
			Ndjilla	— 4	— 6	— 8				
			Ugaga	+ 7	+ 6	+ 6	Niarasa	+ 4	+ 10	+ 11
			Ipuani	+ 7	+ 5	+ 3	Kihuiro	+ 3	+ 8	+ 9
			Wilhelmstal	+ 11	+ 5	+ 2	Bangwe	— 14	— 9	— 5
			Kondsi	— 7	— 8	— 10	Guasso njirŏ	— 27	— 10	— 10
			Isimia	+ 29	+ 18	+ 10				
			Matabatû	+ 25	+ 16	+ 15				
			Tambarale	— 17	— 17	— 18				
			Kakoma	— 14	— 17	— 19				
Gruppe 1			Mittel	+ 2.8	— 0.8	— 3.0	Mittel	— 7.0	— 0.7	+ 2.7
Gruppe 2			„	+ 3.6	+ 0.4	— 1.6	„	— 7.9	— 0.4	+ 1.9
Gruppe 3			„	+ 4.2	+ 0.3	— 2.0	„	— 7.9	— 0.4	+ 1.9

Linien P und G in der Figur auf Seite 18). Der Schnitt dieser Kurven mit der Nulllinie gibt folgende mittlere Werte von T·

Gruppe	Plateau-Station P-Linien	Graben-Station G-Linien	(Plateaust.—Grabenst.) ($P-G$-Linien)
1	106 km	128 km	119 km
2	127	125	127
3	124	125	125

In der letzten Spalte sind diejenigen Tiefen der Ausgleichsfläche angegeben, die aus der Differenz von Plateau- und Graben-Stationen hervorgehen (ausgezogene Linien ($P-G$) in der Figur), also von etwaigen Resten kontinentaler Störungen frei sind. Die fast völlige Uebereinstimmung der einzelnen T-Werte ist zufällig, denn läßt man die eine oder andere Station fort, so wird die Uebereinstimmung weniger gut. Dagegen finden die Schnitte immer zwischen den Abszissen 100 und 140 statt.



Daraus und aus der strengen Ausgleichung nach der M. d. kl. Qu. ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß die Ausgleichsfläche auch im Innern des afrikanischen Kontinents nahezu in der Tiefe von 120 km liegt, also derselben Tiefe, die Hayford und Tittmann für die Vereinigten Staaten von Nordamerika und Helmert für die Schwerestörungen zwischen Festland und Tiefsee gefunden haben. Man darf daraus, wie man sehen wird, aber nicht

schließen, daß an allen diesen Orten die Massenlagerung dasselbe Gesetz, nämlich die vorausgesetzte Isostasie im Sinne Pratts befolgt. Als wahrscheinlichste Werte sind

$$\Delta G = -0{,}005 \pm 0{,}002\ \text{cm/sec}^2, \quad T = 120 \pm 20\ \text{km}$$

beibehalten worden. Die mit diesen Annahmen übrigbleibenden lokalen Störungen v stehen in der letzten Spalte der Tabelle 4.

Die beobachteten Schwerewerte lassen sich demnach in großer Annäherung auf zwei Weisen erklären.

1) Die Festlandsmassen im Ganzen sind völlig oder nahezu völlig kompensiert. Die Fläche normaler Schwere steigt von der Küste nach dem Innern proportional zum Küstenabstand an bis zu einem Höchstwert, der etwa bei 350 km Küstenabstand erreicht wird, und bleibt dann konstant in dieser Höhe. Die oberflächlich sichtbaren Massendifferenzen sind dagegen nicht kompensiert, sodaß die über der Fläche normaler Schwere liegenden Massen und die unter dieser Fläche fehlenden Massen wirkliche störende Schichten sind.

2) Es besteht sowohl für den Kontinent im Ganzen, als auch bei den einzelnen Grabeneinbrüchen Isostasie mit einer Ausgleichsfläche in rd. 120 km Tiefe.

Um beide Erklärungsmöglichkeiten mit einander vergleichen zu können, sind für die erstere noch die mittleren Fehler und die übrig bleibenden lokalen Abweichungen von dem allgemeinen Gesetz abzuleiten.

Die Höhenlage der Fläche normaler Schwere H^n ergibt sich unter der Annahme $\Theta = {}^1/_2\,\Theta_m$ aus den kompensierenden Schichten $g_0'' - \gamma_0$ nach der Formel

$$H^n = -8770(g_0'' - \gamma_0).$$

Da für den Kontinent im Ganzen Isostasie vorhanden ist, sind auch die Helmert'schen Steilrand-Korrektionen $\delta\gamma$ zu berücksichtigen, und es wird daher

$$H^n = -8770\,(g_0'' - (\gamma_0 + \delta\gamma)).$$

Für die küstennahen Stationen bis zum Abstand a von rund 350 km war oben gefunden worden $g_0'' - (\gamma_0 + \delta\gamma) = -0.016 - 0.000386\,a$, woraus

$$H^n = 140 + 3.39\,a$$
$$= H_0^n + 3.39\,a$$

hervorgeht. Der Koeffizient von a wird von der früheren Ausgleichung her als bekannt vorausgesetzt. Die Bedingungsglei-

chungen haben daher die Form, bei küstenfernen Stationen:

$$0.000114(1245 - H^n) = g_0'' - (\gamma_0 + \delta\gamma) + 0.142,$$

bei küstennahen Stationen:

$$0.000114(140 - H_0^n) = g_0'' - (\gamma_0 + \delta\gamma) + 0.016 + 0.000386\, a.$$

Die Unbekannten $(H^n - 1245)$ und $(H_0^n - 140)$ sind einander gleich.

Die Gleichungen für die einzelnen Stationen sind in Tabelle 5 (S. 21) zusammengestellt. Bei der Ausgleichung wurden dieselben Gruppen gebildet wie bei der Berechnung der Tiefe der Ausgleichsfläche.

Es ergab sich

Gruppe	Grenzen 0.001 cm/sec²	Anzahl d. Stationen	H^n m	H_0^n m	Mittl. Abweichung eines Schwerewertes 0.001 cm/sec²
1	0 bis −10	8	1301 ± 10	196 ± 10	± 3.1
2	10 „ −20	18	1283 ± 17	178 ± 17	± 7.9
3	15 „ −25	21	1293 ± 20	188 ± 20	± 10.4
alle Beobachtungen	48 „ −40	35	1276 ± 34	171 ± 34	± 22.8

Als wahrscheinlichste Werte wurden die abgerundeten Ergebnisse der Gruppe 3

$$H^n = 1290 \pm 20\, m \text{ und } H_0^n = 185 \pm 20\, m$$

beibehalten. Die übrigbleibenden lokalen Störungen für die einzelnen Gruppen und den definitiven Wert, v_1, v_2, v_3 und v stehen in Tabelle 5.

Ein Vergleich der beiden Ausgleichungen miteinander (s. S. 15 u. 21) zeigt, daß keine der beiden Erklärungsweisen die Beobachtungen besser darzustellen vermag, als die andere. Die Gruppen umfassen in beiden Fällen fast gleich viel Beobachtungen, die mittleren Fehler haben fast genau gleiche Größe und der Unterschied der Extreme der übrigbleibenden lokalen Störungen (+ 56, − 51 und + 53, − 35) ist auch nicht ausreichend, die eine Darstellung besser erscheinen zu lassen, als die andere.

Dennoch muß die Ansicht, daß die Beobachtungen ebenso gut der Isostasie, wie der Nichtkompensierung der sichtbaren Massen entsprechen, fallen gelassen werden. Dies zeigt sich, wenn man die Einbrüche einzeln betrachtet und untersucht, wieviel von

Tabelle 5. Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Höhenlage der Fläche normaler Schwere H^n.

Gruppe	Stationen	Bedingungsgleichungen	Uebrigbl. lok. Stör. in 0.001 cm/sec² Gr. 1 v_1	Gr. 2 v_2	Gr. 3 v_3	v
	Massonso	$0.114 \left\{ \begin{matrix} (1245-H^n) \\ (140-H^n_0) \end{matrix} \right\} = +48$				+53
	Moçambique	+40				+45
	Kwera-See	+37				+42
	Masaürua	+27				+32
	Kwamkoro	+27				+32
	Ugaga	+26				+31
	Kondsi	+17				+22
Dritte Gruppe	Isimia	+12			+18	+17
Zweite Gruppe	Bangwe	+10		+14	+16	+15
	Ssigirari	+7		+11	+13	+12
	Daressalam	+7		+11	+13	+12
	Donjo Benne	+2		+6	+8	+7
	Ndjilla	+1		+5	+7	+6
	Kihuiro	+1		+5	+7	+6
Erste Gruppe	Maji ja njuu	−1	+5	+3	+5	+4
	Umbugwe	−4	+2	0	+2	+1
	Matabatú	−5	+1	−1	+1	0
	Kakoma	−6	0	−2	0	−1
	Rufu	−7	−1	−3	−1	−2
	Wilhelmstal	−9	−3	−5	−3	−4
	Ipuani	−9	−3	−5	−3	−4
	Moschi	−10	−4	−6	−4	−5
	Moliro	−11		−7	−5	−6
	Tambarale	−13		−9	−7	−8
	Pangani	−14		−10	−8	−9
	Umburru	−17		−13	−11	−12
	Wembäre	−25			−19	−20
	Tabora	−25			−19	−20
	Ssuraë	−26				−21
	Niarasa	−26				−21
	D. Ndorobbo	−33				−28
	Bismarckburg	−33				−28
	Guasso njirŏ	−35				−30
	Kamsamba	−35				−30
	Alt-Langenb.	−40				−35

den sichtbaren Plateaumassen unkompensiert ist, und wieviel durch Auflockerung der tieferen Teile der Kruste im Sinne der Pratt'schen Hypothese emporgehoben ist, bezw. wieviel Masse in den Grabeneinbrüchen durch Zusammenpressen der Unterlage in die Tiefe abgesunken ist. Dies läßt sich aus der Differenz der totalen Störungen einer Plateau-Station und der dazugehörigen Graben-Station ermitteln.

Bezeichnet x die Dicke derjenigen Plateauschicht, die aus der Kruste emporgehoben ist, so ist $(t-x)$ die Dicke der unkompensierten Schicht. Die totale Störung setzt sich zusammen aus der Steilrand-Störung und der Anziehung der unkompensierten Schicht. Die letztere ist sehr nahe $\delta'' g = 0{,}114(t-x)$. Die erstere werde mit $\delta g(x)$ bezeichnet; sie kann in erster Annäherung proportional zu der Dicke der emporgehobenen Schicht angenommen werden. Daher ist

$$\delta g(x) = \frac{x}{t}\,\delta g(t).$$

Ist $\varDelta g$ die totale Störung, so wird die Differenz

$$\begin{aligned}\varDelta g_{\mathrm{Pl.}} - \varDelta g_{\mathrm{Gr.}} &= \delta g(x)_{\mathrm{Pl.}} - \delta g(x)_{\mathrm{Gr.}} + \delta'' g \\ &= \frac{x}{t}\left[\delta g(t)_{\mathrm{Pl.}} - \delta g(t)_{\mathrm{Gr.}}\right] + 0.114(t-x).\end{aligned}$$

Daraus folgt mit leicht ersichtlichen Abkürzungen, und wenn die Störungen in 0,001 cm/sec² ausgedrückt werden,

$$\frac{x}{t} = \frac{\varDelta - 114t}{\delta - 114t}.$$

Um von den Störungen erster Ordnung frei zu werden, wurden die totalen Störungen in der Form $\varDelta g = g_0 - (\gamma + \delta\gamma + \varDelta G)$ benutzt. Sie stehen in Spalte 3 der Tabelle 6. Da zunächst Bestehen der Isostasie vorausgesetzt werden soll, so bedürfen die Werte $\varDelta g$ jedoch noch einer Verbesserung, da bei den meisten Stationen nicht nur der zu untersuchende Steilrand, sondern auch der gegenüberliegende des betreffenden Grabens oder Horstes Steilrand-Störungen verursacht. Die Korrektionen zur Beseitigung dieser Störungen stehen in Spalte 4, die verbesserten totalen Störungen in Spalte 5. Die nächsten Spalten sind nach den Ueberschriften verständlich.

Bei der Berechnung von $\frac{x}{t}$ nach der obigen Formel scheiden sich die Bruchränder in drei Gruppen. Bei der ersten Gruppe ist $(\varDelta - 114t)$ positiv, und da $(\delta - 114t)$ stets negativ ist, so wird x negativ, d. h. es kann überhaupt kein Teil der sichtbaren Plateaumassen aus der Tiefe gehoben sein, da die Anziehung dieser Massen noch nicht einmal ausreicht, die beobachtete Differenz der totalen Störungen zu erklären. Es liegt bei diesen Steilrändern die Auflockerung nicht unter dem Plateau und die Verdichtung nicht unter dem Graben, wie erwartet wurde, sondern das Fehlen von Massen im Graben wird noch von einer

Tabelle 6. Dicken der gehobenen Schichten und der relativen ideellen störenden Schichten an den Bruchrändern.

1 Bruchrand des Grabens	2 Höhe des Steilrandes t km	3 Totale Störungen $\Delta g = g_0 - (\gamma_0 + \delta\gamma + \Delta G)$ Plat. 10^{-3} cm/sec²	3 Grab.	4 Korrektion wegen des zweiten Steilrandes $-\delta\gamma_2$ Plat. 10^{-3} cm/sec²	4 Grab.	5 Verbesserte totale Störungen Plat. 10^{-3} cm/sec²	5 Grab.	6 Diff. d. verb. tot. Stör. $\Delta = \Delta g_{Pl.} - \Delta g_{Gr.}$ 10^{-3} cm/sec²	7 Anz. d. sichtb. Massen $114t$ 10^{-3} cm/sec²	8 Steilrand-Störungen $\delta\gamma$ Plat. 10^{-3} cm/sec²	8 Grab.	9 Verh. d. beid. Schichtdick. $\frac{x}{t}$	10 Dicke d. gehob. Schicht x km	11 Dicke d. ideellen störend. Massenschicht unter. d. Plateau inbezug auf den Graben m	12 Diff. d. unverb. tot. Stör. minus $114t$ 10^{-3} cm/sec²	13 Dicke d. ideellen störend. Schicht, die dem Unterschied in Spalte 12 entspr. m	14 Diff. d. unverb. tot. Stör. $\Delta g_{Pl.} - \Delta g_{Gr.}$ 10^{-3} cm/sec²	15 Dicke d. ideellen störend. Schicht, die dem Gesamt-Ueberschuß des Plateaus über den Graben entspr. m
Rukwa	0.8	+ 84	− 72	− 16	+ 13	+ 68	− 59	+ 127	+ 91					+ 316	+ 65	+ 571	+ 156	+ 1370
Pemba	0.7	+ 72	− 59	− 25	− 10	+ 47	− 69	+ 116	+ 80					+ 316	+ 51	+ 447	+ 131	+ 1130
Tanganjika Süd	0.8	+ 74	− 78	− 30	− 1	+ 44	− 79	+ 123	+ 91					+ 282	+ 61	+ 536	+ 152	+ 1333
Njassa	1.4	+ 87	−122	0	+ 29	+ 87	− 93	+ 180	+ 160					+ 176	+ 49	+ 431	+ 209	+ 1835
Wembäre	0.35	+ 17	− 40	0	+ 6	+ 17	− 34	+ 51	+ 40					+ 97	+ 17	+ 149	+ 57	+ 500
Rukwa	0.9	+ 74	− 72	− 25	+ 13	+ 49	− 59	+ 108	+ 103					+ 44	+ 43	+ 378	+ 146	+ 1281
Tanganjika Süd	0.8	+ 74	− 57	− 30	+ 9	+ 44	− 48	+ 92	+ 91					+ 9	+ 40	+ 351	+ 131	+ 1148
BruchstufeNord	1.4	+ 90	− 94	0	+ 25	+ 90	− 69	+ 159	+ 160	+ 53	− 60	0.021	0.03		+ 24	+ 211	+ 184	+ 1614
Rukwa	0.35	+ 7	− 72	0	+ 40	+ 7	− 32	+ 39	+ 40	+ 12	− 10	0.056	0.02		+ 39	+ 342	+ 79	+ 693
BruchstufeNord	0.7	+ 52	− 94	− 10	+ 60	+ 42	− 34	+ 76	+ 80	+ 25	− 25	0.133	0.09		+ 66	+ 579	+ 146	+ 1281
Tanganjika Süd	0.5	+ 3	− 57	0	+ 6	+ 3	− 51	+ 54	+ 57	+ 19	− 21	0.176	0.09		+ 3	+ 26	+ 60	+ 526
Wembäre	0.15	− 9	− 40	0	+ 15	− 9	− 25	+ 16	+ 17	+ 7	− 6	0.250	0.04		+ 14	+ 123	+ 31	+ 272
Tanganjika Süd	0.5	+ 3	− 78	0	+ 31	+ 3	− 47	+ 50	+ 57	+ 19	− 12	0.269	0.13		+ 24	+ 211	+ 81	+ 711
Bruchstufe Süd	0.8	+ 56	− 29	− 19	0	+ 37	− 29	+ 66	+ 91	+ 34	− 34	1	0.8	− 18	− 6	− 53	+ 85	+ 746
Oberer Pangani	0.5	+ 19	− 30	0	+ 11	+ 19	− 19	+ 38	+ 57	+ 19	− 24	1	0.5	− 44	+ 6	+ 53	+ 49	+ 431
Niarasa	0.7	+ 28	− 40	0	+ 13	+ 28	− 27	+ 55	+ 80	+ 23	− 38	1	0.7	− 52	+ 7	+ 62	+ 68	+ 597
Mkomasi	0.8	+ 84	− 21	− 40	+ 26	+ 44	+ 5	+ 39	+ 91	+ 40	− 33	1	0.8	− 299	+ 14	+ 123	+ 105	+ 920

darunter liegenden Auflockerung begleitet, und unter der sichtbaren Massenanhäufung des Plateaus liegt noch ein Massenüberschuß. Die Dicke der ideellen störenden Schicht, die diesem Ueberschuß entspricht, steht in Spalte 11. Dieselbe Schicht mit negativem Vorzeichen kann auch als relativer Defekt unter der Grabensohle aufgefaßt werden.

Bei der zweiten Gruppe von Bruchrändern kann ein Teil des Plateaus durch gehobene Massen im Sinne Pratts erklärt werden. Die Dicke dieser Schicht (x in Spalte 9 u. 10), im Maximum ein Viertel der Steilrandhöhe (= 110 m im südlichen Tanganjikagraben im Mittel) ist jedoch so gering, daß auch hier kaum von unterirdischer Kompensation die Rede sein kann, da der größte Teil der Plateaumassen, im Mittel 0,85 davon, nicht kompensiert ist. Jedenfalls kann man auch bei dieser Gruppe die Kompensation nicht als charakteristisches Merkmal bezeichnen.

Bei der dritten Gruppe findet sich $\frac{x}{t} > 1$, d. h. es ist Ueberkompensation vorhanden. Die Differenz der Steilrand-Störungen δ verlangt größere Unterschiede der totalen Störungen, als beobachtet worden sind. Der Ueberschuß von δ über Δ muß daher durch Defekte unter dem Plateau bezw. durch Anhäufungen unter der Grabensohle aufgehoben sein. Die Dicke der ideellen Schicht, die diesem Defekt entspricht, findet sich in Spalte 11. Die ganze Plateaumasse ist aus der Kruste emporgehoben und es fehlt außerdem noch Masse unterhalb des Plateaus. Diese Gruppe würde also Pratts Hypothese bestätigen, wenn es nicht außerordentlich unwahrscheinlich wäre, daß die vier Bruchränder der dritten Gruppe anders aufgebaut sind, als die dreizehn Ränder der ersten beiden Gruppen, und daß bei ihnen vollständige Isostasie vorhanden sein soll, während sie bei der großen Mehrzahl der Ränder gänzlich oder fast gänzlich fehlt.

Und in der Tat braucht dies scheinbar abweichende Verhalten der letzten vier Ränder nicht als Beweis für Pratts Hypothese angesehen zu werden. Denn läßt man die Voraussetzung der Isostasie fallen, so dürfen an den totalen Störungen Δg der Spalte 3 die Verbesserungen für den zweiten Steilrand $-\delta g_2$ nicht angebracht werden. Dann bekommt man aber als Differenz der totalen Störungen zwischen Plateau und Graben Werte, die mit einer Ausnahme größer als 114 t sind. Der Zähler der Gleichung für $\frac{x}{t}$ (Spalte 12) wird positiv und $\frac{x}{t}$ wird daher negativ, womit diese Steilränder aus der Gruppe 3 in die Gruppe 1 rücken. D. h. die Plateaus sind nicht nur nicht

kompensiert, sondern es liegt noch ein Massenüberschuß unter ihnen. Die einzige Ausnahme macht der südliche Teil der großen ostafrikanischen Bruchstufe, bei dem $(\Delta - 114t) = -6$ auch ohne die Korrektionen der Spalte 4 negativ ist. Man findet damit $\frac{x}{t} = 0{,}272$ und $x = 0{,}22$ km. Trotzdem hier also ein Viertel des Abfalls kompensiert erscheint, wird man dieses Resultat eher auf lokale Abweichungen an einer oder an beiden der benutzten Stationen zurückführen, als daraus folgern, daß der ganze südliche Teil der ostafrikanischen Bruchstufe von dem Verhalten der übrigen Brüche abweicht und isostatisch gelagert ist.

Hiermit scheint mir bewiesen zu sein, daß Pratts Hypothese für die Plateaus und die Grabeneinbrüche Ostafrikas nicht zutrifft, daß also dort Isostasie im einzelnen nicht herrscht. Die in den Gräben fehlenden Massen finden wir in den sichtbaren Plateaus wieder, wobei es zunächst dahingestellt bleibt, ob hier wirklich Seitenverschiebungen oder Bildungen großer Spalten angenommen werden müssen, oder ob sich ein plausibles Dichteverteilungsgesetz finden läßt, das die beobachteten Erscheinungen allein aus Vertikalbewegungen zu erklären erlaubt.

Da demnach Isostasie nicht vorausgesetzt werden darf, fallen die Verbesserungen der Spalte 4 fort und der Unterschied der totalen Störungen wird bei allen Steilrändern größer (s. Spalte 14); damit vergrößert sich auch der Ueberschuß dieses Unterschiedes über die Anziehung der sichtbaren Massen $(\Delta g_{\mathrm{Pl.}} - \Delta g_{\mathrm{Gr.}}) - 114\,t$, der in Spalte 12 zu finden ist. Die diesem Ueberschuß entsprechende störende Schicht in Spalte 13 gibt dann den unterhalb des Plateaus herrschenden, zu den sichtbaren Massen noch hinzutretenden relativen Massenüberschuß bezw. den unter den Grabensohlen befindlichen Defekt an. In Spalte 15 endlich findet man den gesamten relativen Massenunterschied zwischen Plateau und Graben, ausgedrückt in Metern ideeller störender Schicht.

Die beobachteten Erdbeben finden durch diese Störungen des hydrostatischen Gleichgewichts eine ungezwungene Erklärung, worauf oben schon hingewiesen war, und es ist wohl kein Zufall, daß ich Beben, außer einem an der Küste, am Njassagraben und am nördlichen Teil des großen Bruches erlebt habe, wo die Störungen am größten sind (1835 und 1614 m). Am Njassa sind Beben verhältnismäßig häufig und so bekannt, daß unter den dort lebenden Europäern allgemein die Ansicht herrschte, die angeschwemmte Halbinsel, auf der Alt-Langenburg liegt, werde über kurz oder

lang infolge eines Bebens in den See rutschen. Von häufigen Erdbeben am Tanganjika berichtet Dantz.

Auch die großen, am Njassa und an der Bruchstufe von mir festgestellten Lotstörungen stehen mit dem gefundenen Ergebnis über die Massenlagerung im Einklang.

Man wird vielleicht fragen, warum oben das Resultat der Berechnung der Tiefe der Ausgleichsfläche mitgeteilt ist, da sich jetzt herausgestellt hat, daß es illusorisch ist, weil die Massen nicht isostatisch geschichtet sind. Es ist geschehen, um zu zeigen, wie die ausgleichende Zusammenfassung und Mittelbildung zu einem verfehlten Resultate geführt hat, das durch die nahe Uebereinstimmung mit den Ergebnissen von Hayford, Tittmann und von Helmert den Anschein der Zuverlässigkeit erweckte, und ferner weil es mir nicht ausgeschlossen zu sein scheint, daß diese Uebereinstimmung mit dem Helmert'schen Werte nicht zufällig ist, sondern darauf hinweist, daß auch die Störungen an den Steilküsten der Kontinente durch ein anderes Dichteverteilungsgesetz, als das Pratt'sche zu erklären seien.

Das unerwartete Ergebnis, daß die Gräben teils völlig, teils fast völlig unkompensiert sind, führte mich dazu, einen der tiefsten Gräben, dessen Schwereverhältnisse bekannt sind, zum Vergleich heranzuziehen, nämlich den Tongagraben. Die folgenden Beobachtungsergebnisse und die zur Berechnung der Störungen erforderlichen Größen sind den Werken von Hecker entnommen[1]). Die Buchstaben entsprechen der Helmert'schen Bezeichnung.

1904	Anzahl der Beobachtungen	Oberhalb des	a	b	t	$g_0 - \gamma_0$
Juli 2	2	Plateaus	+119 km	+215 km	6,3 km	+ 0,212
3	2	Grabens	− 66	+ 20	8,0	− 0,234
4	1	Grabens	− 133	− 53	5,5	− 0,245

Damit finden sich die angenäherten Steilrand-Korrektionen

$$\delta g_1 = -0.050, \quad \delta g_2 = +0.090, \quad \delta g_3 = +0.070.$$

1) O. Hecker: Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen und Großen Ozean und an deren Küsten, sowie erdmagnetische Messungen. Derselbe: Bestimmung der Schwerkraft auf dem Schwarzen Meere und an dessen Küste, sowie neue Ausgleichung der Schwerkraftsmessungen auf dem Atlantischen, Indischen und Großen Ozean. Zentralbureau der internationalen Erdmessung. Neue Folge der Veröffentlichungen. Nr. 16 und Nr. 20. Berlin 1908 und 1910.

Obwohl die Korrektionen nach der strengen Formel von Helmert berechnet sind, sind sie nur als angenähert zu betrachten, da die Störung der Abnahme der Schwerkraft mit der Höhe, die durch den Graben ausgeübt wird, nicht berücksichtigt ist. Nach dem, was sich über diese Vernachlässigung bei der genäherten Formel, nach der oben die Untersuchungen für Ostafrika durchgeführt worden sind, ergeben hat, dürfte diese Vernachlässigung nur sehr wenig ausmachen.

Die zweite und dritte Korrektion muß noch etwas vergrößert werden, um dem Einfluß des anderen Grabenrandes Rechnung zu tragen, sodaß nahezu

$$\delta g_1 = -0.050, \quad \delta g_2 = +0.100, \quad \delta g_3 = +0.090$$

zu setzen sein dürfte. Die Schwerestörungen gehen daher bei Annahme der Isostasie über in

$$\begin{aligned} g_0^{is} - \gamma_0 = & +0{,}162 \text{ oberhalb des Plateaus} \\ & -0{,}134 \text{ oberhalb des Grabens} \\ & -0{,}155 \text{ oberhalb des Grabens.} \end{aligned}$$

Mittels der Pratt'schen Hypothese würde also auch an diesem Graben nur ein Teil der beobachteten totalen Störung und zwar nur $^1/_3$ bis $^1/_2$ davon zu erklären sein. Um die Dicke der Schicht zu ermitteln, die diesem Betrage entspricht, wurden die Formeln von Seite 22 benutzt, wobei aus den beiden Graben-Stationen das Mittel genommen wurde. Es ist daher

$$\Delta = +452, \quad \delta = +145, \quad t = 6{,}5.$$

Statt der Konstanten 114 ist hier jedoch wegen der größeren Dichte des Wassers 70 zu setzen. Damit wird $\frac{x}{t}$ nahezu gleich 0, d. h. das Tongaplateau ist relativ zum Tongagraben gar nicht kompensiert. Für diesen Fall trifft also die Faye'sche Ansicht zu, daß die ganzen Massen der ozeanischen Inselpfeiler als störende Massen anzusehen sind. Die Annäherung der Formel von Seite 22 an die strenge Formel ist in diesem Falle wegen des kleineren Böschungswinkels zwar noch geringer als bei den ostafrikanischen Gräben, aber eine merkliche Kompensation kann auch die richtige Formel nicht ergeben, weil Δ fast genau gleich $70\,t$ ist.

Der Schwerestörung zwischen Plateau und Graben entspricht eine ideelle störende Schicht von 6500 m Dicke. Damit steht in Einklang, daß die Tongarinne ein bekanntes Zentrum starker Erd-

beben ist, während von den ostafrikanischen Gräben, wo die größte beobachtete störende Schicht einen Betrag von nur 1800 m, also ein Drittel desjenigen des Tongagrabens, hat, nur schwache Erdbeben bekannt geworden sind.

Die Messungsergebnisse Heckers zeigen für die Strecke zwischen Sydney, Neu-Seeland und Samoa überhaupt Uebereinstimmung mit meinen Resultaten aus Ostafrika. Denkt man sich den Meeresboden auf die gleichmäßige Tiefe von 5,2 km gebracht dadurch, daß alle höheren Stellen abgetragen und alle tieferen ausgefüllt werden, so hat man zu den gemessenen Schwerebeschleunigungen die Korrektion $70(t-5{,}2)$ hinzuzufügen, wenn t die wirkliche Tiefe ist. Das Ergebnis einer solchen Reduktion zeigen Spalte 6 und 7 der Tabelle 7. Die beobachteten großen Abweichungen vom Normalwert (Spalte 5) sind fast alle verschwunden und die übrigbleibenden Störungen verraten nichts von den großen Tiefenunterschieden, die vor der gedachten Einebnung des Meeresbodens vorhanden waren. Die wenigen übrigbleibenden größeren Störungen (Spalte 7) lassen sich sehr einfach auch anders, als durch Abweichungen der Massenlagerung von der Faye'schen Annahme, nämlich durch Fehler in den Tiefenangaben erklären.

Die beiden ersten rühren von Messungen in der Nähe Neu-Seelands her, wo der allmähliche Uebergang zu der isostatischen Massenlagerung erfolgt, die derjenigen der Festländer entspricht. Sie brauchen nicht weiter berücksichtigt zu werden, da die Faye'sche Annahme für die Kontinente ebenfalls Isostasie verlangt. Die nächste Abweichung (+ 180) würde verschwinden, wenn die Tiefe an der betreffenden Stelle nicht 5,0 km, sondern nur 2,4 km betrüge. Dies erscheint aber sehr möglich, denn nach der Carte générale bathymétrique des océans etc.[1]) spricht keine der vorhandenen Tieflotungen dagegen, während sich ein Ausläufer des Neu-Kaledonischen Rückens von der angegebenen Höhe bis etwa $^3/_4{}^0$ nördlich von der Beobachtungsstelle erstreckt. Da, wie gesagt, die Lotungen nicht dagegen sprechen, so kann eine Fortsetzung dieses Ausläufers bis zu dem Schiffsorte mit derselben Wahrscheinlichkeit angenommen werden, wie die in der Karte gezeichnete Führung der Tiefenlinien. Die Tiefe von 2,4 km und der Störungsrest 0 ist daher ebenso wahrscheinlich, wie diejenige von 5,0 km mit dem Störungsrest + 180. Die letzte Abweichung von der Faye'schen Annahme (– 182) bezieht sich auf den Tongagraben.

---

1) Auf Veranlassung des Fürsten von Monaco und unter Leitung von Thoulet und Sauerwein gezeichnet von Tollemer.

Tabelle 7. Die Heckerschen Schwerkraftsmessungen zwischen Sydney und Hawai.

1 Oertlichkeit der Beobachtung	2 Datum 1904	3 Anzahl der Beobachtungen	4 Tiefe t km	5 Totale Störung $g - \gamma_0$ 10^{-3} cm/sec²	6 Verbleibende Störungen nach der Einebnung des Meeresbodens 10^{-3} cm/sec²	7 10^{-3} cm/sec²
	Sydney bis Samoa.					
Hauraki Golf nahe Auckland	Juli 1	2	0.06	+ 45		— 315
Plateau von Neu-Seeland	Juni 30	1	0.20	+ 157		— 193
Plateau von Neu-Seeland	„ 30	1	0.15	+ 393	+ 39	
Abfall von Australien	„ 27	1	0.20	+ 346	— 4	
Neu-Kaledonischer Rücken	„ 29	1	1.0	+ 264	— 30	
Plateau von Neu-Seeland	„ 30	1	2.0	+ 232	+ 8	
Tonga-Plateau	Juli 2	2	2.7	+ 212	+ 37	
Kermadec Plateau	„ 2	1	3.0	+ 106	— 48	
Tiefsee an der Grenze des Neu-Kaledonischen Rückens	Juni 28	1	5.0	+ 194		+ 180
Tonga-Rinne	Juli 3	1	6.5	— 273		— 182
Tonga-Rinne	„ 3	1	8.0	— 196	0	
Tonga-Rinne	„ 4	1	8.5	— 245	— 14	
	Samoa bis Hawai.					
Nähe von Oahu	Juli 12	1	0.02	+ 268		— 95
Nähe von Oahu	Sept. 5	1	0.07	+ 310	— 50	
Nähe von Oahu	Juli 12	1	0.2	+ 159		— 191
Nähe von Oahu	Sept. 6	1	1.7	+ 304	+ 59	
Christmas-Rücken	Juli 9	1	3.5	— 19		— 138
Abfall von Samoa	„ 5	1	3.8	— 64		— 162
Tiefsee bei Oahu	„ 11	1	4.2	+ 52	— 18	
Christmas-Rücken	„ 9	1	4.2	— 165		— 235
Tiefsee nördlich Samoa	„ 5	1	5.0	+ 101		+ 87
Tiefsee nördlich Samoa	„ 6	2	5.0	— 6	— 20	
Tiefsee nördlich Samoa	„ 7	2	5.25	— 42	— 40	
Tiefsee südlich Oahu	„ 11	1	5.3	+ 32	+ 39	
Tiefsee südlich des Christmas-Rückens	„ 8	2	5.45	— 34	— 17	
Tiefsee nördlich des Christmas-Rückens	„ 10	2	5.45	+ 12	+ 29	

Die Prüfung der Tiefenlinien der Carte bathymétrique ergibt, daß keine der vorhandenen Lotungen einer kleinen Verschiebung der Linien nach Westen widersprechen, sodaß die Beobachtung sehr wohl über 8,0 bis 8,5 km Wasser erfolgt sein kann. Dadurch würde aber der verbleibende Störungsrest auf – 77 bis – 42 zurückgehen und auch an dieser Stelle die Schwerkraft sehr nahe der Faye'schen Annahme entsprechen.

Hierdurch ist bewiesen, daß das Gebiet zwischen Australien, Neu-Seeland und Samoa Ostafrika darin gleicht, daß die Höhenunterschiede im einzelnen, auch wenn sie sehr beträchtlich sind, nicht kompensiert sind, sondern daß nur eine allgemeine Kompensation besteht, die ungefähr der mittleren Tiefe unter bezw. der mittleren Erhebung über das Meeresniveau entspricht.

Ueber Samoa hinaus erscheint es zweifelhaft, ob die Erhebungen des Meeresbodens noch als unkompensierte Störungen angesehen werden können. Abgesehen von der unmittelbaren Nähe von Hawaï, wo sich eine teilweise Kompensation der Landbeobachtungen wegen wohl nicht von der Hand weisen läßt, widersprechen die vorhandenen Lotungen aber ebenfalls nicht der Annahme von solchen Tiefen an den Beobachtungsstellen, daß die Störungsreste in Spalte 7 verschwinden oder auf einen kleinen Betrag reduziert werden. Die beiden Beobachtungen vom Christmas-Rücken sind über einer Einbuchtung gemacht, die sich von Nordwesten her in diesen Rücken hinein erstreckt. Es würde mit den vorhandenen Tiefenangaben durchaus vereinbar sein, diese Einbuchtung etwas weiter nach Südosten eingreifen zu lassen, als es auf der Karte geschehen ist. Dadurch würde der eine Störungsrest verschwinden, der andere auf etwa – 80 gebracht werden. Die Störung auf dem Sockel von Samoa deutet auf einen Graben nördlich von Samoa hin. Bei einer Wassertiefe von rund 6,1 km würde die Störung verschwinden. Lotungen, die eine geringere Tiefe nachweisen, sind nicht vorhanden; andrerseits hat S. M. S. „Planet" in neuerer Zeit so viel Gräben längs der Inselreihen der Südsee entdeckt, daß ein Graben auf einer Seite des Inselbogens als die Regel, das Fehlen als die Ausnahme anzusehen ist. Daher würde eine Tiefe von etwa 6 km nördlich von Samoa an der Stelle, wo Hecker nach der Carte bathymétrique 3,8 km angibt, nicht unwahrscheinlich sein. Es wäre interessant, festzustellen, ob dieser durch die Schweremessungen angedeutete Graben wirklich existiert, oder ob der Störungsrest auf die Kompensation des Samoa-Sockels zurückzuführen ist. Sollte das Erstere zutreffen, so wäre damit die Möglichkeit der Verwendung des Hecker'schen Apparats als Tiefen-

messer in diesem an Untiefen so reichen Ozeanteil erwiesen. Die letzte größere Abweichung endlich (+ 87) fällt in ein Gebiet, wo weit und breit keine Tiefenmessungen gemacht sind, sodaß hier die Tiefe von 3,8 km, die die Störung verschwinden lassen würde, genau ebenso wahrscheinlich ist, wie die angenommene Tiefe von 5 km. Die Ausdehnung des Gebiets, in dem durch Einebnen des Meeresbodens das Verschwinden der totalen Störungen herbeigeführt werden kann, bis nach Hawaï hin ist demnach nicht unwahrscheinlicher als die gegenteilige Annahme.

Für das Gebiet zwischen Australien, Neu-Seeland und Samoa scheint es mir dagegen zweifellos zu sein, daß alle unterseeischen Erhebungen und Einsenkungen unterirdisch nicht kompensiert sind, sondern der Faye'schen Ansicht entsprechend in ihrem ganzen Betrage Störungen des Massengleichgewichts darstellen. Der Meeresboden im ganzen zeigt dagegen überall einen solchen Massenüberschuß, daß er den Massendefekt einer Wassersäule von 5,2 km Höhe ausgleicht. So wie in Ostafrika alle Erhebungen über und alle Einsenkungen unter eine Fläche normaler Schwere in konstanter Meereshöhe nicht kompensiert sind, so sind auch in dem genannten Meeresteil die Abweichungen von einer konstanten Tiefe, die etwa der mittleren Tiefe des Ozeans entspricht, nicht ausgeglichen. Die Isostasie scheint demnach nur bei den Massenstörungen erster Ordnung (Festland und Ozean) überall zu bestehen, bei den Massenstörungen zweiter Ordnung aber nicht die allgemeine Gültigkeit zu haben, die man ihr nach den neueren Arbeiten, besonders der amerikanischen Geodäten zuzuschreiben geneigt war.

Das Fehlen der Isostasie in den Einbruchsgebieten Ostafrikas und der Südsee legt die Vermutung eines kausalen Zusammenhanges zwischen Brüchen und nichtisostatischer Schichtung nahe. Möglicherweise bietet sich hier ein Merkmal für Unterscheidungen in der genetischen Entwicklung der einzelnen Erdräume dar. Man kann nach diesen Ergebnissen die großen Stufen und Rinnen eigentlich überhaupt nicht mehr als Einbrüche oder Gräben auffassen.

Es ist noch die Verteilung der übrigbleibenden geringen lokalen Störungen in Ostafrika auf die einzelnen Gräben darzustellen. Die Schweremessungen[1]) sind in mehreren Linien ange-

1) Eine Karte der Schwerestationen ist enthalten in „E. Kohlschütter: Ergebnisse der ostafrikanischen Pendel-Expedition u. s. w. Bd. I. Tafel I. Abhandlungen der Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-physik. Klasse. Neue Folge V, 1. Berlin 1907.

ordnet, die die Gräben nahezu rechtwinklig überqueren. Es sind dies im Süden die Njassalinie und eine im Bogen verlaufende Linie über den südlichen Tanganjika und die Rukwa; dann in der Mitte des Schutzgebiets mehrere zu einer mittleren Linie zusammenzufassende Linien zwischen 3° und 5° südlicher Breite vom Tanganjika bis zur Küste und im Norden die Linie über den nördlichen Teil der großen Bruchstufe. Die lokalen Störungen sind der letzten Spalte von Tabelle 5 entnommen und sind daher so aufzufassen, daß sie zu den sichtbaren Massenstörungen noch hinzutreten. Die Abstände vom Anfangspunkte der Linien (s. Tabelle 8) geben nicht die Entfernung zwischen den beiden Punkten an, sondern sind so berechnet worden, daß die senkrechten Abstände der Stationen von den Bruchrändern zusammenaddiert wurden. Zum Vergleich sind auch die totalen Störungen nochmals in Tabelle 8 mit aufgeführt worden.

Tabelle 8. Geographische Lage und Anordnung der übrigbleibenden lokalen Störungen.

Station	Südl. Breite °	Oestl. Länge °	Abstand vom Anfang der Linie km	Tot. Stör. n. Abzug d. kontinent. Einfl.[1] 0.001 cm/sec²	Uebrigbleibende lokale Störungen[2] 0.001 cm/sec²	Morphologische Lage der Stationen. Wo nichts angegeben, Plateaulage
			Njassa-Linie			
Alt-Langenburg	9.6	34.1	0	— 122	— 35	Graben
Masaürua	9.1	34.6	74	+ 87	+ 32	
Moçambique	15.0	40.7		+ 26	+ 45	Küste
			Tanganjika-Rukwa-Linie			
Kakoma	8.3	30.4	0	+ 3	— 1	
Moliro	8.2	30.6	31	— 57	— 6	} Graben
Bismarckburg	8.4	31.2	82	— 78	— 28	} Graben
Isimia	8.1	31.5	134	+ 74	+ 17	
Kwera-See	8.4	32.0	169	+ 84	+ 42	
Kamsamba	8.4	32.3	211	— 72	— 30	Graben
Ndjilla	7.6	32.6	291	+ 7	+ 6	

1) Stör. $= g_0 - (\gamma_0 + \delta\gamma + \Delta G)$.
2) Küstenferne Stationen: Stör. $= g_0'' - (\gamma_0 + \delta\gamma) + 0.147$
Küstennahe Stationen: Stör. $= g_0'' - (\gamma_0 + \delta\gamma) + 0.021 + 0.000386\,a$.

Station	Südl. Breite °	Oestl. Länge °	Abstand vom Anfang der Linie km	Tot. Stör. n. Abzug d. kontinent. Einfl. 0.001 cm/sec.²	Uebrigbleibende lokale Störungen 0.001 cm/sec.²	Morphologische Lage der Stationen. Wo nichts angegeben, Plateaulage
Mittlere Linie						
Bangwe	4.9	29.6	0	— 32	+ 15	Graben
Kondsi	5.1	30.2	50	+ 1	+ 22	
Ugaga	5.1	30.8	120	+ 13	+ 31	
Massonso	5.1	31.6	190	+ 37	+ 53	
Tabora	5.0	32.8	290	— 22	— 20	
Tambarale	4.6	33.6	400	— 9	— 8	
Wembäre	4.6	34.0	430	— 40	— 20	Graben
Ipuani	4.5	34.7	485	+ 17	— 4	
D. Ndorobbo	3.1	35.2	525	+ 28	— 28	
Niarasa	3.4	35.4	555	— 40	— 21	Graben
Umburru	3.8	35.6	610	+ 56	— 12	
Umbugwe	3.8	35.8	645	— 29	— 1	Graben
Donjo Benne	3.9	37.1	775	+ 19	+ 7	
Rufu	3.9	37.5	810	— 34	— 2	Graben
Maji ja njuu	3.9	37.8	845	+ 10	+ 4	
Kihuiro	4.5	38.1	875	— 21	+ 6	Graben
Wilhelmstal	4.8	38.3	910	+ 84	— 4	
Kwamkoro	5.1	38.6	920	+ 72	+ 32	
Pangani	5.4	39.0	960	— 59	— 9	Graben
Daressalam	6.8	39.3		— 18	+ 12	Küste
Nördliche Bruchstufen-Linie						
Ssuraë	2.1	35.7	0	+ 90	— 21	
Guasso njirŏ	1.9	36.1	45	— 94	— 30	Graben
Matabatú	2.4	36.4	105	+ 52	0	
Ssigirari	2.8	36.9	165	+ 1	+ 12	Fuß des Kilimandscharo.
Moschi	3.3	37.4	225	+ 6	— 5	Fuß des Kilimandscharo.

Bei der Njassalinie zeigt der Graben nahezu ebensoviel lokalen Defekt, als das Plateau lokalen Ueberschuß. Dasselbe findet statt beim südlichen Tanganjika-, dem Rukwa-Graben und dem zwischen beiden gelegenen Tanganjika-Plateau. Die anderen beiden Grabenränder haben hier ihrer geringeren Höhe entsprechend auch einen kleineren relativen Massenüberschuß aufzuweisen derart, daß die kongostaatliche Seite des Tanganjika-Grabens absolut genommen auch noch Defekt hat.

Bei der mittleren Linie findet man zunächst am Tanganjika ein Gebiet mit zunehmendem Ueberschuß, das bis Massonso reicht. Zwischen dieser Station und Tabora wechselt die lokale Störung

auf einmal das Vorzeichen und es beginnt ein Gebiet mit Defekt, das weit nach Osten und Norden reicht und etwa mit der großen Bruchstufe seinen Abschluß erreichen dürfte. Nach Norden erstreckt sich dieses Gebiet bis zu der nördlichen Bruchstufenlinie. Von der Bruchstufe ab nach Osten bis zur Küste ist das Vorzeichen der lokalen Störungen wechselnd und die absoluten Beträge sind sehr gering mit Ausnahme von Ost-Usambara, wo noch einmal ein kräftiger Ueberschuß auftritt. Diese Verteilung der Störungen dürfte mit der orographischen Gestaltung des Geländes zusammenhängen. Für das Gebiet von Bangwe bis Massonso ist die Größe von H^* zu groß entsprechend der kleineren mittleren Meereshöhe dieser Gegenden. Von Tabora bis zur Bruchstufe dagegen zu klein, weil hier auch die mittlere Höhe des Kontinents größer sein dürfte. Die übrigbleibenden Störungsreste modifizieren daher einheitlich für größere Gebietskomplexe nach Art der regionalen Störungen die Annahme einer konstanten Höhe der Fläche normaler Schwere. Dabei ist aber nicht ersichtlich, warum gerade zwischen Massonso und Tabora ein so scharfer Sprung in den regionalen Störungen auftritt. Durch die Höhenunterschiede der beiden Stationen ist er nicht gerechtfertigt, sodaß es den Anschein gewinnt, als ob zwischen diesen beiden Orten ein versteckter Bruch sich hinzieht. Weiter im Westen nimmt auch Dantz einen alten, durch die Tanganjika-Sandsteine ausgefüllten Einbruch an. Ob diese Bruch-Zone aber bis nach Massonso hinreichen kann, erscheint mir fraglich. Auf der Karte von Dantz sind bei Massonso Deckschichten gezeichnet. Nach meinen Eindrücken dürften diese aber von verwittertem Gneiß und nicht von dem Sandstein herrühren [1]). Ferner kommt der Dantz'sche Bruch auch aus dem Grunde nicht in Frage, weil in Massonso Ueberschuß und in Tabora relativer Defekt ist, sodaß nach Analogie der übrigen Brüche Massonso Plateau-Station und das um 120 m höher gelegene Tabora Grabenstation sein müßte. Auch hier scheint seitliche Verschiebung der kompensierenden Massen vorhanden zu sein.

Bei der nördlichen Bruchstufen-Linie ist unter dem hohen westlichen Plateau relativ zum Graben Ueberschuß, absolut Defekt vorhanden. Das östliche Plateau ist normal.

Beachtenswert ist, daß der Kilimandscharo keine Anzeichen von Störung verrät, da die beiden Stationen an seinem Fuße normal sind.

---

1) Die Reisen des Bergassessors Dr. Dantz in Deutsch-Ostafrika in den Jahren 1898, 1899, 1900. Mitteilungen aus den Deutschen Schutzgebieten 1902 und 1903.

Auf Seite 20 war die wahrscheinlichste Höhe der Fläche normaler Schwere im Innern des Kontinents zu $H^* = 1290 \pm 20$ m ermittelt worden. Das Mittel aus den Höhen der einzelnen Stationen H — bezw. $H + 3{,}39\,(325 - a)$ für küstennahe Stationen — berechnet sich dagegen nur zu 1231 m. Daraus geht hervor, daß das Mittel der Schwerebestimmungen der Gruppen 2 und 3 von dem Normalwert etwas abweicht. Aus der Differenz der beiden Zahlen ergibt sich der Betrag dieser Abweichung zu

$$\varDelta G = -\frac{59}{8770} = -0.007 \pm 0.002 \text{ cm/sec}^2$$

Der allen vorhandenen Beobachtungen, auch den lokal stärker gestörten entsprechende Mittelwert war dagegen $H^* = 1276 \pm 34$ m. Damit wird

$$\varDelta G = -\frac{45}{8770} = -0.005 \pm 0.004 \text{ cm/sec}^2$$

gefunden.

Bei der Ausgleichung nach der Pratt'schen Hypothese war ebenfalls $\varDelta G = -0{,}005 \pm 0{,}002$ cm/sec² errechnet worden.

Diese Größe kann entweder als zufälliger, von der Auswahl der Stationen abhängiger Fehler oder als kontinentale Störung der Isostasie, oder auch als Verbesserung der Hauptkonstanten der Helmert'schen Formel für die normale Schwere aufgefaßt werden.

Ich möchte am ehesten das letztere annehmen; allerdings nicht, weil ich glaube, daß die paar ostafrikanischen Stationen eine merkliche Aenderung des Normalwerts herbeiführen können, sondern weil bei meinen ersten Rechnungen, als von dem Küstenabstand 350 m ab die Helmert'schen Steilrand-Störungen noch nicht berücksichtigt waren, $\varDelta G = 0$ sich ergeben hatte. Der negative, aus der Ausgleichung hervorgehende Betrag ist erst durch die Einführung von $(\gamma_0 + \delta\gamma)$ auch bei den küstenfernen Stationen entstanden.

Dies läßt die Vermutung aufkommen, daß die Schwerkraft im Mittel der Stationen der Pendel-Expedition normal ist, und daß die Abweichung daher rührt, daß bei Ableitung der Helmert'schen Formel von 1901 für γ_0 die Steilrand-Korrektionen für die küstenfernen Beobachtungen nicht genügend berücksichtigt sind. Bei Ableitung dieser Formel[1]) wurden Stationen, die weithin von

---

1) F. R. Helmert: Der normale Teil der Schwerkraft im Meeresniveau Berliner Berichte 1901.

Flachsee umgeben sind, als Festlands-Stationen betrachtet. Es sind daher sicher eine ganze Reihe von Stationen darunter, deren Abstand vom Kontinentalabfall unter 1000 m beträgt. Da andrerseits nach der Tabelle der Steilrand-Störungen in der weiter oben zitierten Helmert'schen Abhandlung diese Störungen selbst bei 1000 km Randabstand noch einen Betrag von $+4 \times 10^{-3}$ cm/sec^2 erreichen, so sind unter den Festlands-Beobachtungen viele enthalten, bei denen die Steilrand-Störungen einen ansehnlichen Betrag erreicht haben. Da die Störungen bei diesen Stationen nicht berücksichtigt worden sind, so muß der aus ihnen abgeleitete Normalwert der Schwerkraft zu groß ausgefallen sein, und da ferner dieser Normalwert noch um 2 Einheiten der dritten Stelle unter dem endgültig beibehaltenen Wert liegt, kann dieser letztere leicht um 5 bis 7 Einheiten zu groß sein.

Andrerseits sind als Küsten-Stationen nur solche Stationen angesehen worden, die sich in der Nähe des steilen Abfalls der Meeresküste befinden. Hieraus geht zwar nicht deutlich hervor, bis zu welchem Abstand die Stationen als Küstenstationen angesehen wurden, doch dürfte das Mittel der Randabstände dieser Stationen kaum mehr als 30 km betragen haben. Nach der Tabelle der Steilrand-Störungen entspricht diesem Randabstand bei $T = 120$ km eine Korrektion von -44 Einheiten der 3. Stelle. Die Küstenstationen hätten also im Mittel eine Reduktion von $-0{,}044$ cm/sec^2 erfahren müssen. Tatsächlich sind sie nur mit $-0{,}036$ reduziert worden. Das aus ihnen abgeleitete Ergebnis, das um eine Einheit größer als das definitive ist, ist daher um etwa 8 Einheiten zu groß ausgefallen. Auch diese Ueberlegung führt also dazu, daß die Werte der Helmert'schen Normalformel um rund 7×10^{-3} cm/sec^2 zu groß sind.

Es sei noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß das Fehlen von regionalen Störungen bei den küstennahen Stationen der mittleren Linie (s. Tab. 8 S. 32) beweist, daß die Annahme von $T = 120$ km den Verhältnissen an der ostafrikanischen Küste gut entspricht. Um dies noch anschaulicher zu machen, sind die betreffenden Werte in der angehängten Tafel mit dem Küstenabstand a als Abszisse (bis $a = 400$ km) graphisch dargestellt worden. Die Fläche normaler Schwere wurde in der mittleren Höhe der physischen Erdoberfläche angesetzt. Die durch gestrichelte Linien verbundenen Punkte im unteren Teil der Tafel geben die Höhen (H) der Beobachtungsstationen an. Die ausgezogene Linie stellt die Höhenlage (H'') der Fläche normaler Schwere in den verschiedenen Randab-

ständen dar. Die auf diese Fläche reduzierte beobachtete Schwerebeschleunigung g_0^* ist nach der Gleichung auf Seite 1

$$g_0^* = g_0 + 114\ (H^* - H).$$

Die verbleibenden Reste gegen den Normalwert

$$g_0^* - \gamma_0 = g_0 - \gamma_0 + [114\ (H^* - H) - \varDelta G]$$

wurden im oberen Teil der Tafel eingetragen und durch gestrichelte Linien verbunden.

Ferner wurden die Helmert'schen Steilrand-Störungen berechnet und zwar für Stationen der mittleren Linie sowie Daressalam mit ctg ν = 60 und t = 4, für Moçambique mit ctg ν = 25 und t = 3, 5. Als Tiefe der Ausgleichsfläche wurden die vier Annahmen T = 30, 50, 100, 150 km gemacht. Die resultierenden Störungen sind eingetragen und durch ausgezogene Linien verbunden worden.

Der Anblick der Figur lehrt, daß die beobachteten Reste $g_0^* - \gamma_0$ gut durch die Steilrand-Störungen dargestellt werden, wenn T in der Nähe von 100 liegt. Jedenfalls kommen Werte von T über 150 km und unter 75 km nicht in Betracht. Die Annahme T = 30 km würde mit den vorliegenden Beobachtungen nicht vereinbar sein, sodaß die Folgerung Wiecherts, daß in 30 km Tiefe eine leicht flüssige Magmaschicht vorhanden ist, mit meinen Schweremessungen im Widerspruch steht. Es müssen also entweder die Wiechert'schen Rechnungsergebnisse anders gedeutet werden, oder das isostatische Dichteverteilungsgesetz ist anders, als die Pratt'sche Hypothese voraussetzt.

Um aus den Beobachtungen der Pendel-Expedition den wahrscheinlichsten Wert von T abzuleiten, wurden die Bedingungsgleichungen

$$\varDelta G' + \frac{d\,\delta\gamma}{dT}\,\varDelta T = g_0^* - (\gamma_0 + \delta\gamma_{100} + \varDelta G)$$

mit $\varDelta G = -6$ aufgestellt (s. Tabelle 9 zweite Spalte). Hier bedeutet $\varDelta G'$ die Verbesserung von $\varDelta G$ und $\varDelta T$ ist gleich $(T - 100)$. Die Gleichungen entsprechen der Annahme, daß die sichtbaren Massen über und unter der Fläche normaler Schwere ihrem ganzen Betrage nach störende Massen sind. Die Auflösung der Normalgleichungen ergab

$$\varDelta G' = -1 \pm 12 \times 10^{-3}\ \text{cm/sec}^2,\quad T = 103 \pm 75\ \text{km},$$
$$\mu_1 = \pm 19 \times 10^{-3}\ \text{cm/sec}^2.$$

Tabelle 9. Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Tiefe T der Ausgleichsfläche.

Küstennahe Stationen	Bedingungsgleichungen, Gräben nicht kompensiert angenommen			Uebrigbleibende Fehler 10^{-3} cm/sec² v_1	v_2	Bedingungsgleichungen, Gräben isostatisch gelagert angenommen			Uebrigbleibende Fehler 10^{-3} cm/sec² v_3
Moçambique	$1 \cdot \Delta G'$	$+ 0.32 \quad \Delta T$	$= + 20$	+ 20	+ 11	$1 \cdot \Delta G$	$+ 0.32 \quad \Delta T$	$= + 14$	+ 10
Daressalam	1	0.23	− 9	− 8	− 14	1	0.23	− 15	− 17
Pangani	1	0.20	− 51	− 50					
Kwamkoro	1	0.17	+ 26	+ 27					
Wilhelmstal	1	0.16	0	+ 1	− 2	1	0.25	+ 6	+ 3
Kihuiro	1	0.14	− 1	0	− 2	1	0.08	+ 9	+ 8
Maji ja njuu	1	0.12	+ 1	+ 2	0	1	0.14	− 3	− 4
Rufu	1	0.11	− 13	− 12	− 13	1	0.05	− 1	− 1
Donjo Benne	1	0.10	+ 11	+ 12	+ 11	1	0.15	− 1	− 2
Moschi	1	0.10	− 1	0	− 1	1	0.10	+ 4	+ 3
Ssigirari	1	0.08	+ 5	+ 6	+ 6	1	0.08	− 1	− 2
Matabatú	1	0.07	− 3	− 2	− 2				
Umbugwe	1	0.06	+ 3	+ 4	+ 5	1	− 0.01	+ 1	+ 2

Die übrigbleibenden Fehler v_1 siehe in Tabelle 9. Um den Einfluß der sehr starken lokalen Störungen von Kwamkoro und Pangani auf dieses Resultat festzustellen, wurde die Ausgleichung ohne diese beiden Stationen wiederholt und gefunden

$$\Delta G' = -4 \pm 6 \times 10^{-3}\ \text{cm/sec}^2, \quad T = 141 \pm 36\ \text{km},$$
$$\mu_1 = \pm 9 \times 10^{-3}\ \text{cm/sec}^2.$$

Die übrigbleibenden Fehler siehe in Tabelle 9 unter v_2. Dieser letztere Wert von $\Delta G'$ erscheint zu groß, da die rechten Seiten der Gleichungen bereits die Korrektion $\Delta G = -6$ enthalten. Die Gesamtverbesserung $\Delta G + \Delta G'$ würde demnach -10 Einheiten der 3. Stelle werden. Eine so starke Verkleinerung des Haupt-Koëffizienten der Helmert'schen Normalformel ist wohl ausgeschlossen, sodaß $\Delta G'$ höchstens 1 bis 2 Einheiten betragen kann. Die Tiefe der Ausgleichsfläche würde damit werden

$$T = 122\ \text{km} \quad \text{bis} \quad T = 128\ \text{km}.$$

Jedenfalls entspricht meinen Beobachtungen eine Ausgleichsfläche, die zwischen 100 km und 140 km liegt, was mit den sonstigen Bestimmungen dieser Größe gut übereinstimmt und sie bestätigt.

In Tabelle 6 (S. 23) hatten sich gerade die küstennahen Gräben als vereinbar mit isostatischer Lagerung erwiesen. Deshalb wurden zuletzt auch noch diese Gräben mit den übrigen küstennahen Stationen zusammen zur Bestimmung von T herangezogen. Die Bedingungsgleichungen nehmen dann die Form an

$$g_0 = \gamma_0 + \Delta G + \delta\gamma_{100} + \frac{d\delta\gamma}{dT}\,\Delta T + \delta g_{100} + \frac{d\delta g}{dT}\,\Delta T$$

oder

$$\Delta G + \left(\frac{d\delta\gamma}{dT} + \frac{d\delta g}{dT}\right)\Delta T = (g_0 - \gamma_0) - (\delta\gamma_{100} + \delta g_{100}).$$

Diese Gleichungen sind ebenfalls in Tabelle 9 vorletzte Spalte aufgenommen. Dabei mußten jedoch die Stationen der nördlichen Bruchstufe und des Pemba-Grabens (Matabatú, Kwamkoro, Pangani) von vornherein ausgeschlossen werden, weil bei diesen Gräben nach Tabelle 6 die Voraussetzung isostatischer Lagerung nicht vorhanden ist.

Die Auflösung der Normalgleichungen ergab

$$\varDelta G = 0 \pm 4 \times 10^{-3}\ \mathrm{cm/sec^2}, \quad T = 112 \pm 26\ \mathrm{km},$$
$$\mu_1 = \pm 8 \times 10^{-3}\ \mathrm{cm/sec^2}.$$

Auffällig ist bei dieser Auflösung die verhältnismäßige Kleinheit der übrigbleibenden Fehler v_3 (s. Tab. 9) und dementsprechend auch der mittleren Fehler der Unbekannten. Dies läßt es entgegen der auf Seite 24 und 25 gezogenen Schlußfolgerung fast wahrscheinlich erscheinen, daß bei der südlichen ostafrikanischen Bruchstufe, dem oberen Pangani- und dem Mkomasi-Graben isostatische Massenlagerung vorhanden ist.

Bei allen Berechnungsweisen führen die Beobachtungen der Pendel-Expedition zu einem Wert von T, der in der Nähe von 120 km liegt.

Bei den Stationen Kwamkoro und Pangani zeigt sich die bereits vielfach konstatierte Erscheinung, daß ein Schwereüberschuß durch einen seitlich davon liegenden Defekt kompensiert ist, besonders auffällig. Ost-Usambara ist die Kompensation für den Pemba-Graben.

Bei der definitiven Bearbeitung der Ergebnisse der Pendel-Expedition werden die Gelände-Reduktionen zu berücksichtigen und die hier nur überschläglich oder nach Näherungsformeln bewirkten Rechnungen genau und nach strengen Formeln durchzuführen sein.

Beiträge zu Lord Rayleigh's Theorie der Gitterbeugung.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 14. Januar 1911.

Lord Rayleigh hat vor einigen Jahren eine Theorie der Gitterbeugung entwickelt [1]), die direkt an die Differentialgleichungen der Elektrodynamik anknüpft und das Huyghenssche Prinzip nur soweit anwendet, als es zur Ableitung der Richtungen der gebeugten Wellen notwendig ist. Leider sind die beiden von ihm mehr oder weniger eingehend behandelten Fälle des absolut reflektierenden und absolut durchsichtigen Gitters zu einer Prüfung durch die Beobachtung nicht sehr geeignet. Die wirklich herstellbaren Metallgitter entsprechen den Voraussetzungen der Theorie nur wenig und Glasgitter von hinreichender Feinheit scheinen kaum mehr erhältlich zu sein, seitdem Rowland die Vorzüge von Gitterteilungen auf Platten von Spiegelmetall kennen gelehrt hat.

Da in dem hiesigen Institut Beobachtungen über die Schwingungsform des an Rowland-Gittern gebeugten Lichtes vorgenommen werden, und da die Resultate mit der Rayleighschen Theorie des absolut reflektierenden Metallgitters zum Teil kaum qualitativ übereinstimmen, so schien es mir angemessen, nach den von Lord Rayleigh gegebenen Direktiven die Theorie der Beugung für ein partiell reflektierendes Metallgitter zu entwickeln. Die Resultate sind nachstehend zusammengestellt.

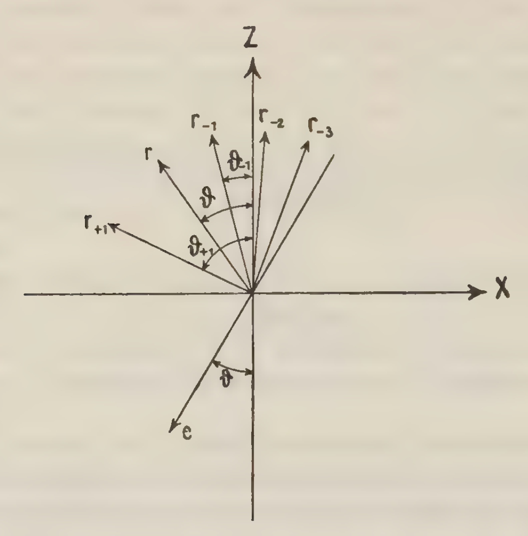
Ich habe mich in der Darstellung im Wesentlichen an die Lord Rayleighsche Arbeit angeschlossen. Nur in einem Punkt

---

1) Lord Rayleigh, Royal Soc. Proc. 79, p. 399, 1907.

erschien mir eine Abweichung angemessen, um ein gewisses prinzipiell wichtiges Resultat, das bei Lord Rayleigh nicht so her vortritt, anschaulich zu machen.

1) Lord Rayleigh wählt die z-Achse zur Normalen auf der Gitterebene und legt die y-Achse parallel den Gitterfurchen; die



xz-Ebene ist also die Einfallsebene (S. Figur). Die Oberfläche des Gitters denkt er als gegeben durch

$$z = \zeta$$

wobei

1) $$\zeta = \mathrm{S}\,\zeta_k e^{ikpx}$$

und die Summe S hier wie später in allen ähnlichen Fällen über alle k von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt ist, mit Ausnahme von $k=0$. p ist $= 2\pi/\varepsilon$, wobei ε die Periode der Gitterteilung bezeichnet. ζ wird als klein neben der Wellenlänge des Lichtes angenommen, während ε beliebig bleibt. Lord Rayleigh setzt

$$\zeta_k = \tfrac{1}{2}(c_k - i s_k), \quad \zeta_{-k} = \tfrac{1}{2}(c_k + i s_k), \quad s_1 = 0.$$

Was die aus einer einfallenden entstehenden Wellen angeht, so benutzt Lord Rayleigh die Resultate der elementaren Theorie bezüglich der Fortschreitungsrichtung, die sich übrigens auch mit Hilfe von (1) aus den Grenzbedingungen der folgenden Theorie gewinnen lassen. Für den Fall eines partiell reflektierenden Metallgitters nehmen dieselben folgende Form an.

Gelten für die einfallende Welle (e) Lösungen von dem Gesetz

$$e^{i\mu(\omega t + (\alpha x + \gamma z))}$$

wobei $\mu = 2\pi/\lambda$ die Wellenlängenfrequenz, ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet und $\alpha = \sin\vartheta$, $\gamma = \cos\vartheta$ den Einfallswinkel ϑ enthalten, so haben für die regelmäßig reflektierte Welle (r) die Lösungen die Form

$$e^{i\mu(\omega t + (\alpha x - \gamma z))}$$

und für die reflektiert gebeugten (r_h)

$$e^{i\mu(\omega t + (\alpha_h x - \gamma_h z))}$$

wobei

2) $$\alpha_h = \alpha + h\frac{\lambda}{\varepsilon} = \alpha + hl,$$

und h alle Werte mit Ausnahme von Null annimmt welche mit der Bedingung $-1 < \alpha_h < +1$ verträglich sind. Zwischen den Parametern p, μ, l, ε besteht die Beziehung

3) $$p = \mu l = \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$

Für die regelmäßig gebrochene Welle gelten Lösungen von der Form

$$e^{i\mu(\omega t + (\alpha x + \nu z))},$$

wobei

4) $$\nu = \sqrt{\mathfrak{n}^2 - \alpha^2},$$

unter $\mathfrak{n}$ den komplexen Brechungsindex verstanden. Für die gebrochenen gebeugten Wellen ist dagegen anzusetzen

$$e^{i\mu(\omega t + (\alpha_h x + \nu_h z))},$$

wobei

5) $$\nu_h = \sqrt{\mathfrak{n}^2 - \alpha_h^2}.$$

Der Faktor $e^{i\mu\omega t}$ kann in diesen Lösungen überall unberücksichtigt bleiben und soll daher von vornherein abgeworfen werden.

Bei der Behandlung unseres Problems benutzen wir, daß sich die parallel und die normal zu den Gitterfurchen polarisierten Wellen mit einem Male erledigen lassen, da die Grenzbedingungen für die parallel den Furchen schwingenden magnetischen und elektrischen Komponenten gleiche Form besitzen, und die in homogenen ebenen Wellen koexistierenden magnetischen und elektrischen Schwingungen in einem durchsichtigen Medium (wo allein Beobachtungen möglich sind) durch die Differentialgleichungen direkt gekoppelt sind. Handelt es sich um die Fortpflanzung im leeren

Raum (was hier allein interessiert) und bezeichnen wir die (komplexen) magnetischen Komponenten parallel und normal zu den Furchen mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{N}$, die elektrischen mit $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{S}$, die Fortpflanzungsrichtung mit r, so gilt falls die Folgen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}$, r resp. $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{Y}$, r derjenigen von x, y, z entsprechen

$$\mathfrak{N} = -\mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{B} = +\mathfrak{S}. \tag{6}$$

Die einfallende Welle soll weiterhin durch den Index e, die reflektierte inklusive der reflektiert gebeugten durch r, die eindringende inklusive der gebrochen gebeugten durch d bezeichnet werden. Die Grenzbedingungen für $z = \zeta$ lauten dann, da

$$\begin{aligned}\frac{\overline{d\psi}}{dn} &= \frac{\overline{d\psi}}{dz}\cos(n,z) + \frac{\overline{d\psi}}{dx}\cos(n,x)\\ &= \left(\frac{\overline{d\psi}}{dz} + \frac{\overline{d\psi}}{dx}\operatorname{tg}(n,z)\right)\cos(n,z)\\ &= \left(\frac{\overline{d\psi}}{dz} - \frac{\overline{d\psi}}{dx}\frac{d\zeta}{dx}\right)\cos(n,z):\end{aligned}$$

$$\overline{\mathfrak{B}}_e + \overline{\mathfrak{B}}_r = \overline{\mathfrak{B}}_d,\quad \mathfrak{n}^2\left(\frac{\overline{\partial(\mathfrak{B}_e+\mathfrak{B}_r)}}{\partial z} - \frac{\overline{\partial(\mathfrak{B}_e+\mathfrak{B}_r)}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dx}\right) = \frac{\overline{\partial\mathfrak{B}_d}}{\partial z} - \frac{\overline{\partial\mathfrak{B}_d}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dx}, \tag{7}$$

$$\overline{\mathfrak{Y}}_e + \overline{\mathfrak{Y}}_r = \overline{\mathfrak{Y}}_d,\quad \left(\frac{\overline{\partial(\mathfrak{Y}_e+\mathfrak{Y}_r)}}{\partial z} - \frac{\overline{\partial(\mathfrak{Y}_e+\mathfrak{Y}_r)}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dx}\right) = \frac{\overline{\partial\mathfrak{Y}_d}}{\partial z} - \frac{\overline{\partial\mathfrak{Y}_d}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dx}. \tag{8}$$

Wenn also das Problem für die $\mathfrak{B}$-Komponente gelöst ist, ergibt sich die für die $\mathfrak{Y}$-Komponente gültige Formel durch bloße Vertauschung des explizit vorkommenden komplexen Brechungsindex $\mathfrak{n}$ mit Eins. Formel 6) liefert die entsprechenden Komponenten $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S}$. Ist das erste Medium nicht der leere Raum sondern ein durchsichtiges Medium von dem (reellen) Brechungsindex n_0, so tritt anstelle von 6) nur $\mathfrak{N} = -n_0\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{B} = +n_0\mathfrak{S}$; in 7) wird $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{n}/n_0$ vertauscht.

2) Wir beginnen mit der Behandlung der $\mathfrak{B}$-Komponente und setzen dazu

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_e &= \mathfrak{E}e^{i\mu(\alpha x + \gamma z)},\\ \mathfrak{B}_r &= \mathfrak{R}e^{i\mu(\alpha x - \gamma z)} + (\mathrm{S})\,\mathfrak{R}_h e^{i\mu(\alpha_h x - \gamma_h z)},\\ \mathfrak{B}_d &= \mathfrak{D}e^{i\mu(\alpha x + \nu z)} + (\mathrm{S})\,\mathfrak{D}_h e^{i\mu(\alpha_h x + \nu_h z)},\end{aligned} \tag{9}$$

wobei die Summen (S) ähnlich wie die S in 1) über positive und negative h mit Ausnahme von Null, *aber nur über die mit 2) verträglichen reellen Beugungswinkel* zu nehmen sind.

Die Unterscheidung der Summen S und (S) ist für das Folgende sehr wesentlich und bedingt jenes prinzipiell wichtige Resultat, auf das im Eingang hingewiesen ist. Führen wir die Werte (9) zusammen mit (1) in die Bedingungen (7) ein, so fällt nach (2) je der gemeinsame Faktor $e^{i\mu\alpha x}$ aus den Formeln heraus.

Wir entwickeln die Bedingungen bis auf Glieder zweiter Ordnung inbezug auf ζ inklusive, wobei wir im voraus berücksichtigen, daß die $\mathfrak{R}_h$ und $\mathfrak{D}_h$ sich von mindestens erster Ordnung ergeben. So finden wir:

10)
$$\begin{aligned}&\mathfrak{E}(1+i\mu\gamma\zeta-\tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta^2)+\mathfrak{R}(1-i\mu\gamma\zeta-\tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta^2)\\ &\qquad+(\mathrm{S})\,\mathfrak{R}_h e^{i\mu h l x}(1-i\mu\gamma_h\zeta)\\ &=\mathfrak{D}(1+i\mu\nu\zeta-\tfrac{1}{2}\mu^2\nu^2\zeta^2)+(\mathrm{S})\,\mathfrak{D}_h e^{i\mu h l x}(1+i\mu\nu_h\zeta),\end{aligned}$$

11)
$$\begin{aligned}&\mathfrak{n}^2[\gamma\mathfrak{E}(1+i\mu\gamma\zeta-\tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta^2)-\gamma\mathfrak{R}(1-i\mu\gamma\zeta-\tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta^2)\\ &-(\mathrm{S})\,\mathfrak{R}_h\gamma_h e^{i\mu h l x}(1-i\mu\gamma_h\zeta)]-[\nu\mathfrak{D}(1+i\mu\nu\zeta-\tfrac{1}{2}\mu^2\nu^2\zeta^2)\\ &\qquad+(\mathrm{S})\,\mathfrak{D}_h\nu_h e^{i\mu h l x}(1+i\mu\nu_h\zeta)]\\ &=\{\mathfrak{n}^2[\alpha\mathfrak{E}(1+i\mu\gamma\zeta)+\alpha\mathfrak{R}(1-i\mu\gamma\zeta)+(\mathrm{S})\,\alpha_h\mathfrak{R}_h e^{i\mu h l x}]\\ &\qquad-[\alpha\mathfrak{D}(1+i\mu\nu\zeta)+(\mathrm{S})\,\alpha_h\mathfrak{D}_h e^{i\mu h l x}]\}\frac{d\zeta}{dx}.\end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung schon der Glieder erster Ordnung in ζ erhält man die Bedingungen der gewöhnlichen Metallreflexion, nämlich ist, falls $\mathfrak{R}=\mathfrak{E}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{D}=\mathfrak{E}\mathfrak{d}$,

12)
$$1+\mathfrak{r}=\mathfrak{d},\quad \mathfrak{n}^2\gamma(1-\mathfrak{r})=\nu\mathfrak{d},$$

also

13)
$$\mathfrak{r}=\frac{\mathfrak{n}^2\gamma-\nu}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu},\qquad \mathfrak{d}=\frac{2\,\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}.$$

Strengere Bedingungen für die regelmäßig reflektierte und gebrochene Amplitude ergeben sich aus (10) und (11) durch Beibehaltung aller der von x unabhängigen Glieder. Setzen wir das konstante Glied in ζ^2 d. h.

14)
$$2\,\mathrm{S}\,\zeta_k\zeta_{-k}=\zeta_0^2$$

und berücksichtigen, daß

15)
$$\mathrm{S}\,k\zeta_k\zeta_{-k}=0 \text{ ist},$$

so ergibt sich dafür

16)
$$\begin{aligned}&(\mathfrak{E}+\mathfrak{R})(1-\tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta_0^2)-i\mu\,(\mathrm{S})\,\mathfrak{R}_h\gamma_h\zeta_{-h}\\ &\quad=\mathfrak{D}(1-\tfrac{1}{2}\mu^2\nu^2\zeta_0^2)+i\mu\,(\mathrm{S})\,\mathfrak{D}_h\nu_h\zeta_{-h},\end{aligned}$$

$$\mathfrak{n}^2[\gamma(\mathfrak{E}-\mathfrak{R})(1-\tfrac{1}{2}\mu^2\gamma^2\zeta_0^2)+i\mu\,(\mathrm{S})\,\mathfrak{R}_h\gamma_h^2\zeta_{-h}]$$

17)
$$-[\nu\mathfrak{D}(1-\tfrac{1}{2}\mu^2\nu^2\zeta_0^2)+i\mu\,(\mathrm{S})\,\mathfrak{D}_h\nu_h^2\zeta_{-h}]$$

$$=-i\mu l\,(\mathrm{S})\,\alpha_h h(\mathfrak{R}_h\mathfrak{n}^2-\mathfrak{D}_h)\zeta_{-h}.$$

Wenn man hier hinein für die $\mathfrak{R}_h$ und $\mathfrak{D}_h$ die Ausdrücke in erster Annäherung setzt, so erhält man die Bedingungen für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ bis zur zweiten Ordnung inklusive.

3) Diese ersten Annäherungen ergeben sich aus (10) und (11), indem man die in $e^{i\mu hlx}$ multiplizierten Glieder erster Ordnung allein verfolgt.

Man erhält so

18)
$$-\mathfrak{R}_h+\mathfrak{D}_h=i\mu\zeta_h(\gamma(\mathfrak{E}-\mathfrak{R})-\nu\mathfrak{D}),$$

19)
$$\mathfrak{n}^2\gamma_h\mathfrak{R}_h+\nu_h\mathfrak{D}_h=i\mu\zeta_h[\mathfrak{n}^2(\gamma^2-hl\alpha)(\mathfrak{E}+\mathfrak{R})-(\nu^2-hl\alpha)\mathfrak{D}].$$

Hier hinein kann man für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ die ersten Annäherungen (12) resp. (13) setzen und erhält so

20)
$$-\mathfrak{R}_h+\mathfrak{D}_h=i\mu\zeta_h\mathfrak{E}\mathfrak{K},$$
$$\mathfrak{n}^2\gamma_h\mathfrak{R}_h+\nu_h\mathfrak{D}_h=i\mu\zeta_h\mathfrak{E}\mathfrak{H}_h$$

und

21)
$$\mathfrak{K}=\gamma(1-\mathfrak{r})-\nu\mathfrak{d}=\frac{2\nu\gamma(1-\mathfrak{n}^2)}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu},$$
$$\mathfrak{H}_h=\mathfrak{n}^2(1+\mathfrak{r})(\gamma^2-hl\alpha)-\mathfrak{d}(\nu^2-hl\alpha)=\frac{2\mathfrak{n}^2\gamma\alpha\alpha_h(1-\mathfrak{n}^2)}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}.$$

Weiter ergibt sich

22)
$$\mathfrak{R}_h=i\mu\zeta_h\mathfrak{r}_h\mathfrak{E},\qquad \mathfrak{D}_h=i\mu\zeta_h\mathfrak{d}_h\mathfrak{E}$$

und

23)
$$\mathfrak{r}_h=\frac{\mathfrak{H}_h-\nu_h\mathfrak{K}}{\mathfrak{n}^2\gamma_h+\nu_h}=\frac{2\gamma(1-\mathfrak{n}^2)(\mathfrak{n}^2\alpha\alpha_h-\nu\nu_h)}{(\mathfrak{n}^2\gamma_h+\nu_h)(\mathfrak{n}^2\gamma+\nu)},$$
$$\mathfrak{d}_h=\frac{\mathfrak{H}_h+\mathfrak{n}^2\gamma_h\mathfrak{K}}{\mathfrak{n}^2\gamma_h+\nu_h}=\frac{2\gamma(1-\mathfrak{n}\ )\mathfrak{n}^2(\alpha\alpha_h+\nu\gamma_h)}{(\mathfrak{n}^2\gamma_h+\nu_h)(\mathfrak{n}^2\gamma+\nu)}.$$

Setzt man diese Werte in (16) und (17) ein, so werden die (S) sämtlich mit $\mathfrak{E}$ proportional und die darein multiplizierten Glieder zweiter Ordnung. Hieraus folgert man leicht, daß in den mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$ multiplizierten Klammern die ζ_0^2 enthaltenden Terme fortzulassen sind, weil sie in dem uns allein interessierenden $\mathfrak{R}$ nur Glieder vierter Ordnung bewirken.

Sonach nehmen die bezüglichen Formeln die folgende Gestalt an

24) $$\mathfrak{E}+\mathfrak{R}+\mu^2\mathfrak{E}\,(S)\,\zeta_h\zeta_{-h}(\mathfrak{r}_h\gamma_h+\nu_h\mathfrak{d}_h) = \mathfrak{D}$$

25) $$\mathfrak{n}^2\gamma(\mathfrak{E}-\mathfrak{R})-\mu^2\mathfrak{E}\,(S)\,\zeta_h\zeta_{-h}(\mathfrak{n}^2\mathfrak{r}_h\gamma_h^2-\mathfrak{d}_h\nu_h^2) - \mu^2\mathfrak{E}\,l\,(S)\,\alpha_h h\,\zeta_h\zeta_{-h}(\mathfrak{n}^2\mathfrak{r}_h-\mathfrak{d}_h) = \nu\mathfrak{D},$$

und die Elimination von $\mathfrak{D}$ liefert schließlich, bei Benutzung der aus (2) folgenden Beziehung

$$\gamma_h^2+h\,l\,\alpha_h = \gamma^2-h\,l\,\alpha,$$

die definitive Formel

26) $$\mathfrak{E}\left\{(\mathfrak{n}^2\gamma-\nu)-\mu^2\,(S)\,\zeta_h\zeta_{-h}(\mathfrak{r}_h[\mathfrak{n}^2(\gamma^2-h\,l\,\alpha)+\nu\gamma_h] - \mathfrak{d}_h[\nu_h(\nu_h-\nu)+h\,l\,\alpha_h])\right\} = \mathfrak{R}(\mathfrak{n}^2\gamma+\nu).$$

Der Faktor von $\zeta_h\zeta_{-h}$ läßt sich hierin auch schreiben

$$\mathfrak{r}_h(\mathfrak{n}^2(1-\alpha\alpha_h)+\nu\gamma_h)-\mathfrak{d}_h(\mathfrak{n}^2-\alpha\alpha_h-\nu\nu_h),$$

womit noch die Ausdrücke (23) für $\mathfrak{r}_h$ und $\mathfrak{d}_h$ zu kombinieren sind. Dies gibt dann

$$= \frac{2\gamma(1-\mathfrak{n}^2)}{(\mathfrak{n}^2\gamma+\nu)(\mathfrak{n}^2\gamma_h+\nu_h)}\,[2\alpha\alpha_h\nu\mathfrak{n}^2(\nu_h+\gamma_h)-\alpha^2\alpha_h^2\mathfrak{n}^2(\mathfrak{n}^2-1) + \nu(\gamma_h\mathfrak{n}^2(\mathfrak{n}^2-\nu\nu_h)-\nu_h(\mathfrak{n}^2+\nu\gamma_h))].$$

4) Für die $\mathfrak{Y}$-Komponenten benutzen wir den in (9) eingeführten Ansatz für die $\mathfrak{B}$-Komponenten, unterscheiden nur die Amplituden $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$ durch obere Indices (′) und zeichnen in gleicher Weise die dem neuen Problem entsprechenden $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{d}$ aus.

Wir erhalten so statt (12) in erster Näherung falls $\mathfrak{D}' = \mathfrak{E}'\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{R}' = \mathfrak{E}'\mathfrak{r}'$,

27) $$1+\mathfrak{r}' = \mathfrak{d}',\quad \gamma(1-\mathfrak{r}') = \nu\mathfrak{d}',$$
also $$\mathfrak{r}' = \frac{\gamma-\nu}{\gamma+\nu},\quad \mathfrak{d}' = \frac{2\gamma}{\gamma+\nu};$$

ferner liefert (21) bis (23)

28) $$\mathfrak{K}' = \gamma(1-\mathfrak{r}')-\nu\mathfrak{d}' = 0,$$
$$\mathfrak{H}_h' = (1+\mathfrak{r}')(\gamma^2-h\,l\,\alpha)-\mathfrak{d}'(\nu^2-h\,l\,\alpha) = 2\gamma(\gamma-\nu),$$

29) $$\mathfrak{R}_h' = i\mu\zeta_h\mathfrak{r}_h'\mathfrak{E}',\quad \mathfrak{D}_h' = i\mu\zeta_h\mathfrak{d}_h'\mathfrak{E}',$$

30) $$\mathfrak{r}_h' = \mathfrak{d}_h' = \frac{\mathfrak{H}_h'}{\gamma_h+\nu_h} = \frac{2\gamma(\gamma-\nu)}{\gamma_h+\nu_h},$$

und aus (26) wird

$$31)\quad \mathfrak{E}[(\gamma-\nu)-\mu^2(\mathrm{S})\,\zeta_h\zeta_{-h}(\mathfrak{r}_h'[\gamma^2-hl\alpha+\nu\gamma_h]-\mathfrak{d}_h'[\nu_h(\nu_h-\nu)+hl\alpha_h])] = \mathfrak{R}'(\gamma+\nu).$$

Der Faktor von $\zeta_h\zeta_{-h}$ wird hier wegen (30) sehr einfach

$$\mathfrak{r}_h'(1-\alpha\alpha_h+\nu\gamma_h)-\mathfrak{d}_h'(\mathfrak{n}^2-\alpha\alpha_h-\nu\nu_h) = \frac{2\gamma(\gamma-\nu)}{\gamma_h+\nu_h}(1-\mathfrak{n}^2+\nu(\gamma_h+\nu_h)).$$

Die Formeln (26) und (31) bestimmen mit (6) zusammen sowohl die elektrischen als die magnetischen Komponenten parallel und normal zu den Gitterfurchen in der direkt reflektierten Welle bis auf Glieder zweiter Ordnung inklusive. Die Resultate sind ziemlich kompliziert.

5) Bei der immerhin nicht bedeutenden Genauigkeit einerseits der Grundlagen der Theorie, wie andrerseits der zur Prüfung möglichen Beobachtungen kann man in praxi unbedenklich jene auf Drude zurückgehende Annäherung einführen, bei der Eins als klein neben mod($\mathfrak{n}^2$) betrachtet und daneben vernachlässigt wird. Es kommt dies nach (4) und (5) darauf hinaus, daß der Regel nach, d. h. soweit nicht die Größenordnung der die ν und ν_h enthaltenden Glieder ausnahmsweise eine weitergehende Annähernng fordert,

$$\nu = \nu_h = \mathfrak{n}$$

gesetzt werden darf.

In dieser Genauigkeitsgrenze gilt dann nach (13)

$$32)\quad \mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{n}\gamma-1}{\mathfrak{n}\gamma+1}, \quad \mathfrak{d} = \frac{2\mathfrak{n}\gamma}{\mathfrak{n}\gamma+1},$$

ferner nach (21) und (23)

$$33)\quad \mathfrak{R} = \frac{-2\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}\gamma+1}, \quad \mathfrak{H}_h = \frac{-2\mathfrak{n}^3\gamma\alpha\alpha_h}{\mathfrak{n}\gamma+1} = \mathfrak{n}\alpha\alpha_h\mathfrak{R},$$

$$34)\quad \mathfrak{r}_h = \frac{2\mathfrak{n}^2\gamma(1-\alpha\alpha_h)}{(\mathfrak{n}\gamma+1)(\mathfrak{n}\gamma_h+1)}, \quad \mathfrak{d}_h = \frac{-2\mathfrak{n}^2\gamma(\mathfrak{n}\gamma_h+\alpha\alpha_h)}{(\mathfrak{n}\gamma+1)(\mathfrak{n}\gamma_h+1)}.$$

Endlich wird aus (26)

$$35)\quad \mathfrak{E}[(\mathfrak{n}\gamma-1)-\frac{2\mu^2\gamma\mathfrak{n}^2}{\mathfrak{n}\gamma+1}(\mathrm{S})\frac{\zeta_h\zeta_{-h}}{\mathfrak{n}\gamma_h+1}[\mathfrak{n}(1-\alpha\alpha_h)^2 + \gamma_h(1-2\alpha\alpha_h-\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\alpha_h^2))] = \mathfrak{R}(\mathfrak{n}\gamma+1).$$

Um den Übergang zu dem vollkommen reflektierenden Gitter zu

machen hat man nur $\mathfrak{n}$ unendlich werden zu lassen. Dann ergibt sich

$$\mathfrak{r}_h = \frac{2(1-\alpha\alpha_h)}{\gamma_h}, \quad \mathfrak{d}_h = -2\mathfrak{n},$$

36)

$$\mathfrak{E}\left[\gamma - 2\mu^2 (S)\, \xi_h \xi_{-h} \frac{(1-\alpha\alpha_h)^2}{\gamma_h}\right] = \mathfrak{R}\gamma,$$

was wegen $1-\alpha\alpha_h = \gamma^2 - hl\alpha$ mit der Formel (56) von Lord Rayleigh übereinstimmt.

Ferner resultiert aus (27) bis (30)

37) $$\mathfrak{r}' = \frac{\gamma-\mathfrak{n}}{\gamma+\mathfrak{n}}, \quad \mathfrak{d}' = \frac{2\gamma}{\gamma+\mathfrak{n}},$$

38) $$\mathfrak{K}' = 0, \quad \mathfrak{H}'_h = 2\gamma(\gamma-\mathfrak{n}),$$

39) $$\mathfrak{r}'_h = \frac{2\gamma(\gamma-\mathfrak{n})}{\gamma_h+\mathfrak{n}} = \mathfrak{d}'_h$$

und (31) liefert

40) $$\mathfrak{E}'(\gamma-\mathfrak{n})\left[1 - 2\mu^2\gamma\, (S)\, \xi_h \xi_{-h} \frac{(\mathfrak{n}\gamma_h + \frac{1}{2}(\gamma^2+\gamma_h^2))}{\gamma_h+\mathfrak{n}}\right] = \mathfrak{R}'(\gamma+\mathfrak{n}).$$

Für $\mathfrak{n} = \infty$ folgt hieraus $\mathfrak{r}'_h = \mathfrak{d}'_h = -2\gamma$ und

41) $$-\mathfrak{E}'[1 - 2\mu^2\gamma\, (S)\, \xi_h \xi_{-h} \gamma_h] = \mathfrak{R}'$$

in Übereinstimmung mit der Formel (15) von Lord Rayleigh.

Der Ausdruck (36) für $\mathfrak{R}$ bei vollkommener Reflexion hat die Eigentümlichkeit, unendlich zu werden, sowie eines der γ_h verschwindet, eines der reflektierten Beugungsbilder also tangential austritt. Für einen solchen Fall versagt, wie schon Lord Rayleigh hervorhebt, die Methode. Der Ausdruck (35) für Metallreflexion bietet eine solche Schwierigkeit nicht. Dagegen liefert er, wenn ein $\gamma_h = 0$, für den Einfluß der Beugung auf die regelmäßig reflektierte Welle wegen der Größe von mod($\mathfrak{n}$) nahezu das Maximum, und man wird daher Beobachtungen zur Prüfung der Theorie passend bei solchen Einfallswinkeln anstellen, für die eines der Beugungsbilder streifend austritt. Bei den gewöhnlichen Rowland-Gittern und Na-Licht ist dies für das Spektrum 2. Ordnung bei $\vartheta = 19^\circ$, für dasjenige 1. Ordnung bei $\vartheta = 41^\circ$ erfüllt.

Der Beobachtung zugänglich ist natürlich die Elliptizität der reflektierten Schwingung, die von $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}'$ abhängt, außerdem aber

vielleicht auch die Differenz in der absoluten Verzögerung der auf einer nicht geteilten und einer geteilten Metallfläche reflektierten Welle, welche direkt mit der (S) in (35) zusammenhängt. Ein Mittel hierzu bieten Newtonsche Ringe, erzeugt durch eine Linse, die auf die Grenze zwischen geteilter und ungeteilter Fläche aufgelegt wird.

Ist von den γ_h eines, $\gamma_k = 0$ also $\alpha_k = \pm 1$, so wird die Formel (35), da das Summenglied k alle anderen überwiegt, zu

$$\mathfrak{E}\left[(\mathfrak{n}\gamma - 1) - \frac{2\mu^2\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}\gamma+1}(1 \mp \alpha)^2 \zeta_k \zeta_{-k}\right] = \mathfrak{R}(\mathfrak{n}\gamma + 1)$$

Das für die Wirkung maßgebende Glied ist natürlich zweiter Ordnung in den ζ, aber durch den Faktor $\mathfrak{n}$ immerhin vielleicht merklich, namentlich wenn $\mathrm{mod}(\mathfrak{n}\gamma - 1)$ klein ist.

6) Um Ausdrücke für die Amplituden $\mathfrak{R}_k$ und $\mathfrak{D}_k$ der gebeugten Wellen zu erhalten, die bis auf zweite Ordnung inklusive anwendbar sind, hat man die in (10) und (11) auftretenden Faktoren von $e^{i\mu k l x}$ bis zu der betreffenden Genauigkeit zu entwickeln.

Hierzu mag abkürzend die Bezeichnung

$$\sum_k \varphi_h \psi_g$$

für die Summe derjenigen Glieder $\varphi_h \psi_g$ eingeführt werden, für welche

$$h + g = k$$

ist. Wenn zugleich die h nur den reellen Beugungsbildern entsprechen, sei das Symbol $(\sum_k)$ gewählt. Der Unterschied zwischen den Summen $\sum$ und $(\sum)$ entspricht genau dem zwischen den Summen S und (S) auf S. 44 erörterten und ist ähnlich bedeutungsvoll.

Der Faktor von $e^{i\mu k l x}$ in (10) und (11) lautet dann folgendermaßen

$$\begin{aligned}\text{42)}\quad & i\mu[(\mathfrak{E} - \mathfrak{R})\gamma - \mathfrak{D}\nu]\zeta_k - \tfrac{1}{2}\mu^2[(\mathfrak{E} + \mathfrak{R})\gamma^2 - \mathfrak{D}\nu^2]\sum_k \zeta_h \zeta_g \\ & + \mathfrak{R}_k - \mathfrak{D}_k - i\mu\,(\textstyle\sum_k)(\mathfrak{R}_h\gamma_h + \mathfrak{D}_h\nu_h)\zeta_g = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{43)}\quad & i\mu[(\mathfrak{E} + \mathfrak{R})\gamma^2\mathfrak{n}^2 - \mathfrak{D}\nu^2]\zeta_k - \tfrac{1}{2}\mu^2[(\mathfrak{E} - \mathfrak{R})\mathfrak{n}^2\gamma^3 - \mathfrak{D}\nu^3]\sum_k \zeta_h \zeta_g \\ & - \mathfrak{R}_k\mathfrak{n}^2\gamma_k - \mathfrak{D}_k\nu_k + i\mu\,(\textstyle\sum_k)(\mathfrak{R}_h\gamma_h^2\mathfrak{n}^2 - \mathfrak{D}_h\nu_h^2)\zeta_g \\ & = i\mu\alpha l k[(\mathfrak{E} + \mathfrak{R})\mathfrak{n}^2 - \mathfrak{D}]\zeta_k - \mu^2\alpha l[(\mathfrak{E} - \mathfrak{R})\mathfrak{n}^2\gamma - \mathfrak{D}\nu]\sum_k \zeta_h\zeta_g g \\ & + i\mu l\,(\textstyle\sum_k)\alpha_h(\mathfrak{R}_h\mathfrak{n}^2 - \mathfrak{D}_h)\zeta_g g.\end{aligned}$$

Hierbei ist die Summe Σ mit Wiederholung zu nehmen.

In diesen Formeln sind in den mit ζ_k, resp. $\sum \zeta_h \zeta_g$ multiplizierten Gliedern die Werte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ bis erster, resp. 0ter Ordnung genau einzuführen. Da nun in den bis zweiter Ordnung genauen Ausdrücken (26) und (31) erste Ordnung nicht auftritt, so genügen in beiden Fällen die Werte (12) und (13). Ferner sind für $\mathfrak{R}_h$ und $\mathfrak{D}_h$ in den mit ζ_g multiplizierten Klammern die Werte erster Annäherung aus (22) und (29) zu benutzen.

Man erhält auf diese Weise

$$44)\quad -\mathfrak{R}_k+\mathfrak{D}_k = \mathfrak{E}\Big\{\frac{2i\mu\nu\gamma}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}(1-\mathfrak{n}^2)\zeta_k - \frac{2\mu^2\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}(\gamma^2-\nu^2)\tfrac{1}{2}\sum_k \zeta_h\zeta_g + \mu^2(\sum_k)(\mathfrak{r}_h\gamma_h+\mathfrak{d}_h\nu_h)\zeta_h\zeta_g\Big\},$$

$$45)\quad \mathfrak{R}_k\mathfrak{n}^2\gamma_k+\mathfrak{D}_k\nu_k = \mathfrak{E}\Big\{\frac{2i\mu\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}(1-\mathfrak{n}^2)\alpha\alpha_k\zeta_k - \frac{2\mu^2\mathfrak{n}^2\gamma\nu}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}(\gamma^2-\nu^2)\tfrac{1}{2}\sum_k \zeta_h\zeta_g - \mu^2(\sum_k)[\mathfrak{r}_h\mathfrak{n}^2(\gamma_h^2-\alpha_h lg)-\mathfrak{d}_h(\nu_h^2-\alpha_h lg)]\zeta_h\zeta_g\Big\},$$

und bei Vertauschung von $\mathfrak{n}^2$ mit Eins gemäß S. 44.

$$46)\quad -\mathfrak{R}_k'+\mathfrak{D}_k' = \mathfrak{E}\Big\{-\mu^2\gamma(\gamma-\nu)\sum_k \zeta_h\zeta_g+\mu^2(\sum_k)(\mathfrak{r}_h'\gamma_h+\mathfrak{d}_h'\nu_h)\zeta_h\zeta_g\Big\},$$

$$47)\quad \mathfrak{R}_k'\gamma_k+\mathfrak{D}_k'\nu_k = \mathfrak{E}\Big\{2i\mu\gamma(\gamma-\nu)\zeta - \mu^2\gamma\nu(\gamma-\nu)\sum_k \zeta_h\zeta_g - \mu^2(\sum_k)[\mathfrak{r}_h'(\gamma_h^2-\alpha_h lg)-\mathfrak{d}_h'(\nu_h^2-\alpha_h lg)]\zeta_h\zeta_g\Big\}.$$

Mit diesen Formeln sind die Ausdrücke (23) und (30) für $\mathfrak{r}_h$, $\mathfrak{d}_h$, $\mathfrak{r}_h'$, $\mathfrak{d}_h'$ zu kombinieren. Da $\mathfrak{r}_h' = \mathfrak{d}_h'$ ist, so nehmen die in (46) und (47) enthaltenen Summen sehr einfache Form an.

Zu beachten ist, daß

$$\gamma_h^2-\alpha_h gl = 1-\alpha_h(\alpha_h+gl),\quad \nu_h^2-\alpha_h lg = \mathfrak{n}^2-\alpha_h(\alpha_h+gl)$$

ist und $g = k-h$, $\alpha_k = \alpha+kl$; hieraus folgt daß

$$\gamma_h^2-\alpha_h gl = 1-\alpha_h\alpha_k,\quad \nu_h^2-\alpha_h lg = \mathfrak{n}^2-\alpha_h\alpha_k.$$

7) In der Annäherung aus § 5, die Eins neben $\mathfrak{n}^2$ vernachlässigt und demgemäß (im Allgemeinen) $\nu = \nu_h = \mathfrak{n}$ nimmt, wird nach (34) und (39)

$$\mathfrak{r}_h = \frac{2\gamma\mathfrak{n}^2(1-\alpha\alpha_h)}{(\mathfrak{n}\gamma+1)(\mathfrak{n}\gamma_h+1)},\quad \mathfrak{d}_h = -\frac{2\gamma\mathfrak{n}^2(\alpha\alpha_h+\mathfrak{n}\gamma_h)}{(\mathfrak{n}\gamma+1)(\mathfrak{n}\gamma_h+1)},$$

$$\mathfrak{r}_h' = \mathfrak{d}_h' = \frac{2\gamma(\gamma-\mathfrak{n})}{\gamma_h+\mathfrak{n}};$$

zugleich liefert (44) und 45)

$$48)\quad \begin{aligned} -\mathfrak{R}_k+\mathfrak{D}_k &= \frac{2\mu\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}\gamma+1}\,\mathfrak{E}\Big\{-i\zeta_k+\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{n}\sum_k\zeta_h\zeta_g \\ &\quad +\mu\,(\sum_k)\,[\gamma_h(1-\alpha\alpha_h)-\mathfrak{n}(\mathfrak{n}\gamma_h+\alpha\alpha_h)]\frac{\zeta_h\zeta_g}{\mathfrak{n}\gamma_h+1}\Big\}, \end{aligned}$$

$$49)\quad \begin{aligned} \mathfrak{R}_k\mathfrak{n}\gamma_k+\mathfrak{D}_k &= -\frac{2\mu\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}\gamma+1}\,\mathfrak{E}\Big\{i\alpha\alpha_k\zeta_k-\tfrac{1}{2}\mu\mathfrak{n}\sum\zeta_h\zeta_g \\ &\quad +\mathfrak{n}\mu\,(\sum_k)\,[(\gamma_h^2-gl\alpha_h)(1-\alpha\alpha_h)+(\mathfrak{n}\gamma_h+\alpha\alpha_h)]\frac{\zeta_h\zeta_g}{\mathfrak{n}\gamma_h+1}\Big\}. \end{aligned}$$

Somit

$$50)\quad \begin{aligned} \mathfrak{R}_k &= \frac{2\mu\mathfrak{n}^2\gamma\mathfrak{E}}{(\mathfrak{n}\gamma+1)(\mathfrak{n}\gamma_k+1)}\Big\{+i(1-\alpha\alpha_k)\zeta_k \\ &\quad -\mu\,(\sum_k)\,[\mathfrak{n}(\gamma_h^2-gl\alpha_h)+\gamma_h](1-\alpha\alpha_h)\frac{\zeta_h\zeta_g}{\mathfrak{n}\gamma_h+1}\Big\}. \end{aligned}$$

Beim Übergang zu vollkommener Reflexion, d. h. $\mathfrak{n}=\infty$, resultiert daraus

$$51)\quad \mathfrak{R}_k = \frac{2\mu\mathfrak{E}}{\gamma_k}\Big\{i(1-\alpha\alpha_k)\zeta_k-\mu\,(\sum_k)\,(\gamma_h^2-gl\alpha_h)(1-\alpha\alpha_h)\frac{\zeta_h\zeta_g}{\gamma_h}\Big\},$$

wobei auch

$$1-\alpha\alpha_k = \gamma^2-kl\alpha = \gamma_k^2+kl\alpha_k,\quad \gamma_h^2-gl\alpha_h = 1-\alpha_h\alpha_k.$$

Analog liefert (46) und (47)

$$52)\quad -\mathfrak{R}_k'+\mathfrak{D}_k' = \mathfrak{E}\mu^2\gamma(\mathfrak{n}-\gamma)\,\{\sum_k\zeta_h\zeta_g-2\,(\sum_k)\,\zeta_h\zeta_g\},$$

$$53)\quad \begin{aligned} \mathfrak{R}_k'\gamma_k+\mathfrak{D}_k'\mathfrak{n} &= -\mathfrak{E}\gamma(\mathfrak{n}-\gamma)\,\{2i\mu\zeta_k-\mu^2\mathfrak{n}\sum_k\zeta_h\zeta_g \\ &\quad +2\mu^2\,(\sum_k)\,(\mathfrak{n}-\gamma_h)\zeta_h\zeta_g\}, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$54)\quad \mathfrak{R}_k' = -2\mathfrak{E}\frac{\gamma(\mathfrak{n}-\gamma)}{(\mathfrak{n}+\gamma_k)}\,\{i\mu\zeta_k-\mu^2\,(\sum_k)\,\gamma_h\zeta_h\zeta_g\}.$$

Im Fall vollkommener Reflexion gibt dies

$$55)\quad \mathfrak{R}_k' = -2\mathfrak{E}\gamma\,(i\mu\zeta_k-\mu^2\,(\sum_k)\,\gamma_h\zeta_h\zeta_g).$$

Bezüglich des gegenseitigen Verhältnisses der Ausdrücke (50) und (51), (54) und (55) und der daraus fließenden Folgerungen ist auf das am Ende am § 5 Gesagte zu verweisen.

8) Es ist sehr bemerkenswert (und tritt in der Behandlungsart Lord Rayleighs nicht hervor), daß die Ausdrücke für $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}_k$, $\mathfrak{R}_k'$ innerhalb der benutzten Annäherung nur die Summen (S) und $(\sum_k)$

enthalten, deren Gliederzahl sich in einfacher Weise durch die Anzahl der mit Gitterkonstante und Einfallswinkel vereinbaren reellen Beugungsbilder begrenzt. Gleichviel wie die Größenordnung der Glieder in der fundamentalen Entwickelung (1) für das Gitterprofil ist, hat also auf die Erscheinung immer nur eine endliche Anzahl von Gliedern mit niedriger Ordnungszahl Einfluß. Diese Anzahl ist um so kleiner, je kleiner die Anzahl reeller Beugungsbilder ist; für eine Prüfung der Theorie wird man daher die Umstände so wählen, daß man mit einer möglichst kleinen Zahl von Gliedern auskommt. Hieraus folgt für die Beobachtung die wichtige Regel, daß man Gitter mit möglichst enggedrängten Furchen zu benutzen hat.

Im Übrigen ist zu beachten, daß die inbetracht kommenden Ordnungszahlen der reellen Beugungsbilder nicht nur von der Gitterkonstante, sondern auch von dem Einfallswinkel abhängen. Es ergibt sich hieraus, daß die obigen Formeln für die $\mathfrak{R}$, ... bei demselben Gitter mit geändertem Einfallswinkel wesentlich variieren können. Liefert z. B. ein Gitter bei normaler Incidenz ($\vartheta = 0$) beiderseitig zwei reelle Beugungsbilder, so kommt für h in ζ_h das Wertsystem $-2, -1, +1, +2$ in Betracht. Bei wachsendem Einfallswinkel ϑ kann das 2. Bild auf der + Seite imaginär werden und dafür ein 3. auf der − Seite auftreten. Es käme dann das Wertsystem $h = -3, -2, -1, +1$ in Betracht. Bei noch weiter wachsendem ϑ kann auch das 1. Bild der + Seite imaginär werden u. s. f.

Um eine Vorstellung davon zu geben, wie sich in einem einfachen Falle die verschiedenen in den Resultaten auftretenden Summen (S) und ($\sum$) gestalten, wollen wir dieselben unter der Annahme entwickeln, daß $h = -2, -1, +1$ sei.

Die Reihen (S) in (35) und (40) fallen unter das Schema

$$(\mathrm{S})\ \zeta_h \varphi_h \zeta_{-h};$$

dieselben würden sich in unserem Falle also auf die Glieder

$$(\mathrm{S}) = \zeta_{-2}\zeta_2\varphi_{-2} + \zeta_{-1}\zeta_{+1}(\varphi_{-1}+\varphi_{+1})$$

reduzieren.

Die Reihen ($\sum$) in (50) und (54) haben die Form

$$(\sum_k)\ \zeta_h \psi_h \zeta_g \qquad \text{wobei } h+g = k;$$

sie kommen für $k = -2, -1, +1$ in Betracht. Wir haben daher

$$(\sum)_{-2} = \zeta_{-1}\,\psi_{-1}\,\zeta_{-1} + \zeta_{+1}\,\psi_{+1}\,\zeta_{-3},$$

$$(\sum)_{-1} = \zeta_{-2}\,\psi_{-2}\,\zeta_{+1} + \zeta_{+1}\,\psi_{+1}\,\zeta_{-2}, \qquad (\sum)_{+1} = \zeta_{-2}\,\psi_{-2}\,\zeta_{+3} + \zeta_{-1}\,\psi_{-1}\,\zeta_{+2}.$$

9) Von den Ausdrücken (35) und (40) für die direkt reflektierten Amplituden wollen wir eine Anwendung machen auf die Erklärung der Einwirkung, welche eine unvollkommene Politur bei der Bestimmung der optischen Konstanten von Metallen übt[1]). Wir wollen uns hierzu die spiegelnde Oberfläche mit einem äußerst feinen Gitter bedeckt denken, dessen Linien normal zu der Einfallsebene stehen. Freilich werden diese Teilungen in Wirklichkeit nicht regelmäßig verlaufen; wir können aber, um qualitative Schlüsse zu ziehen, von der Annahme einer regelmäßigen Teilung ausgehen.

Die Formeln (35) und (40) lassen dann erkennen, daß die gewöhnlichen Gesetze der Metallreflexion gültig bleiben, die Schraffierung also keinen Einfluß hat, wenn der Abstand der Gitterlinien so fein ist, daß alle Beugungsbilder sich imaginär ergeben. Da die Beobachtungen über die Metallkonstanten bei sehr großen Einfallswinkeln angestellt werden, so wird bei wachsender Breite zunächst nur dasjenige Beugungsbild reell werden, das $h = -1$ entspricht und wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß die ihm zugehörige Welle nahezu streifend austritt, also dem Imaginär-werden noch sehr nahe ist. Es bleibt dann in Formel (35) und (40) nur je das Glied mit $h = -1$ übrig und ist α_{-1}, nahe $= -1$, γ_{-1} also nahe $= 0$.

Wir erhalten so, wenn wir $\zeta_{-1}\zeta_{+1} = z^2$ setzen,

$$\text{56)}\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{E}(\mathfrak{n}\gamma - 1)\Big(1 - \frac{2\mu^2\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}^2\gamma^2 - 1}\,z^2(1+\alpha^2)\Big) = \mathfrak{R}(\mathfrak{n}\gamma + 1),\\ &-\mathfrak{E}'(\mathfrak{n} - \gamma)\Big(1 - \frac{\mu^2\gamma^2}{\mathfrak{n}}\,z^2\Big) = \mathfrak{R}'(\mathfrak{n} + \gamma). \end{aligned}$$

Da die Beobachtungen zur Bestimmung optischer Konstanten immer bei großen Einfallswinkeln angestellt werden und es sich nur um qualitative Schlüsse handelt, mag $1 + \alpha$ mit 2 vertauscht und in der zweiten Gleichung $\mu^2\gamma^2 z^2/\mathfrak{n}$ vernachlässigt werden.

Den Quotienten der beiden Formeln schreiben wir

$$\text{57)}\qquad \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}'_0}\Big(1 - \frac{8\mu^2\mathfrak{n}^2\gamma z^2}{\mathfrak{n}^2\gamma^2 - 1}\Big),$$

1) Ueber die im Eingang erwähnten Beobachtungen und ihre Vergleichung mit den erhaltenen Formeln wird an einer anderen Stelle berichtet werden.

wobei $\frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_0'}$ den Wert von $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'}$ bei vollkommener Politur bezeichnet. Dabei ist wegen $\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa)$

$$\frac{\mathfrak{n}^2}{\mathfrak{n}^2\gamma^2 - 1} = \frac{n(1-i\varkappa)}{\gamma^2 - \frac{(1+i\varkappa)^2}{n^2(1+\varkappa^2)^2}} = \frac{a - ib}{c - id} = P - iQ,$$

wobei

$$a = n,\ b = n\varkappa,\ c = \gamma^2 - \frac{1-\varkappa^2}{n^2(1+\varkappa^2)^2},\ d = \frac{2\varkappa}{n^2(1+\varkappa^2)^2}.$$

$$P = \frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ Q = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Nun ist, wenn γ als Kosinus des Haupteinfallswinkels aufgefaßt wird, bei Voraussetzung von Na-Licht

für Silber	$n = 0{,}18,$	$\varkappa = 20{,}0,$	$\gamma = 0{,}25$
Kupfer	$= 0{,}64,$	$= 4{,}0,$	$= 0{,}32$
Stahl	$= 2{,}41,$	$= 1{,}41,$	$= 0{,}22$

und daher

für Silber	$a = 0{,}18,$	$b = 3{,}6,$	$c = 0{,}14,$	$d = 0{,}0077$
Kupfer	$= 0{,}64,$	$= 2{,}6,$	$= 0{,}23,$	$= 0{,}068$
Stahl	$= 2{,}41,$	$= 3{,}4,$	$= 0{,}067,$	$= 0{,}054.$

Man erkennt, daß für alle drei Metalle, trotz der Verschiedenheit ihrer optischen Konstanten, P und Q positiv sind. Schreibt man (57)

58) $$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_0'}(1-(p-iq)$$

so gilt gleiches für p und q.

Nun bestimmt in der Relation

59) $$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \operatorname{tg}\chi e^{i\vartheta}$$

χ das Azimut der wiederhergestellten linearen Polarisation, ϑ die Verzögerung der parallel der Einfallsebene polarisierten Welle gegen die normal polarisierte. Schreibt man in Hinblick auf die Kleinheit von p und q die Formel (58)

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}'} = \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{R}_0'} e^{-(p-iq)}, \text{ resp. } \operatorname{tg}\chi e^{i\vartheta} = \operatorname{tg}\chi_0 e^{-p} \cdot e^{i(\vartheta_0 + q)},$$

so ergibt sich

60) $$\operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\chi_0 e^{-p}, \; \delta = \delta_0 + q.$$

Nach der oben entwickelten Theorie müßte also die Schraffierung der reflektierenden Metallfläche das Azimut χ verkleinern, die Verzögerung δ vergrößern. Das ist in der Tat die Folgerung, die Drude[1]) aus seinen Beobachtungen über den Einfluß des Zustandes der reflektierenden Fläche auf diese Größen zieht.

10) Die allgemeinen Formeln (44) bis (47) sind sehr kompliziert. Für Zwecke nur qualitativer Diskussion werden aber mitunter die Glieder erster Ordnung ausreichen, die wir daher noch etwas näher betrachten wollen. Dieselben lauten für die $\mathfrak{R}_k$ und $\mathfrak{D}_k$

61) $$-\mathfrak{R}_k + \mathfrak{D}_k = \mathfrak{E}\frac{2i\mu\nu\gamma}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}(1-\mathfrak{n}^2)\zeta\,,$$
$$\mathfrak{R}_k \mathfrak{n}^2\gamma_k + \mathfrak{D}_k\nu_k = \mathfrak{E}\frac{2i\mu\mathfrak{n}^2\gamma}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}(1-\mathfrak{n}^2)\alpha\alpha_k\zeta_k,$$

und ergeben

62) $$\mathfrak{R}_k(n^2\gamma_k+\nu_k) = \mathfrak{E}\frac{2i\mu\gamma(1-\mathfrak{n}^2)}{\mathfrak{n}^2\gamma+\nu}(\mathfrak{n}^2\alpha\alpha_k - \nu\nu_k)\zeta_k;$$

dagegen für die $\mathfrak{R}_k'$ und $\mathfrak{D}_k'$,

63) $$-\mathfrak{R}_k' + \mathfrak{D}_k' = 0,$$
$$\mathfrak{R}_k'\gamma_k + \mathfrak{D}_k'\nu_k = \mathfrak{E}\,2i\mu\gamma(\gamma-\nu)\zeta_k,$$

woraus

64) $$\mathfrak{R}_k'(\gamma_k+\nu) = \mathfrak{E}\,2i\mu\gamma(\gamma-\nu)\zeta_k.$$

Die Ausdrücke für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ stimmen in dieser Annäherung mit den durch die gewöhnlichen Gesetze der Reflexion gelieferten überein.

Ist das zweite Medium durchsichtig, so ist $\mathfrak{n}$ reell $= n$ zu setzen. Von Interesse ist der Fall, daß hierbei das zweite Medium optisch dünner ist, als das erste, so daß mehr oder weniger reflektierten Beugungsbildern imaginäre gebrochne Bilder entsprechen. Dies gibt dann eine Beugung in Verbindung mit totaler Reflexion und drückt sich aus durch die Bedingung $\alpha^2 > n^2$ und $\alpha_h^2 > n^2$.

Diejenigen $\nu = \sqrt{n^2-\alpha^2}$ und $\nu_h = \sqrt{n^2-\alpha_h^2}$, für welche dies stattfindet, mögen dann

$$\nu = ir, \quad \nu_h = ir_h, \quad r = \sqrt{\alpha^2-n^2}, \quad r_h = \sqrt{\alpha_h^2-n^2}$$

1) P. Drude, Wied. Ann. 39, p. 498, 1890.

gesetzt werden, wobei die r positiv zu nehmen sind, damit die Schwingungen im zweiten Medium mit wachsendem Abstand von der Grenze abnehmen.

Wir wollen zunächst annehmen, daß das direkt reflektierte und das $k$te gebeugte Bild dieser Bedingung entsprechen. Wir können dann schreiben, da $\gamma - ir = \frac{\gamma^2 + r^2}{\gamma + ir} = \frac{1-n^2}{\gamma + ir}$,

$$\text{65)}\quad \begin{aligned} \mathfrak{R}_k &= \mathfrak{E}\frac{2i\mu\gamma(1-n^2)(n^2\alpha\alpha_k + r r_k)}{(n^2\gamma + ir)(n^2\gamma_k + ir_k)}, \\ \mathfrak{R}'_k &= \mathfrak{E}\frac{2i\mu\gamma(1-n^2)}{(\gamma+ir)(\gamma_k + ir_k)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Schwingungsform im gebeugten Bild

$$\text{66)}\quad \frac{\mathfrak{R}_k}{\mathfrak{R}'_k} = (n^2\alpha\alpha_k + r r_k)\frac{(\gamma+ir)(\gamma_k+ir_k)}{(n^2\gamma+ir)(n^2\gamma_k+ir_k)} = \operatorname{tg}\chi_k\, e^{-i\delta_k},$$

was leicht weiter zu entwickeln ist.

Die Gesetze werden völlig andere, wenn zwar das $k$te Beugungsbild, nicht aber das direkt zurückgeworfene Bild totale Reflexion erleidet. Hier ist ν reell, $\nu_k = i r_k$ und gilt

$$\text{67)}\quad \begin{aligned} \mathfrak{R}_k &= \mathfrak{E}\frac{2i\mu\gamma(1-n^2)}{n^2\gamma+\nu}\frac{(n^2\alpha\alpha_k - i\nu r_k)}{n^2\gamma_k + ir_k} \\ &= \mathfrak{E}\frac{2i\mu\gamma(1-n^2)}{(\gamma+\nu)}\cdot\frac{1}{\gamma_k + ir_k}, \end{aligned}$$

also

$$\text{68)}\quad \frac{\mathfrak{R}_k}{\mathfrak{R}'_k} = \frac{\gamma+\nu}{n^2\gamma+\nu}\cdot\frac{(n^2\alpha\alpha_k - i\nu r_k)(\gamma_k+ir_k)}{n^2\gamma_k + ir_k} = \operatorname{tg}\chi_k\, e^{-i\delta_k}.$$

Ganz analog ist der Fall, daß zwar das direkte, nicht aber das gebeugte Bild totale Reflexion erleidet, also ν_k reell, $\nu = ir$. Es genügt hierauf hinzuweisen.

Göttingen, Neujahr 1911.

Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das optische Verhalten dünnster Metallschichten.

Von

Nadjeschdá Galli und **Karl Försterling.**

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 10. Dezember 1910.

Das optische Verhalten dünner Metallschichten und besonders die Frage, ob deren Konstanten dieselben sind wie bei massiven Metallen, resp. wie sie von der Schichtdicke abhängen, ist bereits häufig untersucht [1]. Neuerdings sind auf Veranlassung von Herrn Prof. W. Voigt von Herrn Statescu [2]) Beobachtungen an Metallschichten angestellt worden, welche elektrolytisch auf einem anderen Metall erzeugt waren, und bei denen die Dicke aus dem Gesamtstrom erschlossen wurde, der zu ihrer Herstellung diente. Die nachstehend beschriebenen Beobachtungen [3]) schließen sich in mancher Hinsicht an die von Herrn Statescu an, behandeln aber chemisch hergestellte Schichten auf durchsichtigen Körpern. Insbesondere wurde versucht, möglichst geringe Schichtdicke zu erreichen. Eine mit dergleichen gemachte Wahrnehmung regte zu genauerem Studium an. Ließ man nämlich auf eine solche Schicht linear polarisiertes Licht, dessen Azimut gegen die Einfallsebene 45^0 betrug, einfallen, so ergab sich das überraschende Resultat, daß das reflektierte Licht wieder merklich linear polarisiert sein konnte. Dieses trat im allgemeinen nur für

1) Ueber Literatur vgl. Winkelmann, Hdb. d. Phys. Optik. S. 1311.

2) C. Statescu, Diss. Göttingen 1903. Ann. d. Phys. 33. 1032. 1910.

3) Die Beobachtungen wurden auf Anregung von Herrn Prof. Voigt im Göttinger Phys. Institut von N. Galli angestellt, die Theorie dann von K. Försterling entwickelt.

eine Farbe, dann aber für alle Einfallswinkel ein. Für einen bestimmten Einfallswinkel war das Azimut des reflektierten Lichtes Null, die Schicht besaß also einen Polarisationswinkel. Von diesem eigentümlichen Verhalten hatte die Theorie Rechenschaft zu geben.

Die allgemeinen Ausdrücke für das an einer beliebigen Platte reflektierte und für das durchgehende Licht sind wiederholt, so auch u. a. von W. Voigt[1]) gegeben und von ihm und P. Drude zum Teil diskutiert worden. Indessen beziehen sich die Annäherungen von P. Drude[2]) auf den Fall relativ dicker Metallschichten. Der bei unseren Beobachtungen vorliegende Fall ist gerade der entgegengesetzte. Unsere Annäherungen mußten dahin gehen, daß infolge ihrer minimalen Dicke die Schicht auf das reflektierte und durchgehende Licht nur einen geringen Einfluß ausübt. Aus diesen Voraussetzungen ergeben sich in der Tat qualitativ die beschriebenen Resultate der Beobachtung.

Einige Beziehungen, die zwischen den Azimuten des unter verschiedenen Einfallswinkeln reflektierten Lichtes bestehen, lassen eine Prüfung der Theorie auch quantitativ zu. Die Uebereinstimmung, auf die unsere Beobachtungen führen, ist als genügend zu bezeichnen, zumal ein Teil der bisher untersuchten Schichten noch nicht vollständig die vereinfachenden Annahmen der Theorie erfüllt. Es soll versucht werden, weiterhin noch dünnere Schichten als bisher zu erhalten.

Von besonderem Interesse dürfte sein, daß für Schichten von der verlangt kleinen Dicke die Theorie einen Weg angibt, um aus einer geeignet angestellten Beobachtung des Polarisationszustandes des reflektierten Lichtes den Brechungs- und Absorptionsindex des Metalls der Schicht zu berechnen ohne die Schichtdicke zu kennen. Diese Dicke selbst ergibt sich dann durch Heranziehung einer weiteren Reflexionsbeobachtung.

Grundformeln.

Es soll im Folgenden angenommen werden, daß die beiden Medien, zwischen denen die Schicht sich befindet, durchsichtig, die Substanz der Schicht aber absorbierend ist. Dann ist nur der Brechungsindex der Schicht komplex anzusetzen. Komplexe Größen werden weiterhin stets mit deutschen oder griechischen, reelle mit

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. 25, S. 25, Komp. d. Phys. II 643.

2) P. Drude, Wied. Ann. 43, S. 126.

W. Betz, Ann. d. Phys. 18, 1905, behandelt ohne Annäherung das durchgehende Licht, erhält aber überaus komplizierte, nur graphisch verwertbare Formeln.

lateinischen Buchstaben bezeichnet. Die Brechungsindices seien 1, $\mathfrak{n}_1$, n_2 (wobei $\mathfrak{n}_1 = n_1 - i k_1 = n_1(1 - i\varkappa_1)$), die Richtungskosinus der Wellennormale gegen das Einfallslot c, $\mathfrak{c}_1$, c_2, die Sinus a, $\mathfrak{a}_1$, a_2. Es soll c und c_2 stets als reell angenommen werden.

Beim einmaligen Durchgang des Lichtes durch eine Trennungsfläche zweier Medien bestimmen sich die Amplituden des reflektierten Lichtes $\mathfrak{R}$ und des durchgegangenen $\mathfrak{D}$ parallel (p) und senkrecht (s) zur Einfallsebene nach den Fresnelschen Formeln. Setzt man:

$$\mathfrak{R}_s = \mathfrak{r}_s \mathfrak{E}_s, \quad \mathfrak{D}_s = \mathfrak{d}_s \mathfrak{E}_s,$$

falls die Reflexion an der Grenze 1 gegen 2, entsprechend $\mathfrak{r}'_s$ und $\mathfrak{d}'_s$, wenn an der Grenze 2 gegen 3, und d_{os}, wenn an der Grenze 1 gegen 2 (ohne Zwischenschicht) stattfindet, und verfährt entsprechend mit den p-Komponenten, so sind die komplexen Schwächungsfaktoren bekanntlich gegeben durch[1]):

$$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{n}_1 c - \mathfrak{c}_1}{\mathfrak{n}_1 c + \mathfrak{c}_1}, \quad \mathfrak{r}'_s = \frac{n_2 \mathfrak{c}_1 - \mathfrak{n}_1 c_2}{n_2 \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{n}_1 c_2}, \quad r_o = \frac{\mathfrak{r}_s + \mathfrak{r}'_s}{1 + \mathfrak{r}_s \mathfrak{r}'_s} = \frac{n_2 c - c_2}{n_2 c + c_2}$$

$$\mathfrak{r}_p = \frac{c - \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1}{c + \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1} \quad \mathfrak{r}'_p = \frac{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 - n_2 c_2}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 + n_2 c_2}, \quad r_{op} = \frac{\mathfrak{r}_p + \mathfrak{r}'_p}{1 + \mathfrak{r}_p \mathfrak{r}'_p} = \frac{c - n_2 c_2}{c + n_2 c_2}$$

$$\mathfrak{d}_s = \frac{2 c \mathfrak{n}_1}{\mathfrak{n}_1 c + \mathfrak{c}_1}, \quad \mathfrak{d}' = \frac{2 \mathfrak{c}_1 n_2}{n_2 \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{n}_1 c_2}, \quad d_{os} = \frac{\mathfrak{d}_s \mathfrak{d}'_s}{1 + \mathfrak{r}_s \mathfrak{r}'_s} = \frac{2 c n_2}{c_2 + n_2 c}$$

$$\mathfrak{d}_p = \frac{2 c \mathfrak{n}_1}{c + \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1}, \quad \mathfrak{d}'_p = \frac{2 \mathfrak{c}_1 n_2}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 + n_2 c_2}, \quad d_{op} = \frac{\mathfrak{d}_p \mathfrak{d}'_p}{1 + \mathfrak{r}_p \mathfrak{r}'_p} = \frac{2 c n_2}{n_2 c_2 + c}$$

Für das Folgende sind noch nachstehende Kombinationen wichtig:

$$\varrho_s = \frac{\mathfrak{r}'_s + r_{os}}{1 + \mathfrak{r}_s \mathfrak{r}'_s} - r_{os} = -c \frac{\mathfrak{n}_1^2 c_2^2 - n_2^2 \mathfrak{c}_1^2}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 (n_2 c + c_2)^2}$$

$$\varrho_p = \frac{\mathfrak{r}'_p + r_{op}}{1 + \mathfrak{r}_p \mathfrak{r}'_p} - r_{op} = +c \frac{\mathfrak{n}_1^2 \mathfrak{c}_1^2 - n_2^2 c_2^2}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 (n_2 c_2 + c)^2}$$

$$\delta_s = \frac{\mathfrak{r}_s \mathfrak{r}'_s}{1 + \mathfrak{r}_s \mathfrak{r}'_s} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{n}_1^2 c c_2 + \mathfrak{n}_2 \mathfrak{c}_1^2}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 (n_2 c + c_2)}$$

$$\delta_p = \frac{\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}'_p}{1 + \mathfrak{r}_p \mathfrak{r}'_p} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} \frac{\mathfrak{n}_1^2 \mathfrak{c}_1^2 + n_2 c c_2}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 (n_2 c_2 + c)}$$

Kürzt man endlich ab

---

1) Die magnetische Feldstärke ist als Lichtvektor angesehen.

$$e^{2\pi i \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 l/\lambda} = \mathfrak{e}, \quad e^{2\pi i (\mathfrak{n}_2 \mathfrak{c}_2 - \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1) l/\lambda} = \mathfrak{e}',$$

(l Dicke der Schicht, λ Wellenlänge des Lichts im ersten Medium) so sind die an der Schicht reflektierten und die durchgegangenen Amplituden gegeben durch:

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{r} + \mathfrak{r}' \mathfrak{e}^{-2}}{1 + \mathfrak{r}\mathfrak{r}' \mathfrak{e}^{-2}} \mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{e}' \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'}{1 + \mathfrak{r}\mathfrak{r}' \mathfrak{e}^{-2}} \mathfrak{E},$$

wobei, je nachdem, überall der Index (s) oder (p) zuzufügen ist. Ist das erste Medium nicht der leere Raum, so hat man überall die Brechungsindices gegen das erste Medium zu nehmen, aber dann bedeutet auch im Exponenten λ die Wellenlänge im ersten Medium, nicht im freien Aether.

Setzt man:

$$\mathfrak{e}^{-2} = 1 - \varepsilon, \quad \mathfrak{e}' = 1 - \varepsilon',$$

so besteht unsere Annäherung darin, daß ε und ε' klein sein sollen, sodaß ε^2 und ε'^2 neben eins wegbleiben dürfen.

Dann wird:

(1) $$\mathfrak{R} = (r_0 - \varepsilon\varrho)\,\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{d}_0 (1 - \varepsilon' + \varepsilon(\delta + \tfrac{1}{2}))\,\mathfrak{E}.$$

Bei allen Polarisationsbeobachtungen wollen wir annehmen, daß das Azimut des einfallenden linear polarisierten Lichtes gegen die Einfallsebene 45° beträgt, also $\frac{\mathfrak{E}_s}{\mathfrak{E}_p} = 1$ ist.

I.

Polarisationszustände des reflektierten und des durchgegangenen Lichtes.

§ 1.

Reflexion an einer Schicht, die sich zwischen zwei gleichen Medien befindet.

Die Wirkung der Schicht wird am reinsten zu Tage treten, wenn sie allein die Lichtfortpflanzung stört, also zwischen zwei gleiche Medien eingebettet ist.

Da jetzt $r_{0p} = r_{0s} = 0$, so gilt in unserer Annäherung:

$$\frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \frac{\varrho_s}{\varrho_p} = -\frac{\mathfrak{n}_1^2 - \mathfrak{n}_1^2 a^2 - 1 + \frac{a^2}{\mathfrak{n}_1^2}}{\mathfrak{n}_1^2 - 1} = -\left(c^2 - \frac{a^2}{\mathfrak{n}_1^2}\right)$$

$$= -\left(c^2 - a^2 \frac{n_1^2 - k_1^2 - 2i\, n_1 k_1}{(n_1^2 + k_1^2)^2}\right).$$

Hieraus ergibt sich in bekannter Weise das Azimut χ und die Phasenverzögerung δ:

$$\operatorname{tg}^2 \chi = c^4 + \frac{a^2}{(n_1^2 + k_1^2)^2} \left\{ a^2 - 2c^2 (n_1^2 - k_1^2) \right\}$$

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{2a^2 n_1 k_1}{c^2 (n_1^2 + k_1^2)^2 - a^2 (n_1^2 - k_1)}.$$

Diese Größen sind also, soweit die Annäherungen gelten, direkt unabhängig von der Dicke der Schicht. Letztere spielt nur insofern eine Rolle, als sie n und k beeinflußt.

Für den Haupteinfallswinkel $\overline{\varphi}\left(\delta = \frac{\pi}{2}\right)$ gilt:

(2)
$$\operatorname{cotg}^2 \overline{\varphi} = \frac{n_1^2 - k_1^2}{(n_1^2 + k_1^2)^2}$$
$$\operatorname{tg} \overline{\chi} = \frac{2a^2 n_1 k_1}{(n_1^2 + k_1^2)^2}.$$

Aus dem Haupteinfallswinkel und dem Hauptazimut kann man also in dem vorausgesetzten Falle die optischen Konstanten n_1 und k_1 berechnen, ohne die Dicke der Schicht zu kennen. Ist die Schicht durchsichtig, also $k_1 = 0$, so wird $\operatorname{tg}\delta = 0$, so ist das reflektierte Licht also stets linear polarisiert. Das Azimut der linearen Polarisation ist in diesem Falle:

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{n_1^2 c^2 - a^2}{n_1^2}.$$

Der Polarisationswinkel ($\chi = 0$) ist bestimmt durch:

(3) $$n_1 = \operatorname{tg} \overline{\varphi}.$$

Es gilt also in diesem Falle das Brewster'sche Gesetz.

§ 2.
Reflexion an einer Schicht, wenn alle drei Medien verschieden sind.

Aus den Formeln des vorigen Paragraphen kann man direkt

n_1 und k_1 berechnen. Nunmehr werden wir Formeln entwickeln, aus denen man bei bekanntem n_1 und k_1 die Dicke l berechnen kann. Alle drei Medien werden jetzt als verschieden vorausgesetzt, und zwar soll n_2 so sehr von 1 verschieden sein, daß r_{op} (natürlich nicht r_0, das Null werden kann,) als groß neben ε gelten darf.

Wir wollen einen speziellen Fall vorwegnehmen, obwohl er in den späteren Formeln mit enthalten ist, weil er sich fast ohne Rechnung erledigt, und das Resultat für sich Interesse hat, da es bereits die Dicke der Schicht zu berechnen gestattet. Die Reflexion soll so stattfinden, daß $r_{os} = 0$, also am Polarisationswinkel φ^0 des Mediums 3 gegen 1. Befindet sich die Schicht auf einer Glasplatte [oder besser, um die Reflexion an der nicht belegten Rückseite unschädlich zu machen, auf einem Glasprisma,] und wird in der Luft beobachtet, so soll also die Reflexion am Polarisationswinkel des Glases gegen Luft statthaben.

In unserer Annäherung ist dann:

$$\mathfrak{R}_s = -\varepsilon \frac{\mathfrak{r}'_s}{1+\mathfrak{r}_s \mathfrak{r}'_s},$$

was mit Anwendung des Brewster'schen Gesetzes in

$$\mathfrak{R}_s = \frac{\mathfrak{n}_1^2 c_0^2 - \mathfrak{c}_1^2}{4\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 c_0}\varepsilon, \quad (c_0 = \cos\varphi^0),$$

übergeht. Nunmehr gilt:

$$\frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \frac{\mathfrak{R}_s}{r_{op}} = i\frac{\pi l}{\lambda c_0 r_{op}}(c_0^2 \mathfrak{n}_1^2 - \mathfrak{c}_1^2)$$

(4) $$= \frac{\pi l}{\lambda c_0 r_{op}}\left\{2n_1 k_1\left(c_0^2 - \frac{a^2}{(n_1^2+k_1^2)^2}\right) + i\left[(n_1^2-k_1^2)\left(c_0^2 + \frac{a^2}{(n_1^2+k_1^2)^2}\right) - 1\right]\right\}$$

Hieraus ergibt sich leicht allgemein $\operatorname{tg}\chi^0$ und $\operatorname{tg}\delta^0$. Häufig ist $\frac{a^2}{(n_1^2+k_1^2)^2}$ klein neben c_0^2 dann gilt:

(5) $$\operatorname{tg}\chi^0 = \frac{\pi l}{\lambda c_0 r_{op}}\sqrt{(n_1^2+k_1^2)^2 c_0^4 - 2c_0^2(n_1^2-k_1^2)+1}$$

$$\operatorname{tg}\delta^0 = \frac{(n_1^2-k_1^2)c_0^2-1}{2n_1 k_1 c_0^2} = \frac{n_1^2-k_1^2-(n_2^2+1)}{2n_1 k_1}$$

Ist das reflektierte Licht linear polarisiert, so ist:

(5a) $$n_1^2 - k_1^2 = n_2^2 + 1$$

$$\operatorname{tg}\chi^0 = \frac{2\pi l}{\lambda r_{op}} c_0 k_1 n_1.$$

Ist der Körper durchsichtig, so folgt aus (4)

$$\delta^0 = 90^0$$

(6)
$$\operatorname{tg}\chi^0 = \frac{\pi l}{\lambda r_{op} c_0}\{c_0^2 n_1^2 - c_1^2\}.$$

Der Polarisationswinkel des Glases ist bei Anwendung unserer Annäherung zugleich der Haupteinfallswinkel der Schicht, ein bekanntes Gesetz, das z. B. auch W. Voigt und P. Drude in ihrer Theorie der Oberflächenschichten erhalten haben. Aus den Formeln (5) resp. (6) kann man bei bekannten n_1 und k_1 die Dicke l berechnen.

Nunmehr gehen wir unter Beibehaltung der im Anfang dieses Paragraphen besprochenen Annäherungen zu beliebigen Einfallswinkeln über.

Es gilt dann:

$$\frac{\Re_s}{\Re} = \frac{r_{os} - \varepsilon \varrho_s}{r_{op} - \varepsilon \varrho_p} = \frac{1}{r_{op}}\left\{r_{os} - \varepsilon\left(\varrho_s - \frac{r_{os}}{r_{op}}\varrho_p\right)\right\}$$

(6)
$$= \frac{1}{r_{op}}\left\{r_{os} + \frac{c\,\frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1}}{r_{op}(n_2 c + c_2)^2 (n_2 c_2 + c)^2}\left[(\mathfrak{n}_1^2 c_2^2 - n_2^2 \mathfrak{c}_1^2)(c^2 - n_2^2 c_2^2) + (\mathfrak{n}_1^2 \mathfrak{c}_1^2 - n_2^2 c_2^2)(n_2^2 c^2 - c_2^2)\right]\right\}.$$

Die komplexe eckige Klammer läßt sich schreiben:

(7)
$$-a^2(n_2^2 - 1)[\mathfrak{n}_1^2 - (1 + n_2^2)] + \frac{n_2^2}{\mathfrak{n}_1^2} a^2 (c^2 - n_2^2 c_2^2).$$

Das letzte Glied kann, wie oben gesagt, wegbleiben.

Die Bedingung dafür, daß das reflektierte Licht linear polarisiert ist, besteht in dem Verschwinden des reellen Teils von (7) $\left(\text{da } \frac{\varepsilon}{\mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1} = i 4\pi \frac{l}{\lambda}\right)$. Es muß also sein

(8)
$$n_1^2 - k_1^2 = n_2^2 + 1.$$

Diese Bedingung ist unabhängig vom Einfallswinkel und nur erfüllbar für

(9)
$$n_1 > k_1.$$

Da nach der Einleitung jene lineare Polarisation bei unsern dünnen Silberschichten faktisch beobachtet worden ist, so ergibt sich daraus

nach Vorstehendem für diese Schichten die Beziehung $n_1 > k_1$, in grellem Widerspruch[1]) zu dem bekannten Verhalten massiven Silbers.

Aus den angegebenen Formeln lassen sich in bekannter Weise $\operatorname{tg}\delta$ und $\operatorname{tg}^2\chi$ bilden. Wir wollen von der allgemeinen Berechnung absehen und die Betrachtung auf den Haupteinfallswinkel beschränken.

Kürzt man ab:

$$\frac{ca^2(n_2^2-1)}{(n_2 c+c_2)^2(c-n_2 c_2)^2} = Q$$

so erhält man als Bedingung für das Verschwinden des reellen Teils von (6), also für das Auftreten des Haupteinfallswinkels $\overline{\varphi}$:

$$\frac{\overline{r}_{os}}{\overline{r}_{op}} = 8\pi\frac{l}{\lambda} n_1 k_1 Q. \tag{10}$$

Für das Hauptazimut $\overline{\chi}$ folgt:

$$\operatorname{tg}\overline{\chi} = 4\pi\frac{l}{\lambda} Q[n_1^2-k_1^2-(1+n_2^2)]. \tag{11}$$

Da $\frac{r_{os}}{r_{op}}$ für $n_2 \lesseqgtr 1$ bei $\varphi < \varphi^0$ stets negativ ist, und da Q für $n_2 > 1$ positiv, für $n_2 < 1$ negativ ist, so folgt aus (10):

Für $n_2 > 1$ ist der Haupteinfallswinkel stets größer, für $n_2 < 1$ stets kleiner als der Polarisationswinkel des dritten Mediums gegen das erste.

Häufig liegt der Einfallswinkel $\overline{\varphi}$ nahe bei φ^0, dann ist in Annäherung:

$$Q = \frac{1}{4c_0(n_2^2-1)}.$$

Man sieht, daß zwischen den in (10), (11) und (5) auftretenden Ausdrücken einfache Beziehungen bestehen, die durch Vergleichung eine Prüfung der Annahmen der Theorie gestatten.

§ 3.

Polarisationszustände des durchgehenden Lichtes.

Aus (1) folgt:

$$\frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} = \frac{d_{os}}{d_{op}}\{1+\varepsilon(\delta_s-\delta_p)\}$$
$$= \frac{d_{os}}{d_{op}}\left\{1+\frac{2\pi i l a^2(\mathfrak{n}_1^2-(\mathfrak{n}_2^2+1))}{\lambda n_2(n_2 c+c_2)}\right\}.$$

1) W. Betz (l. c.) hat die dünnste untersuchte Schicht ein weit größeres n_1 als die übrigen, wenn auch $n_1 < k_1$ bleibt.

Also in unserer Annäherung

$$(12)\qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\chi &= \frac{d_{os}}{d_{op}}\left[1+\frac{8\pi l\, n_1 k_1 a^2}{\lambda n_2 (n_2 c + c_3)}\right], \\ \operatorname{tg}\delta &= \frac{2\pi l a^2 [n_1^2 - k_1^2 - (n_2^2+1)]}{\lambda n_2 (n_2 c + c_3)}. \end{aligned}$$

Die Bedingung für das Verschwinden von tg δ ist offenbar dieselbe, wie sie für das reflektierte Licht durch (8) gegeben ist.

Ist also das reflektierte Licht linear polarisiert, so ist es auch das durchgegangene.

II.

Die Intensitäten des reflektierten und durchgegangenen Lichtes bei senkrechter Incidenz.

1) Das reflektierte Licht.

Bei senkrechter Incidenz gilt $r_{os} = -r_{op} = \dfrac{n_2-1}{n_2+1} = r_o$,

$$\varrho_s = -\varrho_p = -\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1 (n_2^2+1)^2}.$$

Zunächst sei angenommen, daß das erste und dritte Medium so verschieden ist, daß r_o groß neben ε ist. Dann wird in der bisher benutzten Annäherung die reflektierte Intensität I_r aus (1)

$$I_r = r_o^2 + r_o \pi \frac{16\, n_1 k_1}{(n_2+1)^2} \frac{l}{\lambda}$$

r_o^2 stellt die Intensität dar, die an der Grenze eins gegen drei ohne Schicht reflektiert werden würde (I_r^o). Man hat also:

$$(13)\qquad \frac{I_r - I_r^o}{I_r^o} = \frac{16\pi l\, n_1 k_1}{\lambda (n_2^2 - 1)}.$$

Befindet sich die Schicht zwischen 2 gleichen Medien vom Brechungsindex n, so ist, wenn man die Wellenlänge λ im Vakuum rechnet:

$$(14)\qquad I = 4\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} n^2 [(n_1^2 + k_1^2)^2 + 1 - 2(n_1^2 - k_1^2)].$$

2) Das durchgehende Licht.

Wir nehmen an, das erste Medium sei der reine Aether. (Zwei gleiche Medien geben nichts wesentlich Neues). Dann ist (aus (1):

$$I_d = d_o^2\left(1 - \frac{8 n_1 k_1 \pi l}{\lambda (n_2+1)}\right).$$

Setzt man $d_0^* = I_d^0$, so ist I_d^0 die durchgegangene Intensität bei verschwindender Schichtdicke. Dann wird:

$$(15) \qquad \frac{I_d - I_d^0}{I_d^0} = \frac{8\pi l\, n_1 k_1}{\lambda(n_2+1)}$$

Die Beobachtungen.

Um die hier entwickelte Theorie mit den Beobachtungen zu vergleichen, ist es nötig, homogene Silberschichten von außerordentlich geringer Dicke herzustellen. Dies gelang erst nach vielen vergeblichen Versuchen auf folgende Weise. Eine Silberlösung wurde mit einigen Tropfen Formaldehyd[1]) versetzt und dann umgeschüttelt bis die Reduktion eintrat; erst dann wurde die Lösung über eine gut gereinigte Glasplatte gegossen und dort gelassen bis der auf ihr entstandene Silberniederschlag eben sichtbar war. Dann wurde die Platte sofort abgespült. Die auf diese Weise erhaltenen Silberschichten zeigten je nach der Dicke eine blaue bis gelbrote Färbung. Die hier verwandte Methode läßt es als ziemlich ausgeschlossen erscheinen, die Farbendifferenz durch das Auftreten eines Oxyds zu erklären.

An der auf Glas niedergeschlagenen Schicht wurden zunächst mit Hilfe eines Fueßschen Polarisations-Spektrometers Reflexionsbeobachtungen in Luft angestellt; hier wurden die Phasenverzögerung δ^0 und das Azimut χ^0 am Polarisationswinkel des Glases bestimmt, ferner der Haupteinfallswinkel $\overline{\varphi}$ und das Hauptazimut $\overline{\chi}$ der Schicht.

Die Schwächung die das Licht beim Passieren der Schicht erleidet, wurde mit einem Spektralphotometer nach Martens und Grünbaum gemessen. Zu diesem Zweck wurde die Schicht vor den einen, eine Glasplatte (ähnlich derjenigen, auf der sich die Schicht befand) vor den andern Spalt des Photometers gebracht und beide Platten mehrmals vertauscht.

Wie schon gesagt, gestatten diese 3 Beobachtungen eine Prüfung der Theorie.

Zunächst ergaben sich qualitativ die von der Theorie geforderten Resultate.

Das reflektierte Licht war zumeist nur für eine Farbe linear polarisiert, dann aber für alle Einfallswinkel.

Der Haupteinfallswinkel der Schicht (resp. ihr Polarisationswinkel) war stets größer als der Polarisationswinkel des Glases.

---

1) Izarn, Compt. Rend. 135. 240. 1902.

Auch in quantitativer Hinsicht ergab sich eine befriedigende Uebereinstimmung. Wie gesagt, ist mit Hilfe der Gleichungen (5), (10) und (11) eine Prüfung der Theorie möglich. Da indes $\operatorname{tg} \overline{\chi}$ stets sehr klein ist, also ein Fehler in der Messung das Resultat sehr beeinflußt, so mag die Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtung für solche Farben erfolgen, wo das reflektierte Licht linear polarisiert, $\operatorname{tg} \overline{\chi} = 0$ ist, da hier die Beobachtungen einmal genauer sind, anderseits $\operatorname{tg}^2 \overline{\chi}$, auch wenn $\operatorname{tg} \chi$ nicht streng 0 sein sollte, doch keine Rolle spielt.

Es gilt nun nach:

$$(5\,a) \qquad 4\pi n_1 k_1 \frac{l}{\lambda} = 2 \frac{r_{op}^0}{c_0} \operatorname{tg} \chi^0,$$

$$(10) \qquad 4\pi n_1 k_1 \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2Q} \frac{\overline{r}_{os}}{\overline{r}_{op}},$$

$$(15) \qquad 4\pi n_1 k_1 \frac{l}{\lambda} = \frac{n_2+1}{2} \frac{I_d^0 - I_d}{I_d^0}.$$

Die nachfolgende Tabelle enthält die Zusammenstellung dieser Werte aus den bisher untersuchten homogenen Schichten.

Tabelle 1.

	$\overline{\varphi}$	$4\pi n_1 k_1 l/\lambda$ aus χ^0	$\overline{\varphi}$	I_d	Farbe
I	67°	0,39	0,49	0,53	Rot
II	64° 45′	0,31	0,38	0,42	Rot
III	60° 30′	0,17	0,16	0,14	Grün

Für die großen $4\pi n_1 k_1 l/\lambda$ ist die in der Theorie benutzte Annäherung kaum erlaubt, die Uebereinstimmung der Werte nicht gut. Die angegebene Farbe ist die, in der die Schicht lineare Polarisation zeigt.

Nach den oben beschriebenen Beobachtungen wurde die Schicht durch einen Tropfen Xylol mit der Hypotenusenfläche eines rechtwinkligen Prismas optisch verbunden, um die S. 62 erwähnten Beobachtungen, bei denen die Schicht zwischen 2 gleichen Medien sein muß, auszuführen. Das Licht fiel dann durch die Kathetenflächen auf die Schicht. Diese Beobachtungen sind naturgemäß nicht sehr genau, auch wenn man ein Prisma ohne Spannungen aussucht. Denn jetzt kommt die Wirkung der Schicht allein, nicht in Verbindung mit der Reflexion Luft—Glas, vor, somit treten auch alle

Inhomogenitäten mehr zu Tage. Beobachtet wurde mit dem erwähnten Polarisationsspektrometer der Haupteinfallswinkel $\bar{\varphi}$ und das Hauptazimut $\bar{\chi}$. Es ist für

$$\text{No. II: } \bar{\varphi} = 56^0 \quad \bar{\chi} = 14^0 \text{ im Rot}$$
$$\text{No. III: } \bar{\varphi} = 61^0 \quad \bar{\chi} = 13^0 \text{ im Grün}$$

Setzt man $\frac{k_1}{n_1} = \operatorname{tg} \alpha$, so ist nach (2)

$$\frac{\operatorname{tg} \bar{\chi}}{\cos^2 \bar{\varphi}} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$\frac{\operatorname{cotg} \bar{\varphi}}{\cos 2\alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{n_1^2}.$$

Berechnet man hieraus n_1 und k_1 und zieht die Tabelle 1 zur Bestimmung der Dicke hinzu, so findet man:

Tabelle 2.

	l	n_1	k_1	$\varkappa_1$	
II	15 $\mu\mu$	1,8	0,6	0,33	Rot
III	3 $\mu\mu$	2,3	0,93	0,4	Grün

Da das Licht für diese Farben linear polarisiert war, müßte die Beziehung (8) gelten. In Wirklichkeit erhält man aber für $n_1^2 - k_1^2$ statt 3, 3 das einemal 2, 9, das andere Mal 4,4. Diese Differenz beruht auf der Ungenauigkeit der Beobachtung, da in (8) die Fehler wegen des quadratischen Auftretens namentlich von n_1 sehr ins Gewicht fallen. Berechnet man indessen aus (2') und (8) n_1 und k_1 so folgt statt der obigen Tabelle

	n_1	k_1
II	1,9	0,63
III	2,1	0,95.

Man erhält also auch so Werte, die mit den oben angeführten befriedigend übereinstimmen.

Zum Schluß mögen die Konstanten der dünnsten Schicht mit denen von massivem Silber für dieselbe Farbe [1]) zusammengestellt werden.

1) Die Werte für n und k stammen von Minor, Ann. d. Phys. 10. S. 602. 1903, und sind für die betreffende Farbe aus den Kurven Minors interpoliert.

	n_1	$\varkappa_1$
Massives Silber	0,17	17,2
Dünnste Schicht	2,2	0,4.

Wie oben erwähnt, ist also der Unterschied in beiden Fällen außerordentlich groß. Über den Zustand, in welchem sich das Silber befindet, braucht man für die Anwendung der Formel natürlich nichts vorauszusetzen.

Die Beobachtungen sollen noch auf weitere Metalle und dicken Schichten ausgedehnt werden.

Göttingen, Physikalisches Institut, im Dezember 1910.

Allgemeines über Emission und Absorption in Zusammenhang mit der Frage der Intensitätsmessungen beim Zeeman-Effekt.

Nach Beobachtungen von C. Försterling.

Von

W. Voigt.

Mit einem Zusatz von H. A. Lorentz in Leiden.

Vorgelegt in den Sitzungen vom 26. Nov. 1910 und 28. Jan. 1911.

Daß die Kenntniß der Intensitätsverhältnisse der Komponenten einer im Magnetfeld zerlegten Spektrallinie für die Aufstellung der Theorie der komplizierteren Zerlegungen unentbehrlich ist, habe ich in einer Arbeit über den letzteren Gegenstand auseinandergesetzt[1]). Es ist mir deshalb nicht zweifelhaft, daß die bisherige Art der Erforschung der Gesetze des Zeeman-Effektes, die sich auf die geometrischen Verhältnisse beschränkt, einer Ergänzung in der angedeuteten Richtung bedarf.

Für solche Untersuchungen ist aber die Vorfrage zu erledigen, in wie weit aus der okular oder photographisch wirksamen Energie einer Spektrallinie auf deren Emissionsvermögen zu schließen ist. Um hier die Antwort zu finden ist eine genauere Untersuchung des Vorganges der Emission einer Lichtquelle, z. B. einer Flamme erforderlich, die im Folgenden auseinandergesetzt ist. Notgedrungen beschränkt sich die Entwickelung auf die Betrachtung reiner Temperaturstrahlung trotz aller Bedenken gegen die Existenz einer solchen.

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 24, 193, 1907.

1) Um das Absorptionsvermögen A einer Schicht zu bestimmen hat man bekanntlich von der einfallenden Energie J_e die reflektierte J_r und die gebrochene J_d abzuziehen und das Resultat durch die einfallende zu dividieren, nach dem Schema

$$\frac{\mathsf{J}_e - \mathsf{J}_r - \mathsf{J}_d}{\mathsf{J}_e} = \mathsf{A}.$$

Grenzt die Schicht beiderseitig an dasselbe Medium, z. B. an den leeren Raum, so kann man die bez. Energien durch die Amplitudenquadrate E, R, D (z. B. der elektrischen Schwingungen) ersetzen und schreiben

$$1)\qquad \frac{E^2 - R^2 - D^2}{E^2} = \mathsf{A}.$$

Für die reflektierten und die gebrochenen komplexen Amplituden $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ gelten unter Voraussetzung normaler Incidenz dabei die Formeln

$$2)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{R} &= E\mathfrak{r}\,\frac{e^{+i\mathfrak{n}L} - e^{-i\mathfrak{n}L}}{e^{+i\mathfrak{n}L} - \mathfrak{r}^2 e^{-i\mathfrak{n}L}},\\ \mathfrak{D} &= Ee^{+iL}\,\frac{1-\mathfrak{r}^2}{e^{+i\mathfrak{n}L} - \mathfrak{r}^2 e^{-i\mathfrak{n}L}}, \end{aligned}$$

u. zw. bezeichnet hierin $\mathfrak{n}$ den komplexen Brechungsindex der Substanz der Schicht, $\mathfrak{r}$ und L sind Abkürzungen; es gilt nämlich

$$3)\qquad \mathfrak{r} = \frac{1-\mathfrak{n}}{1+\mathfrak{n}} \text{ und } L = \frac{2\pi l}{\lambda},$$

wobei l die Dicke der Schicht, λ die Wellenlänge des Lichtes im Außenmedium bezeichnet.

Wir nehmen die Schicht äußerst dünn an, vernachlässigen also $\mathfrak{n}^2 L^2$ und L^2 neben Eins, und schreiben somit

$$4)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{R} &= E\mathfrak{r}\,\frac{2i\mathfrak{n}L}{1-\mathfrak{r}^2+(1+\mathfrak{r}^2)i\mathfrak{n}L},\\ \mathfrak{D} &= E(1+iL)\,\frac{(1-\mathfrak{r}^2)}{1-\mathfrak{r}^2+(1+\mathfrak{r}^2)i\mathfrak{n}L}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man dann die zu einer komplexen Größe konjugierte durch den oberen Index ', so gilt

$$R^2 = \mathfrak{R}\mathfrak{R}', \quad D^2 = \mathfrak{D}\mathfrak{D}'.$$

Man sieht, daß R^2 neben E^2 klein von zweiter Ordnung ist und braucht somit nur D^2 zu berechnen. Da

$$\mathfrak{n}\frac{1+\mathfrak{r}^2}{1-\mathfrak{r}^2} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^2+1),$$

so ergiebt sich

$$D^2 = \mathfrak{D}\mathfrak{D}' = E^2(1 - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^2 - \mathfrak{n}'^2)\, i L).$$

Setzen wir speziell die Umgebung der Schicht als *durchsichtig* voraus, so ist

5) $$\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa), \quad \mathfrak{n}' = n(1 + i\varkappa),$$

unter n den reellen Brechungsindex der Schicht gegen die Umgebung, unter $\varkappa$ den Absorptionsindex verstanden, und es resultiert

6) $$D^2 = E^2(1 - 2n^2\varkappa L).$$

Das Absorptionsvermögen für eine normal auffallende Welle findet sich demgemäß zu

7) $$\mathsf{A} = 2n^2\varkappa L.$$

Nimmt man hinzu den Kirchhoffschen Satz über die Proportionalität von Emissions- und Absorptionsvermögen, so ergiebt sich

8) $$\mathsf{E} = \mathsf{e}\mathsf{A} = 2\mathsf{e}n^2\varkappa L,$$

wobei E das Emissionsvermögen der Schicht in normaler Richtung, e dasjenige einer ebenen schwarzen Fläche für Strahlen von derselben Polarisationsrichtung und der oben benutzten Wellenlänge λ resp. der zugehörigen Frequenz $\nu = 2\pi/\tau$ bezeichnet. Die Funktionen E resp. e sind so zu verstehen, daß $\mathsf{E}d\nu$ resp. $\mathsf{e}d\nu$ die in der Sekunde von der Fläche 1 cm² emittierte Energie der Schwingungen mit Frequenzen zwischen ν und $\nu + d\nu$ darstellt.

2) Diese Betrachtungen geben die Emission der Schicht in eine beliebige Umgebung, liefern aber einen nutzbaren Wert nur dann, wenn das Gesetz der Emission e des schwarzer Körpers in *diesem Medium* bekannt ist. Um mit den gewonnenen Ausdrücken (7) resp. (8) den ganzen Emissionsvorgang in einer Flamme zu studieren, müßte also das Gesetz der Strahlung des schwarzen Körpers *in dieser Flamme*, welche selektiv absorbiert, bekannt sein. Dies ist zunächst nicht der Fall. Wir sind daher gezwungen, die Emission der betrachteten Schicht innerhalb der Flamme auf diejenige innerhalb des leeren oder des Luftraumes zurückzuführen, für welche Räume die Emission e des schwarzen Körpers *bekannt* ist.

Zu diesem Zwecke verfolgen wir etwas genauer den *Vorgang* der Emission der betrachteten dünnen Schicht für die unter-

suchte Schwingungsart. Bei dieser Emission fällt primär eine gewisse komplexe Amplitude $\mathfrak{F}_1$ resp. $\mathfrak{F}_2$ auf jede der beiden Grenzflächen 1 und 2, welche nun durch innere Reflexion von beiden Grenzflächen je zu einem ganzen Schwingungssystem Veranlassung geben, das, aus beiden Grenzen austretend, schließlich die gesammte Emission bildet.

Um letztere zu berechnen haben wir einfach alle auf derselben Seite austretenden komplexen Amplituden zu addieren. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{d}_i$ den komplexen Schwächungsfaktor für den Durchtritt durch eine Grenze von innen nach außen, mit $\mathfrak{a}$ denjenigen für das Durchsetzen der Schicht, mit $\mathfrak{r}_i$ denjenigen für die innere Reflexion an einer Grenze, so stellt sich die Summe der auf der Seite 1 austretenden Amplituden dar durch

$$9)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{F} &= \mathfrak{F}_1\mathfrak{d}_i(1+\mathfrak{a}^2\mathfrak{r}_i^2+\mathfrak{a}^4\mathfrak{r}_i^4+\cdots)\\ &\quad+\mathfrak{F}_2\mathfrak{d}_i\mathfrak{a}\mathfrak{r}(1+\mathfrak{a}^2\mathfrak{r}_i^2+\mathfrak{a}^4\mathfrak{r}_i^4+\cdots)\\ &= \frac{(\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2\mathfrak{a}\mathfrak{r}_i)\mathfrak{d}_i}{1-\mathfrak{a}^2\mathfrak{r}_i^2}.\end{aligned}$$

2 ← → 1
$\mathfrak{F}_2$ $\mathfrak{F}_1$

Dabei kann man für eine unendlich dünne Schicht $\mathfrak{a} = 1$ setzen.

Für weitere Folgerungen macht es einen Unterschied, ob man die magnetische oder die elektrische Feldstärke als emittierend annimmt. In der Tat, emittiert die elektrische Feldstärke, so pflanzen sich in zwei entgegengesetzten Richtungen gleichgerichtete elektrische, entgegengesetzte magnetische Schwingungen fort; emittiert die magnetische Schwingung, so gilt das umgekehrte. Die aus diesen beiden Annahmen entspringenden Folgerungen sind keineswegs gleich.

Emittiert die elektrische Feldstärke und verstehen wir unter den $\mathfrak{F}$ die fortgepflanzten elektrischen Amplituden, so ist für die unendlich dünne Schicht $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_i$ zu setzen, also

$$10)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{F}_i\mathfrak{d}_i}{1-\mathfrak{r}_i}.$$

Zugleich gilt für die elektrischen Schwingungen

$$11)\qquad \mathfrak{r}_i = \frac{\mathfrak{n}-1}{\mathfrak{n}+1},\quad \mathfrak{d}_i = \frac{2\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}+1},$$

woraus folgt für die komplexen Amplituden

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{n}\mathfrak{F}_i$$

und für die reellen Amplituden

$$12)\qquad F^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}' = \mathfrak{n}\mathfrak{n}'\mathfrak{F}_i\mathfrak{F}_i' = n^2(1+\varkappa^2)F_i^2.$$

Macht man dieselbe Ueberlegung für die unter der gemachten Annahme emittierten magnetischen Schwingungen, deren komplexe Amplituden $\mathfrak{H}$ genannt werden mögen, so ist $\mathfrak{H}_1 = -\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_i$ zu setzen also

13) $$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}_i \mathfrak{d}_i'}{1+\mathfrak{r}_i'}$$

wobei

14) $$\mathfrak{r}_i' = \frac{1-\mathfrak{n}}{1+\mathfrak{n}}, \quad \mathfrak{d}_i' = \frac{2}{1+\mathfrak{n}},$$

also

15) $$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i, \quad H^2 = H_i^2.$$

Nun wird die Energieströmung in einem absorbierenden Medium gemessen durch nF_i^2, wenn im Vakuum durch F^2, oder durch $H_i^2/n(1+\varkappa^2)$ wenn im Vakuum durch H^2; beide Formeln liefern also übereinstimmend

16) $$\mathsf{E} = n(1+\varkappa^2)\mathsf{E}_i.$$

Diese Beziehung kann benutzt werden, um etwas über die Emission e_i des schwarzen Körpers innerhalb des absorbierenden Mediums auszusagen. Wenn nämlich die oben betrachtete Schicht sich in gleichartiger Umgebung befindet, also an ihren Grenzen keine Reflexionen stattfinden, so ergiebt sich ihr Absorptionsvermögen

17) $$\mathsf{A}_i = 2n\varkappa L,$$

also ihr Emissionsvermögen

18) $$\mathsf{E}_i = 2\mathsf{e}_i n\varkappa L.$$

Setzt man diesen Ausdruck neben den für E nach (8) in (16) ein, so erhält man

19) $$\mathsf{e} = \mathsf{e}_i(1+\varkappa^2).$$

Emittiert die magnetische Feldstärke, so ist in (9)

$$\mathfrak{F}_i = -\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_i$$

zu setzen, also

20) $$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{F}_i \mathfrak{d}_i}{1+\mathfrak{r}_i}$$

was nach (11) auf

21) $$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_i, \quad F^2 = F_i^2$$

führt. Zugleich wäre $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_i$ anzunehmen, also

22) $$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}_i \mathfrak{d}_i'}{1 - \mathfrak{r}_i'}$$

was nach (14)

23) $$\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}_i}{\mathfrak{n}}, \quad H^2 = \frac{H_i^2}{n^2(1+\varkappa^2)}$$

ergiebt.

Beide Beziehungen liefern für die Emission

24) $$\mathsf{E} = \mathsf{E}_i/n.$$

Kombiniert man hiermit die Werte (8) und (18), so ergibt sich

25) $$\mathsf{e}_i = \mathsf{e}n^2,$$

Vergleicht man die beiden Resultate (19) und (25), so möchte man zunächst vermuten, daß die bekannte Kirchhoff-Clausiussche Beziehung (zwischen der Emission des schwarzen Körpers im Vakuum und in einem durchsichtigen Körper vom Brechungsindex n) in der letzteren Formel ausgedrückt ist. Indessen wäre dies trügerisch, da jene Beziehung sich auf Emission in Elementarkegeln bezieht, deren Oeffnungen in verschiedenen Medien sich umgekehrt wie die Quadrate der Brechungsindices verhalten, während hier eine solche in ebenen Wellen vorausgesetzt ist. In letzterem Falle entspricht jener Beziehung $\mathsf{e} = \mathsf{e}_i$, d. h. also die Formel (19). Wir werden daher für Betrachtungen, wie die vorstehende, von der Annahme einer elektrischen Emission ausgehen müssen. Für die gesuchte Emission der Schicht in gleichartiger Umgebung erhalten wir demgemäß nach (16) und (8):

26) $$\mathsf{E}_i = \frac{2\,\mathsf{e} n \varkappa L}{(1+\varkappa^2)}.$$

3) Die zur Wahrnehmung gelangende Emission einer Lichtquelle von endlicher Dicke ist die Summe der Emissionen der Elementarschichten, eine jede mit dem Schwächungsfaktor multipliziert, welcher ihrem Weg in der homogen absorbierenden Lichtquelle und dem Austritt in das umgebende Medium entspricht.

Die erstere Schwächung wird für eine Schicht im Abstand s von der Grenze des homogenen Zustandes gemessen durch

$$e^{-\alpha s} \text{ worei } \alpha = \frac{4\pi n \varkappa}{\lambda}.$$

Die letztere Schwächung bestimmt sich anders für eine Grenze, die einem unstetigen, anders für eine, die einem stetigen

Uebergang in den leeren Raum entspricht. Bei einer Flamme liegt meist wohl der letztere Fall vor, und wir wollen für seine Behandlung zur Vereinfachung als ein Resultat der Erfahrung einführen, daß der Uebergang aus der Flamme in die Umgebung derartig allmählig stattfindet, daß die reflektierten Wellen unmerklich sind.

Es handelt sich dann um die Integration der Gleichung für die elektrische Schwingung

$$\varepsilon \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial X}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 X}{\partial z^2},$$

wobei in der Uebergangsschicht ε und η mit z variieren, durch eine parallel $+z$ fortschreitende Welle der elektrischen Feldstärke.

Setzt man gemäß der obigen Annahme

$$X = F \cos(\nu t - f),$$

wobei F und f nur z enthalten, so resultiert leicht, falls man Differentialquotienten nach z durch Indizes bezeichnet,

27) $$-\frac{\varepsilon F \nu^2}{v^2} = F'' - F f'^2, \quad -\frac{\eta F \nu}{v v^2} = 2 F' f' + F f''.$$

Letztere Gleichung giebt

$$-\frac{\eta \nu dz}{v^2 f'} = \frac{2 dF}{F} + \frac{df'}{f'},$$

also integriert

28) $$-\int \frac{\eta \nu dz}{v^2 f'} = ln(F^2 f') + \text{Const.}$$

Hier kann man schreiben

29) $$f' = \frac{\nu}{\omega}$$

wobei ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet, die jetzt natürlich mit z variiert.

Bei Anwendung auf zwei Stellen z_0 und z_1 liefert (28)

30) $$\left\{ \begin{aligned} & \frac{F_1^2/\omega_1}{F_0^2/\omega_0} = e^{-J_{01}}, \\ & \text{wobei} \\ & J_{01} = \frac{1}{v^2} \int_{z_0}^{z_1} \eta \omega dz. \end{aligned} \right.$$

Mit η verschwindet die Absorption; ersteres ist also ein Maaß der letzteren. Für $\eta = 0$ folgt

$$\frac{F_1^2}{\omega_1} = \frac{F_0^2}{\omega_0}$$

und dies zeigt in Uebereinstimmung mit dem S. 5 Benutzten, daß nF^2 das Maaß der Energieströmung darstellt.

Auf ein unendlich kleines Wegelement $\zeta = z_1 - z_0$ in einem absorbierenden Medium angewandt folgt aus (30)

$$31) \qquad \frac{F_1^2}{\omega_1} = \frac{F_0^2}{\omega_0} e^{-J'\zeta}, \quad J' = \frac{\eta\omega}{v^2};$$

J' giebt also den mit z variierenden Absorptionsmodul.

Nun wollen wir uns daran erinnern, daß der Uebergang von der Flamme zum leeren oder Luft-Raum durch eine dünnere und kühlere Schicht der Flamme selbst vermittelt wird. Wir können uns deshalb einfachst vorstellen, daß in dieser Schicht das Produkt $\eta\omega$ für alle Farben gleichmäßig allmählig auf Null herabsinkt. Dann wird sich eine Schichtdicke in der homogenen Flamme angeben lassen, die bezüglich der Absorption (wie der Emission) in jeder Hinsicht der inhomogenen Uebergangsschicht gleichwertig ist. Die Schwächung beim Durchtritt der Welle aus der Flamme in den leeren Raum kann sonach dadurch erhalten werden, daß man anstelle der stetigen Uebergangsschicht einen unstetigen Uebergang an einer bestimmten Stelle der Schicht als äquivalente Grenze der Flamme substituiert und im Uebrigen die auf die Grenze auffallende Energieströmung ungeändert austretend denkt.

Um hiernach die Gesammtemission (**E**) einer Flamme von der äquivalenten Dicke D zu berechnen ist nach (26) zu bilden für jede Elementarschicht von der Dicke dz an der Stelle z die Emission

$$d\mathbf{E}_i = 4\pi\mathfrak{e}\frac{n\varkappa dz}{\lambda(1+\varkappa^2)} = \frac{\mathfrak{e}\alpha dz}{1+\varkappa^2};$$

diese hat innerhalb der Flamme den Weg $(D-z)$ bis zur positiven äquivalenten Grenze $z = D$ zu durchlaufen, erfährt also bis zum Austritt die Schwächung

$$e^{-\alpha(D-z)},$$

so daß resultiert

$$32) \qquad \begin{aligned}(\mathbf{E}) &= \frac{\mathfrak{e}}{(1+\varkappa^2)}\int_0^D e^{-\alpha(D-z)}\alpha dz \\ &= \frac{\mathfrak{e}}{(1+\varkappa^2)}(1-e^{-\alpha D}).\end{aligned}$$

Es mag zunächst auffallen, daß diese Formel für unendlich kleine Dicke $D = l$ nicht die Ausgangsformel (8) zurückliefert, sondern ein durch einen Faktor verschiedenes Resultat. Indessen sind die Voraussetzungen, die den beiden Formeln zu Grunde liegen, doch völlig verschieden. Die frühere setzte eine Schicht voraus, die an beiden Grenzen reflektiert, die neue eine solche ohne Reflexionen und ist daher mit (26) äquivalent.

4) Handelt es sich um eine Schicht von endlicher Dicke, die durchaus homogen ist und in parallelen Unstetigkeitsflächen nach dem umgebenden Medium begrenzt ist, so berechnet sich die Gesammtemission dann sehr leicht, wenn man annehmen kann, daß durch die Verhältnisse in der strahlenden Schicht Interferenzen zwischen den an ihren Grenzen reflektierten Wellen ausgeschlossen seien. Dies würde bei vollständig planparallelen Begrenzungen eine so große Dicke der Schicht verlangen, daß die bez. Wellen nicht mehr kohärent sind, — eine Annahme, die in der Wirklichkeit nicht mehr realisierbar ist. Dagegen würde bei unvollständigem Parallelismus die Inkohärenz dadurch entstehen, daß die verschieden oft reflektierten und in gleicher Richtung austretenden Wellen verschiedenen, (in Wirklichkeit) inkohärent schwingenden Teilen der emittierenden Schicht entstammen.

Machen wir die vorstehende Annahme (die vielleicht bei einer Geißlerschen Röhre als angenähert realisiert zu betrachten ist), so ist von den Phasenverhältnissen völlig abzusehen und sind nur die Amplitudenquadrate aller in einer bestimmten Richtung austretenden Wellen zu addieren.

Bezeichnet man wieder die Schwächungen der Amplitudenquadrate durch Absorption kurz durch die Faktoren $e^{-\alpha s}$, wo s den zurückgelegten Weg angiebt und $\alpha = \frac{4\pi n\varkappa}{\lambda}$ ist, und bezeichnet mit δ_i und ϱ_i die Schwächungsfaktoren durch Brechung und Reflexion, so liefert eine Schicht im Abstand z von der negativen Grenze zwei auf der positiven Seite austretende Wellensysteme mit der Gesammtstrahlung

$$
\begin{aligned}
d(\mathsf{E}) &= d\mathsf{E}_i \cdot \frac{\delta_i}{n} \Big\{ e^{-\alpha(D-z)} \left[1 + \varrho_i^2 e^{-2\alpha D} + \varrho_i^4 e^{-4\alpha D} + \cdots\right] \\
&\qquad + \varrho_i e^{-\alpha(D+z)} \left[1 + \varrho_i^2 e^{-2\alpha D} + \cdots\right] \Big\} \qquad\qquad (33)\\
&= \frac{d\mathsf{E}_i \,.\, \delta_i/n}{1 - \varrho_i^2 e^{-2\alpha D}} \left\{ e^{-\alpha(D-z)} + \varrho_i e^{-\alpha(D+z)} \right\},
\end{aligned}
$$

wobei wieder $d\mathsf{E}_i = \frac{\mathfrak{e}\alpha dz}{1+\varkappa^2}$.

Die Integration über alle emittierenden Schichten liefert

$$34)\qquad (\mathsf{E}) = \frac{\mathfrak{e}\delta_i(1-e^{-\alpha D})}{n(1+\varkappa^2)(1-\varrho_i e^{-\alpha D})}.$$

5) Für weitere Schlüsse bedarf man der Ausdrücke für die Schwächungsfaktoren δ_i und ϱ_i der Amplitudenquadrate beim Durchgang von innen nach außen und bei der inneren Reflexion an der Grenze. Nach den allgemeinen Regeln würde man

$$35)\qquad \delta_i = \mathfrak{d}_i\mathfrak{d}_i', \quad \varrho_i = \mathfrak{r}_i\mathfrak{r}_i', \quad \delta = \mathfrak{d}\mathfrak{d}', \quad \varrho = \mathfrak{r}\mathfrak{r}'$$

zu setzen haben, wobei die $\mathfrak{d}_i$ und $\mathfrak{r}_i$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{r}$ im Vorstehenden gegeben sind. Verfährt man so, dann ist es nicht möglich mit dem obigen Ausdruck dem Kirchhoffschen Satz $(\mathsf{E}) = \mathfrak{e}(\mathsf{A})$ zu genügen, wenn man (A) in analoger Weise berechnet, wie oben (E).

Die Schwierigkeit ist dieselbe, die mir in einem früheren Aufsatz über das Verhältniß von Emission und Absorption[1]) begegnete, wo sich auch der Ausdruck für (A) berechnet findet; derselbe lautet in der obigen Bezeichnung

$$36)\qquad (\mathsf{A}) = 1 - \varrho - \frac{\delta\delta_i e^{-\alpha D}}{1-\varrho_i e^{-\alpha D}},$$

wobei ϱ und δ wieder die Schwächungsfaktoren für den Eintritt in die absorbierende Schicht darstellen.

In der Tat, verfährt man gemäß (35) und führt die sich so ergebenden Beziehungen

$$37)\qquad \varrho = \varrho_i, \quad \delta = \frac{\delta_i}{n^2(1+\varkappa^2)}, \quad 1-\varrho_i = \frac{\delta_i}{n(1+\varkappa^2)}$$

ein so erhält man

$$38)\qquad (\mathsf{A}) = \frac{\delta_i}{n(1+\varkappa^2)}\,\frac{1-(\varrho_i+\delta_i/n)e^{-\alpha D}}{1-\varrho_i e^{-\alpha D}}$$

und der Quotient aus den Ausdrücken (34) und (38) ist nicht gleich $\mathfrak{e}$, er enthält vielmehr sogar die Dicke D der Schicht in sich, wie seinerzeit bemerkt.

6) Ich verdanke den Hinweis auf die wahrscheinliche Ursache der Schwierigkeit in der früheren Arbeit Herrn Born; sie liegt darin, daß bei energetischen Ueberlegungen der vorstehenden Art die Beziehungen (35) einen innern Widerspruch enthalten, falls sie auf absorbierende Medien angewandt werden.

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. 67, 366, bes. 374 u. f., 1899.

In der Tat folgt für die Reflexion in einem durchsichtigen Medium vom relativen Brechungsindex n gegen die Umgebung und den Austritt daraus aus (35) die Beziehung

39) $$1 = \varrho_i + \frac{\delta_i}{n},$$

welche aussagt, daß die einfallende Energie in der reflektierten und der eindringenden enthalten ist; nicht aber gilt dieses Intensitätsgesetz für ein absorbierendes Medium, wo vielmehr liefert (35)

40) $$1 = \varrho_i + \frac{\delta_i}{n(1+\varkappa^2)}.$$

Die physikalische Ursache dieser Differenz scheint darin zu liegen, daß bei Reflexionen im ersten Medium eine Art stehende Wellen auftreten, deren Unterhaltung in einen absorbierenden Medium einen Energieaufwand erfordert. In der Tat wird nach der letzten Formel ϱ_i bei gleichem δ_i größer gefunden, als nach der vorletzten.

Hieraus folgt, daß eine glatte Durchführung der oben begonnenen energetischen Betrachtung nur möglich ist für Körper von derartig geringen Werten $\varkappa$, daß man $\varkappa^2$ neben Eins vernachlässigen kann. In diesem Fall werden dann die Beziehungen (39) und (40) identisch, und der Ausdruck (38) genügt ohne weiteres der Bedingung $(\mathsf{E}) = \mathsf{e}(\mathsf{A})$.

Da dieser Fall bei Beobachtungen mitunter aktuell ist, so mag er zunächst erledigt werden. Es ist hier

$$\delta_i = \frac{4n^2}{(n+1)^2}, \quad \varrho_i = \frac{(n-1)^2 + n^2\varkappa^2}{(n+1)^2};$$

die Vernachlässigung von $n^2\varkappa^2$ neben $(n-1)^2$ würde eine geringere Annäherung bedeuten, als die von $\varkappa^2$ neben Eins, sie mag aber der Einfachheit halber gleichfalls eingeführt werden. Hieraus folgt

41) $$(\mathsf{E}) = \frac{4n\mathsf{e}(1-e^{-\alpha D})}{(n+1)^2 - (n-1)^2 e^{-\alpha D}}.$$

Es ist charakteristisch für diesen Ausdruck, daß er für $D = \infty$ ein von $\varkappa$ freies Resultat liefert, also Selbstumkehrung von Spektrallinien infolge großer Dicke der Lichtquelle nicht zuläßt.

7) Der allgemeinere Fall läßt sich nur bei teilweiser Aufgabe der Beziehungen (35) durchführen. Wir wollen zunächst sehen, welche Konsequenzen uns allein die Annahme des Kirchhoffschen Satzes liefert. Letzterer ergiebt nach (34) und (36)

$$1-\varrho = (1-\varrho)\varrho_i + \delta\delta_i = \frac{\delta_i}{n(1+\varkappa^2)}$$

d. h.

42) $$1-\varrho = \frac{\delta_i}{n(1+\varkappa^2)}, \quad 1-\varrho_i = \delta n(1+\varkappa^2).$$

Innerhalb dieser beiden Bedingungen kann man frei über die ϱ und δ verfügen, ohne mit dem Kirchhoffschen Satz in Widerspruch zu geraten.

Sucht man den Grund der Abweichung von dem Gesetz der Intensitäten in den innerhalb des absorbierenden Mediums reflektierten Wellen, so wird man die aus $\delta = \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$, $\delta_i = \mathfrak{d}_i\mathfrak{d}_i'$ folgende Beziehung

43) $$\delta_i = n^2(1+\varkappa^2)\delta$$

beibehalten und (42) schreiben

44) $$1-\varrho = n\delta, \quad 1-\varrho_i = \frac{\delta_i}{n} = \frac{N}{K},$$

$$K = (n+1)^2 + n^2\varkappa^2. \quad N = 4n(1+\varkappa^2),$$

womit nun auch $\varrho = \mathfrak{r}\mathfrak{r}'$ nicht aber $\varrho_i = \mathfrak{r}_i\mathfrak{r}_i'$ vereinbar ist. Wir gelangen so zu der Festhaltung des Intensitätsgesetzes (39) bei absorbierenden Körpern anstelle von (40), was ja nach der Lage der Dinge von vornherein einleuchtet.

Hieraus folgt dann

45) $$(\mathsf{E}) = \frac{4n\mathsf{e}(1-e^{-\alpha D})}{K-(K-N)e^{-\alpha D}}.$$

Dies wird als das wahrscheinlich gemachte Gesetz für die Emission der absorbierenden Schicht bei unregelmäßiger innerer Reflexion zu gelten haben.

Für eine unendliche Dicke liefert dasselbe

46) $$(\mathsf{E}) = \frac{4n\mathsf{e}}{(n+1)^2+n^2\varkappa^2},$$

läßt somit also Selbstumkehrung infolge großer Dicke D der Lichtquelle zu.

Was die Anwendung der erhaltenen Formeln angeht, so ist dafür zu beachten, daß die Beobachtungen über die Intensitätsverhältnisse beim Zeeman-Effekt nicht die Intensitäten für bestimmte einzelne Farben oder Frequenzen, sondern die Gesammtintensitäten aller parallel und aller normal zu der magnetischen Feldstärke schwingenden Komponenten

einer zerlegten Spektrallinie betreffen. Um diese Größen zu erhalten, hat man in den obigen Formeln je diejenigen Werte für n und $\varkappa$ einzuführen, welche der betreffenden Schwingungsrichtung entsprechen und dann über alle Frequenzen zu integrieren, wobei (E) resp. e mit (E)$d\nu$ und e$d\nu$ zu vertauschen sind. Diese Aufgabe ist ziemlich einfach wenn man $e^{-\alpha D}$ nach Potenzen von αD entwickeln und für n und $\varkappa$ eine unter häufig zulässigen Voraussetzungen gültige Annäherung einführen kann; sie ist äußerst kompliziert, wenn dieses nicht gestattet ist. In letzterem Falle wird man zu mechanischer Quadratur greifen müssen.

8) Die vorstehend angestellten Ueberlegungen gestatten nun auch, das in der früheren Arbeit nicht völlig erledigte Problem zu Ende zu führen. In dieser Arbeit war versucht, die Emission durch eine Art äquivalenter elektrischer Kräfte P_h zu erklären, welche die Elektronen ε_h im Molekül beschleunigen, nach den Formeln

$$47)\qquad \mathfrak{x}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{x}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_h}{\partial t^2} = P_h, \text{ u. s. f.}$$

Die komplexen Amplituden der P_h seien mit $\mathfrak{F}_h$ bezeichnet und abgekürzt gesetzt

$$48)\qquad \Theta_h = \vartheta^2 + i a_h \vartheta - b_h,$$

unter ϑ die reduzierte Amplitude verstanden. Die Erregung sollte in Schichten von der Dicke $\varDelta$ kohärent, aber von Schicht zu Schicht inkohärent wechselnd stattfinden. Setzte man noch kurz

$$49)\qquad \sum \frac{\mathfrak{F}_h \mathfrak{F}_h'}{\Theta_h \Theta_h'} = \Sigma,$$

wobei der Index ' die frühere Bedeutung hatte, so ergab sich für die Emission einer Schicht von der Dicke D

$$50)\qquad (\mathsf{E}) = \frac{\vartheta^2 \delta_i (1 - e^{-\alpha D}) \varDelta \Sigma}{8 v n^2 \varkappa (1 + \varkappa^2)(1 - \varrho_i e^{-\alpha D})}.$$

Dabei ist v die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum.

Um mit den früheren Formeln dieser Arbeit konformer die Frequenz $\nu = 1/\vartheta$ außerdem die Wellenlänge $\tau v = \lambda$ einzuführen, mag

$$51)\qquad 1 + i a_h \nu - b_h \nu^2 = \Pi_h \text{ und } \sum \frac{\mathfrak{F}_h \mathfrak{F}_h'}{\Pi_h \Pi_h} = S$$

gesetzt werden; dann nimmt (50) die Form an

52) $$(\mathsf{E}) = \frac{\pi\delta_i(1-e^{-\alpha D})\Delta S}{4\lambda n^3 \varkappa(1+\varkappa^2)(1-\varrho_i e^{-\alpha D})}.$$

Nun ist nach unsern Ueberlegungen unter Voraussetzungen der Beziehungen (43) und (44)

53) $$(\mathsf{A}) = \frac{\delta_i(1-e^{-\alpha D})}{n(1+\varkappa^2)(1-\varrho_i e^{-\alpha D})},$$

somit also wieder der Quotient beider Ausdrücke von der Dicke unabhängig. Außerdem aber findet sich die Emission e des schwarzen Körpers mit den Parametern der aequivalenten elektromotorischen Kräfte verknüft durch die Beziehung

54) $$\mathsf{e} = \frac{\pi\Delta S}{4\lambda n^2 \varkappa}.$$

Nun gilt nach der allgemeinen Theorie der Dispersion

55) $$2n^2\varkappa = \nu\sum\frac{\varepsilon_h a_h}{\Pi_h \Pi_h'};$$

wir erhalten somit, da $\lambda\nu = 2\pi v$,

56) $$4v\mathsf{e}\sum\frac{\varepsilon_h a_h}{\Pi_h \Pi_h'} = \Delta\sum\frac{\mathfrak{F}_h\mathfrak{F}_h'}{\Pi_h \Pi_h'}.$$

In Bereichen unmerklicher Veränderlichkeit von e kann man dem genügen, indem man die einzelnen Glieder der Summe einander gleichsetzt[1]); führt man dabei noch die reelle Amplitude F_h der aequivalenten elektromotorischen Kräfte ein, so ergiebt sich diese konstant, nämlich

57) $$F_h^2 = \frac{4v\varepsilon_h a_h \mathsf{e}}{\Delta}.$$

In Wahrheit ist e mit ν variabel und dies zeigt, daß eine Zurückführung der Emission auf aequivalente elektromotorische Kräfte in strenge nicht gelingt. Im Falle schmaler Absorptionsstreifen kommt indessen in den Summen (56) jedes Glied nur in einem engen Bereich ν zur Geltung; hier kann man dann ohne merklichen Einfluß e unter die Summe ziehen und mit seinem Wert e_h für die Eigenfrequenz ν_h des Absorptionsstreifens vertauschen sodann wiederum die Gleichung auf die einzelnen Summenglieder beziehen. Die Formel

---

1) In der früheren Arbeit ist durch eine Unaufmerksamkeit bei der Redaktion der analoge Schluß allgemein gezogen.

58) $$F_h^2 = \frac{4\nu\varepsilon_h a_h \theta_h}{\Delta}$$

würde somit die Lösung des früheren Problemes in den angegebenen Fällen enthalten. Herr Lorentz hat eine der vorstehenden verwandte Ueberlegung nicht für eine Schicht sondern für ein Raumelement angestellt[1]).

9) Die ersten Beobachtungen, die sich auf die Intensitätsverhältnisse der parallel und normal zum Magnetfeld schwingenden Komponenten beim Zeeman-Effekt beziehen, sind bekanntlich von Egoroff und Georgiewsky[2]) angestellt; dieselben erwiesen, daß bei mit Dämpfen von Natrium, Kalium, Lithium gefärbten Flammen das im Magnetfeld emittierte Licht sich nicht als natürliches darstellt, sondern einen parallel dem Feld polarisierten Anteil enthält. Lorentz[3]) zog zu der Erklärung des Phänomenes die Absorptionsverhältnisse in der Flamme heran, die im Vorstehenden eingehender erörtert worden sind, und stellte auch bei einer Natriumflamme eine orientierende quantitative Beobachtung an. Letztere bietet aber in der dabei benutzten einfachen Form eine große Schwierigkeit für die Verwertung, weil bei ihr nicht nur beide Natriumlinien zur überdeckenden Wirkung gebracht wurden, sondern auch beide Linien überdies Zerlegungen von ganz verschiedenem Typ liefern.

Ich habe dann noch auf die Möglichkeit einer andern Erklärung der Egoroff-Georgiewskyschen Beobachtung aufmerksam gemacht[4]). Da nämlich verschiedene Erscheinungen darauf hinweisen, daß die ponderabeln Moleküle aeolotrope Struktur haben und sich im Magnetfeld orientieren, so entsteht die Möglichkeit, daß die molekulare Emission für die Komponenten parallel und normal zum Feld primär verschieden ist. Eine Feststellung derartiger Wirkungen, für welche eine Aussonderung der Absorptionen in der Lichtquelle erforderlich wäre, würde ein großes, theoretisches Interesse bieten.

Als Vorarbeiten für derartige Untersuchungen sind die Beobachtungen angestellt worden, für welche wir uns einer Beihülfe der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu erfreuen hatten und über deren erste Resultate nachstehend berichtet werden wird.

Das Neue bei denselben ist die Untersuchung der Polarisationsverhältnisse (nicht des ganzen von der Quelle ausgehenden Lichtes, sondern) der einzelnen Spektrallinien;

1) H. A. Lorentz, Amsterd. Proc. 28. Oct. 1905; Phys. Ztschr. **11**, 14, 1910.
2) N. Egoroff und N. Georgiewsky, C. R., **124**, p. 949, 1897.
3) H. A. Lorentz, Amsterd. Proc. **6**, p. 193, 1897, Arch. Nécrl. (2) **2**, p. 1, 1899.
4) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, Leipzig 1908, p. 78.

die Methode ist im übrigen nichts weiter als eine Verfeinerung der von den obengenannten Forschern angewandten. Die bisherigen Messungen sind an den von Geißlerröhren ausgehenden Lichtarten angestellt worden.

Die bezüglichen Röhren waren mit ihren Kapillaren longitudinal in dem Magnetfelde angebracht; bei einer solchen Orientierung erfahren die Stromlinien bekanntlich die geringste Ablenkung durch das Feld, das Leuchten der Röhren also die geringste Aenderung. Bei den Versuchen wurde den Röhren eine vertikale Stellung gegeben. Das ausgesandte Licht wurde durch ein Linsensystem von ziemlich großer Brennweite auf ein Spektrometer geworfen und mittelst des letzteren analysiert. Der Spalt des Instrumentes war weit geöffnet, derart, daß bei Erregung des Feldes (selbst wenn dessen Stärke dazu an sich ausgereicht hätte) keine Zerlegung der Spektrallinien eintreten konnte, sondern das ganze Spaltbild (für jede Spektralfarbe) mit parallel und normal zum Felde polarisiertem Licht erfüllt war.

Das von der Geißlerröhre ausgehende Licht passierte zunächst den Glasplattensatz eines Polarimeters, bestehend aus zwei Systemen von je 4 Planplatten, die vom Beobachter durch einen einfachen Mechanismus um zwei parallele horizontale Axen meßbar gedreht werden konnten (nach dem Schema ////\\\\). Diese Systeme gaben der vertikal polarisierten Komponente des hindurchgehenden Lichtes eine angebbar veränderliche Schwächung gegenüber der horizontal polarisierten; durch die symmetrische Drehung der beiden Hälften war dabei eine Verschiebung des Bildes der Geißlerröhre auf dem Spektrometerspalt vermieden.

Direkt vor dem Spalt war ein dünner Keil von Kalkspat befestigt, durch einen Glaskeil kompensiert; die brechende Kante lag unter 45′ gegen die optische Axe und war horizontal aufgestellt. Im Okular befand sich ein Nicol mit vertikaler oder horizontaler Polarisationsebene.

Infolge dieser Einrichtung sah der Beobachter im allgemeinen jede Spektrallinie von horizontalen Interferenzstreifen durchzogen, — die nur verschwanden, wenn mit Hülfe des Glasplattensatzes das einfallende Licht bez. der horizontal und der vertikal polarisierten Komponenten auf gleiche Intensität gebracht war.

Mit diesen Hilfsmitteln wurde nun folgendermaßen beobachtet.

Eine bestimmte (breite) Spektrallinie wurde mit dem Okularspalt isoliert und nun bei unerregtem Feld der Glasplattensatz aus der Vertikalstellung so weit gedreht, daß deutliche Interferenzstreifen auftraten. Hierauf wurde die Drehung langsam rückgängig gemacht, bis die Streifen verschwanden. Die Genauigkeit dieser

letzteren Einstellung ließ sich durch den bekannten Kunstgriff steigern, den Kalkspatkeil ein wenig auf und ab zu bewegen (was durch eine einfache Vorrichtung dem Beobachter leicht möglich gemacht war); in der Tat ist das Auge für Inhomogenitäten in der Beleuchtung viel empfindlicher, wenn dieselben bewegt werden, als wenn sie ruhen. Unter günstigen Umständen stimmten die wiederholten Einstellungen bis auf 1° überein.

Nun wurde das Feld erregt und die bez. Beobachtung wiederholt. Der Regel nach ergab sich dabei das Verschwinden der Interferenzstreifen bei größeren Neigungswinkeln der Glasplatten, was darauf hindeutete, daß das im Magnetfeld emittierte Licht einen Ueberschuß von vertikal, d. h. parallel den Kraftlinien polarisiertem enthielt.

10. Die definitiven Beobachtungen hat Herr Dr. Försterling angestellt. Während die blaugrüne und die rote Wasserstofflinie, so wie die beiden gelben, die grüne und die violette Quecksilberlinie keine merkliche Wirkung des Magnetfeldes auf die Polarisation des emittierten Lichtes erkennen ließen, ergaben einige Linien des Heliumspektrums Effekte, die der Messung bequem zugänglich waren. An ihnen wurde insbesondere auch der Einfluß der magnetischen Feldstärke auf die Erscheinung studiert; die den verschiedenen magnetisierenden Strömen entsprechenden Feldstärken waren zu diesem Zweck im Voraus mit Hilfe einer Wismutspirale bestimmt worden.

Die Beobachtungen von Dr. Försterling an der hellroten und an der gelben Heliumlinie ergaben folgende Resultate:

H	Hellrot		Gelb	
	$\varphi-\varphi_0$	A_p/A_s	$\varphi-\varphi_0$	A_p/A_s
900	2.0	0,987	0	1
1300	2,5	0,984	1,5	0,992
1500	4,5	0,968		
1700	6,5	0,958	3	0,980
2100	9	0,921	7	0,941
2300	10	0,910		
2800	10,5	0,905	10	0,910
3700	12,5	0,855		
4700	10,5	0,905	10	0,910
6100	9	0,921	9,5	0,915
6800	9	0,921		
7000	8,5(?)	0,924	9	0,921

Hierin bezeichnen $\varphi - \varphi_0$ die direkt beobachteten Differenzen der Einstellungen am Polarimeter, φ^0 war rund $= 12^0$. A_p/A_s ist das Verhältniß der emittierten elektrischen Schwingungsamplituden parallel und senkrecht zu den Kraftlinien, $(A_p/A_s)^2$ also das Verhältniß der bezüglichen Intensitäten.

Für die Berechnung dieser Größen ist nachstehende Ueberlegung benutzt. Sei h die Anzahl der Platten des Polarimeters, φ der Einfalls-, ψ der Brechungswinkel an denselben, A_p/A_s wieder das von der Geißlerröhre emittierte Amplitudenverhältniß. Dann kommt in dem Kalkspatkeil zur Wirkung das modifizierte Verhältniß

$$\frac{A_p'}{A_s'} = \frac{A_p}{A_s} \frac{1}{\cos^{2h}(\varphi - \psi)}.$$

Das Verschwinden der Streifen findet statt, wenn dieser Quotient einen gewissen, nahe Eins liegenden und für das physiologische Unterscheidungsvermögen charakteristischen Wert k annimmt, d. h. für

$$k = \frac{A_p}{A_s} \frac{1}{\cos^{2h}(\varphi - \psi)}.$$

Bei Beobachtungen ohne Magnetfeld ist $A_p/A_s = 1$, somit in früherer Bezeichnung

$$k = \frac{1}{\cos^{2h}(\varphi_0 - \psi_0)}.$$

Hieraus folgt die zur Berechnung benutzte Formel

$$\frac{A_p}{A_s} = \frac{\cos^{2h}(\varphi - \psi)}{\cos^{2h}(\varphi_0 - \psi_0)}.$$

Zweierlei ist an den erhaltenen Zahlen bemerkenswert. Einmal der Beginn einer merklichen Wirkung bereits bei sehr kleinen Feldstärken, — ein Resultat, das mit dem von andern Beobachtern an Natriumflammen erhaltenen übereinstimmt. Sodann und besonders aber die Erreichung eines Maximums der Wirkung bei einer Feldstärke von ca. 3700 Gauß; eine Tatsache, die ganz sichergestellt ist und sich drastisch dadurch demonstrieren läßt, daß, wenn man bei 3700 Gauß auf Verschwinden der Streifen einstellt, diese Streifen bei Verstärkung des Feldes auf 7000 Gauß wieder erscheinen.

Es wird die Aufgabe weiterer Beobachtungen sein, aufzuklären, ob bei diesem Effekte sekundäre Umstände mitwirken, und wenn nicht, wie derselbe theoretisch zu deuten ist.

Gegenüber den oben beschriebenen Wirkungen erwiesen sich die bei den andern Heliumlinien stattfindenden als unbedeutend.

Daß die sehr dunkeln Linien keine merklichen Effekte erkennen ließen, könnte zwar auf die hier beträchtlich verminderte Absorption und gesteigerte Schwierigkeit der Beobachtung zurückgeführt werden; daß aber die sehr helle grüne Linie ($\lambda = 5015$) erst von $H = 2000$ an die Andeutung eines Effektes lieferte und A_p/A_s 0,973 erreichte, analog die helle blaugrüne ($\lambda = 4922$) erst von $H = 2200$ an Wirkungen ergab und für sie A_p/A_s nur 0,987 ereichte, kann wohl kaum auf Rechnung der Intensitätsverhältnisse gesetzt werden.

Die Heliumlinien, obwohl sämmtlich Triplets liefernd, scheinen sich bezüglich der Intensitätsverhältnisse der Schwingungen parallel und senkrecht zum Magnetfeld faktisch verschieden zu verhalten. Worauf diese Verschiedenheit beruht müssen weitere Untersuchungen aufklären.

Zusatz

von **H. A. Lorentz** in Leiden[1]).

Die Frage ob elektrische und magnetische Emission verschiedene Resultate geben können, scheint mir sehr interessant. Ich habe stets angenommen, daß die Ausstrahlung elektrisch erregt wird, und finde nun für das Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers in dem betrachteten Medium

$$1)\qquad \mathfrak{e}_i = \frac{\mathfrak{e}_0}{1+\varkappa^2},$$

wo $\mathfrak{e}_0$ die Emission im Vakuum ist. Das entspricht der von Ihnen angegebenen Formel (19).

Für die Emission einer unendlich dünnen Schicht (Dicke l), die auf beiden Seiten mit Luft in Berührung ist, finde ich ebenso wie Sie (8)

$$2)\qquad \mathsf{E}_0 = \frac{2\nu\varkappa n^2}{c} l \mathfrak{e}_0$$

1) Die in obigem Zusatz wiedergegebenen Entwickelungen sind in einem Brief enthalten, den ich von Herrn Prof. Lorentz als Antwort auf die Mitteilung eines Teiles meiner vorstehenden Ueberlegungen, insbesondere den S. 74 u. f. befindlichen erhielt. Sie benutzen nicht nur einen andern Weg, als die meinigen, sondern behandeln auch die bezüglichen Probleme zum Teil eingehender, wie z. B. der Vergleich von S. 81 und 95 dartut. Was die Emission der Schicht von endlicher Dicke angeht, so faßt Herr Lorentz das bezügliche Problem von vornherein anders als ich, — er setzt regelmäßige Reflexionen an den Grenzen und Interferenz der verschieden oft reflektierten Wellen voraus, ich (in Rücksicht auf die beim Experiment vorliegenden Verhältnisse) unregelmäßige Reflexion; im ersten Falle sind Amplituden, im zweiten Intensitäten zu addieren. Voigt.

(n reeller Brechungsindex, ν Frequenz, c Geschw. im Aether), für die Emission einer Schicht im Inneren des Mediums aber (16)

3)
$$\mathsf{E}_i = \frac{1}{n(1+\varkappa^2)}\,\mathsf{E}_0.$$

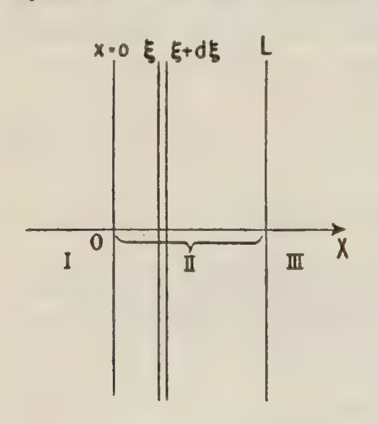
Ich gelange zu dieser Formel auf einem dem von Ihnen angegebenen ganz ähnlichen Wege; um aber das Resultat noch weiter zu verifizieren betrachte ich einen etwas allgemeineren Fall. Vorher bemerke ich, daß, wenn

$$n' = n(1 - i\varkappa)$$

der komplexe Brechungsindex ist, ein sich in der Richtung der x-Achse fortpflanzendes Lichtbündel etwa durch die Gleichungen

$$\mathfrak{E}_y = a e^{i\nu\left(t - \frac{n'}{c}x\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = a n' e^{i\nu\left(t - \frac{n'}{c}x\right)}$$

dargestellt werden kann (ich setze $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, sodaß $\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -c\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$ sein muß). Ist an irgend einer Stelle die reelle Amplitude von $\mathfrak{E}_y : q$, so kann man für den Poyntingschen Energiestrom setzen



4)
$$\tfrac{1}{2}\, c n q^2$$

und für die Wärmeentwicklung pro Volumeneinheit

5)
$$\varkappa n^2 \nu q^2.$$

Das Medium erfülle die Schicht zwischen $x = 0$, $x = L$; auf beiden Seiten befinde sich das Vakuum (scharfe Begrenzung). Ich betrachte die Strahlung insofern sie von der unendlich dünnen Schicht $d\xi$ ausgeht. Die direkte Strahlung sei auf der rechten Seite von $\xi + d\xi$

$$\mathfrak{E}_y = a e^{i\nu\left[t - \frac{n'}{c}(x-\xi)\right]}, \quad \mathfrak{H}_z = a n' e^{i\nu\left[t - \frac{n'}{c}(x-\xi)\right]}$$

und auf der linken Seite von ξ

$$\mathfrak{E}_y = a e^{i\nu\left[t + \frac{n'}{c}(x-\xi)\right]}, \quad \mathfrak{H}_z = -a n' e^{i\nu\left[t + \frac{n'}{c}(x-\xi)\right]}.$$

Die Amplitude a sei reell und vorläufig unbekannt.

Durch wiederholte Reflexion an $x = 0$, $x = L$ entstehen hieraus Lichtbewegungen, die man folgendermaßen zusammenfassen kann:

In II nach rechts

$$\mathfrak{E}_y = a' e^{iv\left(t - \frac{n'}{c} x\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = a' n' e^{iv\left(t - \frac{n'}{c} x\right)};$$

in II nach links

$$\mathfrak{E}_y = a'' e^{iv\left(t + \frac{n'}{c} x\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = -a'' n' e^{iv\left(t + \frac{n'}{c} x\right)};$$

in III nach rechts

$$\mathfrak{E}_y = a''' e^{iv\left(t - \frac{x}{c}\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = a''' e^{iv\left(t - \frac{x}{c}\right)};$$

in I nach links

$$\mathfrak{E}_y = a^{IV} e^{iv\left(t + \frac{x}{c}\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = -a^{IV} e^{iv\left(t + \frac{x}{c}\right)}.$$

Aus den Grenzbedingungen folgt

6)
$$\begin{aligned}
a' &= -a(1-n') \frac{(1+n') e^{r(L-\xi)} - (1-n') e^{-r(L-\xi)}}{N} \\
a'' &= -a(1-n') \frac{(1+n') e^{-r(L-\xi)} - (1-n') e^{-r(L+\xi)}}{N} \\
a''' &= 2an' e^{\frac{iv}{c} L} \frac{(1+n') e^{r\xi} - (1-n') e^{-r\xi}}{N} \\
a^{IV} &= 2an' \frac{(1+n') e^{r(L-\xi)} - (1-n') e^{-r(L-\xi)}}{N}.
\end{aligned}$$

Hier ist

$$r = \frac{ivn'}{c}$$

$$N = (1+n')^2 e^{rL} - (1-n')^2 e^{-rL}.$$

Wenn wir $x = 0$ mit ξ und $x = L$ mit $\xi + d\xi$ zusammenfallen lassen, sodaß die ganze Schicht unendlich dünn ist, so kann man in diesen Ausdrücken alle Exponentialgrößen gleich Eins setzen. Man findet dann

$$a''' = n'a.$$

(Natürlich hätte man diesen Fall in einfacherer Weise nach derselben Methode mit Beschränkung von vornherein auf eine unendlich dünne Schicht behandeln können. Man kann dann nämlich in den Grenzbedingungen sowohl für $x = 0$, wie auch für $x = L$, alle Exponentialgrößen fortlassen; hierdurch erhält man

$$a + a' + a'' = a'''$$
$$an' + a'n' - a''n' = a'''$$
$$a + a' + a'' = a^{IV}$$
$$-an' + a'n' - a''n' = -a^{IV},$$

also $a' = a'' = \frac{1}{2}(n'-1)a, \quad a''' = a^{IV} = n'a.$

Die äußere Strahlung, die von der Platte ausgeht, beträgt also

$$\frac{1}{2}|a'''|^2 c = \frac{1}{2}|n'|^2 a^2 c = \frac{1}{2}n^2(1+\varkappa^2)a^2 c.$$

Dies muß nun den Wert (2) haben. Also

7) $$a^2 = \frac{2 E_\nu}{n^2(1+\varkappa^2)c}.$$

Es war aber a die Amplitude der im Inneren des Mediums von einer unendlich dünnen Schicht ausgehenden Strahlung. Der entsprechende Energiefluß ist nach (4)

$$E_\nu = \frac{1}{2}cna^2,$$

woraus sich (3) ergibt.

Um nun das Resultat zu verifizieren, kehre ich zu der Schicht von der endlichen Dicke L zurück. Aus (5) erhält man für die nach links gehende Strahlung insofern sie von der Schicht $d\xi$ herrührt,

$$\frac{1}{2}|a^{IV}|^2 c = 2a^2|n'|^2 c \frac{|A|^2}{|N|^2},$$

wenn man zur Abkürzung in (6)

8) $$(1+n')e^{r(L-\xi)} - (1-n')e^{-r(L-\xi)} = A$$

setzt. Berücksichtigt man (7) und (3), so verwandelt sich der gefundene Ausdruck in

$$\frac{8\nu n\varkappa^2}{c}\,\mathsf{E}_\nu \frac{|A|^2}{|N|^2}\,d\xi,$$

und die Emission der ganzen Schicht beträgt somit

9) $$E_\nu = \frac{8\nu n\varkappa^2}{c}\,\mathsf{E}_\nu \int_0^L \frac{|A|^2}{|N|^2}\,d\xi.$$

Wir wollen dies mit dem Absorptionsvermögen der Schicht vergleichen. Fällt auf dieselbe von links ein Lichtbündel

$$\mathfrak{E}_y = a e^{in\left(t - \frac{x}{c}\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = a e^{in\left(t - \frac{x}{c}\right)},$$

so entsteht in der Schicht eine Lichtbewegung, die man zusammenfassen kann in ein Bündel

$$\mathfrak{E}_y = b e^{in\left(t - \frac{n'}{c}x\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = b n' e^{in\left(t - \frac{n'}{c}x\right)},$$

das nach rechts und ein Bündel

$$\mathfrak{E}_y = a' e^{in\left(t + \frac{n}{c}x\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = -a' n e^{in\left(t + \frac{n}{c}x\right)}$$

das nach links geht. Ich finde nun

$$a = \varepsilon \frac{2(1+n)e^{\nu L}}{N}$$

$$a' = -\varepsilon \frac{2(1-n)e^{-\nu L}}{N},$$

wo ν und N die frühere Bedeutung haben. An der Stelle $x = \xi$ ist nun im Inneren

$$\mathfrak{E}_y = 2\varepsilon \frac{(1+n)e^{\nu(L-\xi)} - (1-n)e^{-\nu(L-\xi)}}{N} e^{int}$$

$$= 2\varepsilon \frac{A}{N} e^{int}. \quad \text{(vgl. (7))}$$

Somit beträgt, wenn ε reell ist, die Wärmeentwicklung in der Schicht $d\xi$ nach (5)

$$\varkappa n^2\, 4\varepsilon^2 \frac{|A^2|}{|N^2|}\, d\xi.$$

Integriert man dies von 0 bis L und bemerkt man, daß die einfallende Energie $\frac{1}{2}\varepsilon^2 c$ ist, so findet man für das Absorptionsvermögen der Schicht

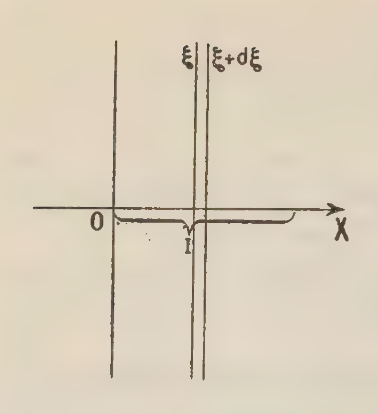
(10) $$\mathsf{A}_z = \frac{8\varkappa n^2}{c} \int_0^L \frac{|A^2|}{|N^2|}\, d\xi.$$

Hieraus in Verbindung mit (9) folgt schließlich

$$\frac{\mathsf{E}_z}{\mathsf{A}_z} = \mathsf{e}_z,$$

eine Beziehung, die sich übrigens auch bestätigt, wenn man in (9) und (10) die Integralzeichen fortläßt, und sich also auf die Emission (nach außen hin) und die Absorption einer einzigen Schicht $d\xi$ beschränkt.

Wir legen die YZ-Ebene in das betrachtete Medium, welches sich nach rechts hin bis ins Unendliche und nach der linken Seite bis auf beliebige Entfernung erstrecken möge. Da ein von links kommendes Bündel an der Grenze des rechts von YZ liegenden



Teiles I des Mediums nicht reflektiert und am Ende in diesem Teil völlig absorbiert wird, so ist I den von links kommenden Strahlen gegenüber als vollkommen schwarz zu betrachten. Wir werden also $\mathfrak{e}_i$ erhalten, wenn wir die von I herrührende, durch die *YZ*-Ebene hindurchgehende Strahlung berechnen. Nun beträgt die von der Schicht $d\xi$ ausgehende Strahlung nach (3) und (2)

$$\frac{2\nu\varkappa n}{c(1+\varkappa^2)}\,\mathfrak{e}_0\,d\xi$$

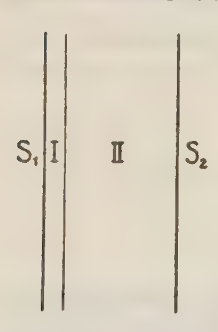
und hiervon erreicht der Teil

$$e^{-\frac{2\nu\varkappa n}{c}\xi}$$

die *YZ*-Ebene. Also

$$\mathfrak{e}_i = \frac{2\nu\varkappa n}{c(1+\varkappa^2)}\,\mathfrak{e}_0\int_0^\infty e^{-\frac{2\nu\varkappa n}{c}\xi}\,d\xi = \frac{\mathfrak{e}_0}{1+\varkappa^2},$$

die Gleichung (1).



Zur Bestätigung dieses Resultates kann noch folgende Betrachtung dienen. Es seien S_1 und S_2 zwei schwarze Scheiben, I eine Schicht des Mediums, so dünn, daß man von ihrer Emission und Absorption absehen kann, II Vakuum. Ich bezeichne mit α_i und α die Reflexionskoeffizienten an der Grenze I, II, wenn die Strahlen von links, bezw. von rechts einfallen. Die Scheibe S_1 strahlt aus $\mathfrak{e}_i$ und erhält davon zurück $\alpha_i\mathfrak{e}_i$; außerdem erhält sie von S_2 die Energie $(1-\alpha)\,\mathfrak{e}_0$. Es muß also sein

$$\mathfrak{e}_i(1-\alpha_i) = \mathfrak{e}_0(1-\alpha)$$

und das ist wirklich der Fall, da

11) $$\alpha = 1-\frac{4n}{(n+1)^2+n^2\varkappa^2}, \quad \alpha_i = 1-\frac{4n(1+\varkappa^2)}{(n+1)^2+n^2\varkappa^2}$$

ist.

Es ist bemerkenswert, daß in diesem Fall nicht, wie bei einem durchsichtigen Körper, $\alpha_i = \alpha$ ist; die Differenz hängt mit einem eigentümlichen Umstand zusammen.

Es ist nämlich sowohl bei der inneren wie auch bei der äußeren Reflexion die gespiegelte (komplexe) Amplitude

$$\pm \frac{n'-1}{n'+1} a,$$

wenn a die einfallende Amplitude ist. Bei der äußeren Reflexion kann man nun die gewöhnliche Betrachtung anwenden, und schließen, daß die reflektierte Intensität der Bruchteil

$$\left| \frac{n'-1}{n'+1} \right|^2$$

der einfallenden ist.

Bei der inneren Reflexion ist dies nicht statthaft, und zwar weil in diesem Fall der Energiestrom nicht mehr als die Differenz zweier Ströme, die zu dem einfallenden, bezw. dem reflektierten Bündel gehören, aufgefaßt werden kann. Ist nämlich das einfallende Licht

$$\mathfrak{E}_y = a e^{i\nu\left(t - \frac{n'x}{c}\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = a n' e^{i\nu\left(t - \frac{n'x}{c}\right)},$$

so ist das reflektierte

$$\mathfrak{E}_y = a \cdot \frac{n'-1}{n'+1} e^{i\nu\left(t + \frac{n'x}{c}\right)}, \quad \mathfrak{H}_z = -a \frac{n'-1}{n'+1} n' e^{i\nu\left(t + \frac{n'x}{c}\right)}$$

(Grenzfläche $x = 0$). Die wirklichen Werte sind also für $x = 0$, wenn $n' = u e^{iv}$, $\frac{n'-1}{n'+1} = p e^{iq}$,

$$\mathfrak{E}_y = a \cos \nu t + p a \cos (\nu t + q),$$
$$\mathfrak{H}_z = a u \cos (\nu t + v) - p a u \cos (\nu t + q + v),$$

und hieraus folgt für den Energiestrom

$$c \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z = c a^2 \{ u \cos \nu t \cos (\nu t + v) - p^2 u \cos (\nu t + q) \cos (\nu t + q + v) +$$
$$+ p u \cos (\nu t + q) \cos (\nu t + v) - p u \cos \nu t \cos (\nu t + q + v \}.$$

Der Mittelwert während einer vollen Periode ist:

$$\tfrac{1}{2} c a^2 \{ u \cos v - p^2 u \cos v + 2 p u \sin q \sin v \},$$

oder, da

$$u \cos v = n$$
$$u \sin v = -n\varkappa$$
$$p \sin q = -\frac{2n\varkappa}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}$$

ist,

$$\tfrac{1}{2} ca^2 n \left\{1 - p^2 + \frac{4n\varkappa^2}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}\right\}.$$

Da es in Wirklichkeit nur einen Energiefluß gibt, so ist die Zerlegung in zwei Ströme einigermaßen willkürlich. Indes, wenn wir sagen, daß der Strom $\frac{1}{2} ca^2 n$ nach der Grenzfläche hinfließt, so müssen wir sagen, daß der Strom

$$\tfrac{1}{2} ca^2 n \left\{p^2 - \frac{4n\varkappa^2}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}\right\}$$

von ihr zurückkehrt. Für den Reflexionskoeffizienten α_i müssen wir also setzen

$$\alpha_i = p^2 - \frac{4n\varkappa}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}.$$

Andererseits ist

$$\alpha = \left|\frac{n'-1}{n'+1}\right|^2 = p^2 = 1 - \frac{4n}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}$$

und wir finden also für α_i den Wert (11).

Der Wert (3) für die innere Emission führte bei Betrachtung einer beliebig dicken Schicht zu einem Resultat, das mit dem Kirchhoffschen Gesetz im Einklang steht. Die Schicht war scharf gegen das Vakuum begrenzt. Man muß natürlich auch zu dem von dem K.schen Gesetze geforderten Resultat kommen, wenn man, wie Sie es getan haben, annimmt, daß die Uebergänge so allmählig sind, daß keine nennenswerte Reflexion stattfindet.

Ich stieß hier auf eine Schwierigkeit, die sich erst dadurch beseitigen ließ, daß ich in dem Ausdruck (3) das Glied $\varkappa^2$ vernachlässigte. Diese Vernachlässigung läßt sich nun auch motivieren.

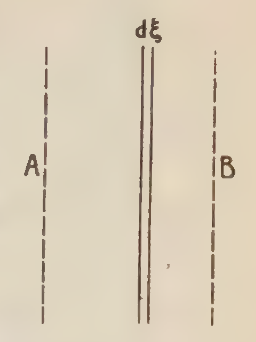
Wenn keine Reflexion stattfinden soll, so muß die Dicke der Grenzschicht viele Wellenlängen betragen; also, wenn wir verlangen, daß die Flamme nicht alles auf sie fallende Licht absorbiert, so müssen wir annehmen, daß die Absorption auf einer der Wellenlänge gleichen Strecke sehr wenig beträgt und das erfordert einen sehr kleinen Wert von $\varkappa$.

Vernachlässigen wir $\varkappa^2$ und setzen also nach (2) und (3)

$$\mathsf{E} = \frac{2\nu\varkappa n}{c} l\theta_0,$$

so wird alles sehr einfach, da man bei Abwesenheit von Reflexionen die Durchlässigkeit einer beliebigen Schicht aus den in ihren einzelnen Elementen stattfindenden Absorptionen berechnen kann, wobei sich dann für beide Fortpflanzungsrichtungen die gleiche Durchlässigkeit ergibt.

Es sei nun $d\xi$ eine beliebige Schicht in einem etwa zwischen den Ebenen A und B sich erstreckenden Medium mit allmähligen Grenzübergängen; D sei der Durchlässigkeitskoeffizient für den zwischen $d\xi$ und B liegenden Teil. Offenbar ist dann für die von $d\xi$ ausgehende rechts von B bestehende Strahlung zu setzen



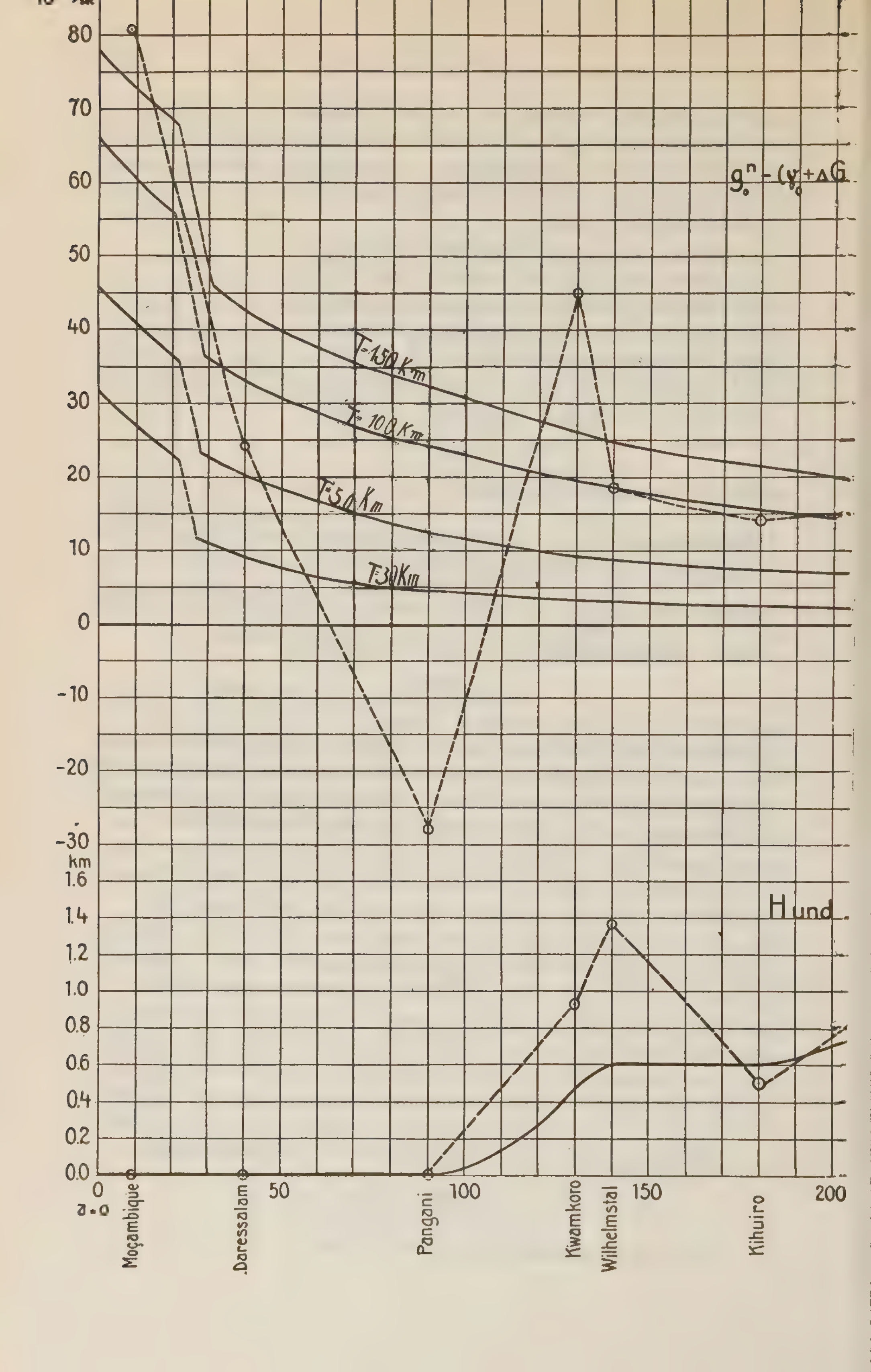
12) $$D \cdot \frac{2\nu\varkappa n}{c} \mathfrak{e}_0 d\xi.$$

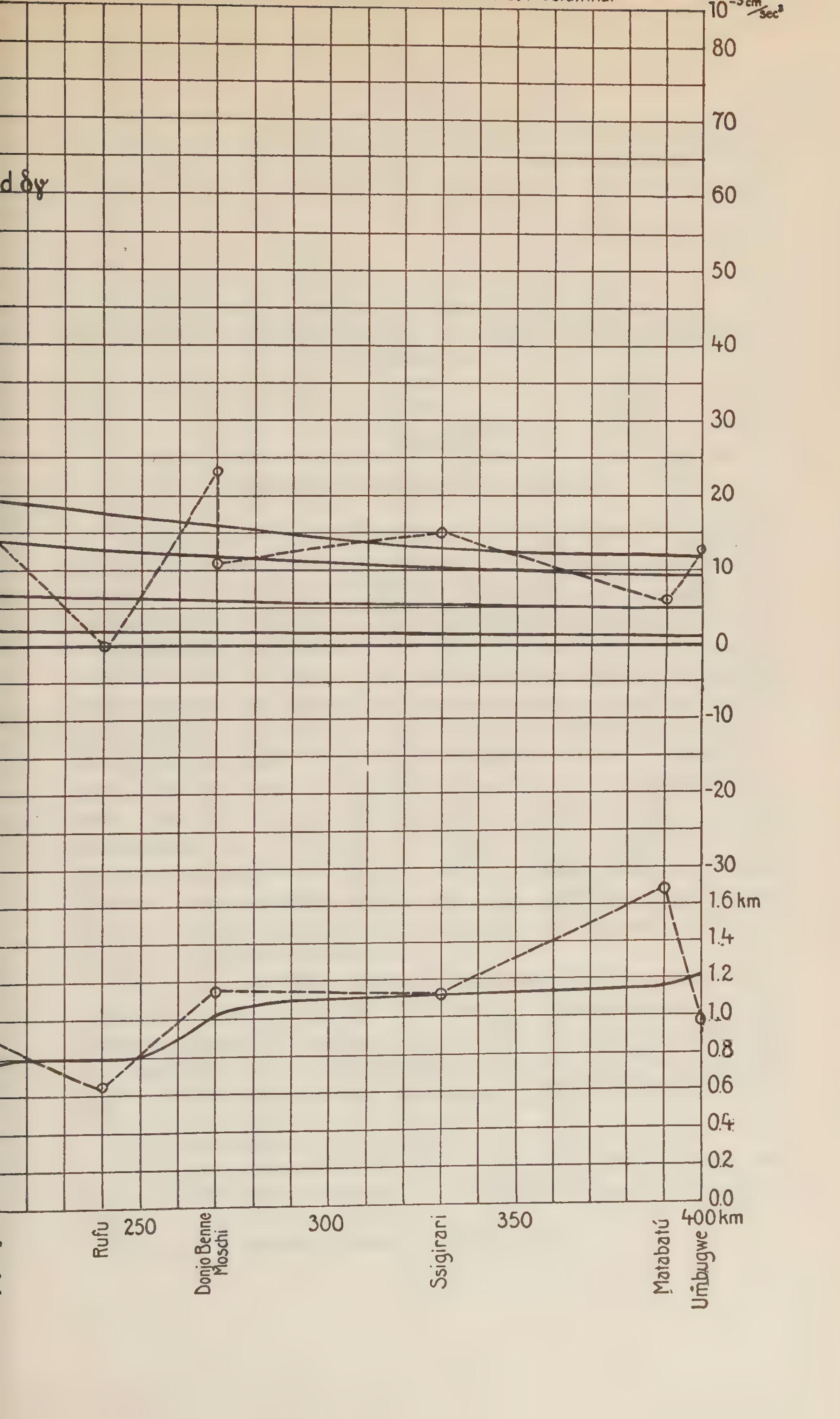
Fällt andererseits von der rechten Seite her ein Bündel von der Intensität $\mathfrak{J}$ auf B, so ist der Teil, der bis zur Schicht $d\xi$ vordringt, $D\mathfrak{J}$ und in der Schicht wird der Teil $D\mathfrak{J} \cdot \frac{2\nu\varkappa n}{c} d\xi$ absorbiert. Das „Absorptionsvermögen“ der Schicht $d\xi$ ist also

$$D \cdot \frac{2\nu\varkappa n}{c} d\xi.$$

Dividiert man (12) hierdurch, so erhält man $\mathfrak{e}_0$, wie es sein muß.

Auch für die ganze Flamme kann man, wenn man einmal das Kirchhoffsche Gesetz zu Grunde legt, die Emission berechnen, indem man das Absorptionsvermögen mit $\mathfrak{e}_0$ multipliziert.


80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
km
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
a = 0
50
100
150
200
T=150 Km
T=100 Km
T=50 Km
T=30 Km
H und
Moçambique
Daressalam
Pangani
Kiwamkoro
Wilhelmstal
Kihuiro



d δγ
10^{-3} cm/sec²
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
1.6 km
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
250
300
350
400 km
Rufu
Donjo Benne Moschi
Ssigirari
Matabatú
Umbugwe

Ueber die Radioaktivität der Luft auf dem offenen Meere.

Von

C. Runge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Januar 1911.

Seitdem im Jahre 1901 Elster und Geitel[1]) die Entdeckung machten, daß auf einem negativ geladenen Drahte sich aus der atmosphärischen Luft eine radioaktive Substanz niederschlägt, sind von zahlreichen Forschern die radioaktiven Emanationen der atmosphärischen Luft, die sich auf diese Weise verraten, untersucht worden, wobei die Natur der anwesenden Emanationen durch die charakteristischen Formen der Abklingungskurven mit Sicherheit festgestellt werden konnte. Sowohl auf dem Lande wie auf dem Meere sind Versuche dieser Art angestellt worden. So viel ich weiß, sind indessen die bisher auf dem Meere angestellten Versuche, bei denen eine Abklingungskurve beobachtet ist, in einer Entfernung von nicht mehr als einigen hundert Seemeilen von der Küste gemacht worden[2]). In dieser geringen Entfernung kann die Luft einige Stunden vorher über Land gestrichen sein, so daß die auf dem Meere festgestellte Radioaktivität nicht aus dem Meerwasser zu stammen braucht.

Es schien mir daher lohnend, bei Gelegenheit einer Reise von Westindien über Galveston nach Europa, Beobachtungen in der Nähe der Küste mit solchen in der Mitte des atlantischen Ozeans zu vergleichen. Der Norddeutsche Lloyd hatte die Güte, mir und meinem Assistenten auf dem Frachtdampfer Wittenberg freie Über-

1) Elster und Geitel. Phys. Zeitschr. Bd. 2. S. 590. 1901.

2) F. Linke, Göttinger Nachr. 1906. S. 490 gibt Aktivierungszahlen, die er mitten im stillen Ozean bestimmt hat, aber ohne Beobachtung der Abklingungskurve.

fahrt und die Erlaubnis zur Anstellung der Versuche zu gewähren. Der Direktion möchte ich auch an dieser Stelle dafür meinen Dank aussprechen. Auch Herrn Kapitän von Senden und den Offizieren der Wittenberg bin ich für die immer bereite liebenswürdige Hilfe zu Dank verpflichtet.

Die Apparate waren identisch mit denen, die ich im Jahre 1905 benutzt habe[1]). Sie gehören dem Göttinger geophysikalischen Institut und waren mir von dem Institutsdirektor Herrn E. Wiechert freundlichst mit der Wittenberg bei ihrer Ausfahrt nach Havanna geschickt worden. Die Art der Beobachtung war ebenfalls die gleiche, sodaß ich auf die frühere Beschreibung verweisen kann. Der aktivierte Kupferdraht war 10 m lang. Die Batterie von Zamboni-Säulen hatte durch den Transport und die Seeluft einigermaßen gelitten. Die negative Ladung des Drahtes konnte infolgedessen nicht so hoch getrieben werden, wie ich gewünscht hätte. Bei trübem Wetter waren überhaupt keine Versuche möglich. Die Spannung war nur dann einigermaßen ausreichend, wenn die Batterie von der Sonne bestrahlt wurde. Gegen das von Gerdien konstruierte Elektroskop läßt sich einwenden, daß bei den anzuwendenden Spannungen der zwischen dem Blättchenträger und dem Gehäuse übergehende Entladungsstrom nicht gesättigt ist. Dieser Umstand würde sehr störend sein, wenn man Entladungsströme vergleichen wollte, die verschiedenen Potentialen des Elektroskops entsprechen. Bei dem gleichen Potential des Elektroskops kann man jedoch mit ausreichender Genauigkeit annehmen, daß die Entladungsströme wenn auch nicht gesättigt so doch den Sättigungsströmen proportional sind. Man kann also die beobachteten Entladungsströme der ionisierenden Wirkung des aktivierten Drahtes proportional setzen und bekommt die richtige Abklingungskurve, wofern diese Entladungsströme sich nur immer auf dasselbe Potential des Elektroskops beziehen. Das Elektroskop muß also für jede Messung eines Entladungsstroms immer wieder von Neuem aufgeladen werden. Die Richtigkeit dieser Behauptung habe ich dadurch geprüft, daß ich die Entladungsströme untersuchte, die durch polonisierte Drähte, die an Stelle des in der Atmosphäre aktivierten Drahtes eingeführt waren, hervorgerufen werden. Bei den polonisierten Drähten kann man die ionisierende Wirkung während der Messungen als konstant betrachten. Man mißt nun die Geschwindigkeit des Potentialabfalls mit der

---

1) C. Runge, Ueber die Radioaktivität der Luft auf offenem Meere. Göttinger Nachr. 1907. S. 211.

Zeit. Sie ergab sich für größere Spannungen größer d. h. es zeigte sich, daß auch bei den größten verwendbaren Spannungen der Strom noch nicht gesättigt war[1]). Diese Beobachtungen wurden für verschiedene Längen eines polonisierten Drahtes wiederholt. Jeder Länge entspricht demnach eine gewisse Kurve, die den Ladungsstrom als Funktion der Spannung darstellt. Es zeigt sich nun, daß diese Kurven sich nur durch den Maßstab der Ordinaten von einander unterscheiden, so weit die Genauigkeit der Beobachtung reicht. Ich nehme nun an, daß die Ordinaten der Kurven für größere Spannungen ebenfalls in demselben Verhältnis stehen und daß demnach auch die gesättigten Ströme dasselbe Verhältnis besitzen. Bei den beobachteten Spannungen (180 bis 280 Volt) betrug die Zunahme der Ordinaten im Mittel etwa 10 Prozent ihres Betrages auf 100 Volt. Die Zunahme muß jedenfalls auf der Seite der kleineren Spannungen stärker und auf der der größeren Spannungen schwächer sein. Das entzog sich indessen der Beobachtung. Wenn man diese Zunahme berücksichtigt, so kann man zwei Entladungsströme auch dann mit einander vergleichen, wenn sie sich nicht auf die gleiche Spannung des Elektroskops beziehn, vorausgesetzt, daß die Spannungen nicht zu stark von einander abweichen. Ein Unterschied z. B. von 20 Volt in

1) Strenge genommen ist der Entladungsstrom dem Differentialquotienten des Potentials nach der Zeit nicht proportional. Bezeichnet C die Kapazität des Elektroskops, V das Potential und J den Entladungsstrom, so ist

$$J = -\frac{d}{dt}(CV)$$

Nun ist aber C keine Konstante sondern nimmt in geringem Gerade mit wachsendem V zu. Es ist also

$$J = -\left(C + V\frac{dC}{dV}\right)\frac{dV}{dt}$$

oder

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{J}{C + V\frac{dC}{dV}}$$

und hierin ist $\frac{dC}{dV}$ positiv. Bei Sättigungsstrom müßte demnach die Geschwindigkeit der Potentialabnahme sogar für größere Potentialwerte kleiner werden. Zeigt sich also für größere Potentialwerte eine größere Geschwindigkeit der zeitlichen Abnahme, so ist a fortiori kein Sättigungsstrom vorhanden. Innerhalb eines beschränkten Intervalls der Potentialwerte kann $C + V\frac{dC}{dV}$ als konstant betrachtet und demnach der Entladungsstrom der Geschwindigkeit der zeitlichen Potentialabnahme proportional gesetzt werden.

der Ladungsspannung würde eine Korrektur des einen Entladungsstromes von etwa 2 Prozent ergeben und das fällt schon in die Grenzen der Beobachtungsfehler. Die Kapazität des Elektroskops betrug etwa 6 cm.

Der Differentialquotient der Spannung nach der Zeit wurde graphisch ermittelt. Dabei wurde nicht die Spannung des sich entladenden Elektroskops sondern der Logarithmus der Spannung als Funktion der Zeit aufgetragen. Der Logarithmus liefert nämlich eine gradere Kurve, deren Richtung sich daher genauer bestimmen läßt.

Die folgenden drei Tabellen enthalten drei Beobachtungen der Abklingungskurve des aktivierten Drahtes, die in der Nähe der amerikanischen Küste gemacht sind.

1. 6. April 1910. Ort am Mittag: 27° 35′ N, 90° 41′ W etwa 90 Seemeilen südlich der Mündung des Mississipi. Kurs: S 65° O. Wind NO. Batterie eingeschaltet $10^h 32^m$, abgeschaltet $2^h 33^m$. Mittlere Spannung etwa 3700 Volt. Reststrom: 1,05 Volt pro Stunde.

Zeit nach dem Abschalten	Entladungsstrom in Volt pr. Stunde[1]) mit Einschluß des Reststroms	Logarithmus des Entladungsstroms nach Abzug des Reststroms
6^m 2^s	1477	3.1691
13 0	1190	3.0753
16 27	1163	3.0653
23 14	1067	3.0278
29 43	925.5	2.9659
36 20	876.0	2.9420
41 54	790.7	2.8975
49 42	695.2	2.8415
57 57	602.9	2.7795
66 50	490.1	2.6894
76 27	405.1	2.6065
94 20	254.8	2.4045
113 45	183.4	2.2610
135 30	137.6	2.1354
224 30	34.43	1.5241
1261 —	1.73	9.8325

1) Um die pro Stunde überströmende Elektrizitätsmenge in elektrostatischen C.G.S.-Einheiten zu erhalten, müßten diese Werte mit dem als konstant betrachteten Wert von $\frac{1}{800}\left(C + V\frac{dC}{dV}\right)$ (ungefähr $=\frac{1}{50}$) multipliziert werden.

2. 8. April 1910. Ort um Mittag: 24° 18′ N, 81° 52′ W. 15 Seemeilen südlich von Key West in der Florida Straße. Kurs O. Schwacher Nordostwind. Batterie eingeschaltet $9^h 34^m$, ausgeschaltet $12^h 55^m$, um die Isolatoren abzuwischen; wieder eingeschaltet $1^h 18^m$, ausgeschaltet $4^h 14^m$. Mittlere Spannung zuerst 2000 Volt, nachher 2500 Volt. Reststrom: 0,8 Volt pro Stunde.

Zeit nach dem Abschalten	Entladungsstrom in Volt pro Stunde mit Einschluß des Reststroms	Logarithmus des Entladungsstroms nach Abzug des Reststroms
$20^m 40^s$	154	2.185
27 26	147	2.164
33 16	138	2.137
42 50	115	2.057
50 56	106	2.021
57 17	103	2.009
79 44	55.6	1.74
96 53	45.5	1.65
159 20	15.0	1.15
974	0.99	—
49^h 32	0.72	—
80 20	0.84	—

3. 14. April 1910. Ort um Mittag: 37° 3′ N, 70° 37′ W, etwa 200 Seemeilen östlich der amerikanischen Küste, 275 Seemeilen südöstlich von Newyork. Kurs O. Starker Nordostwind (Windstärke 4). Batterie eingeschaltet $10^h 2^m$, ausgeschaltet $2^h 16^m$. Mittlere Spannung: 2400 Volt. Reststrom: 1,42 Volt pro Stunde.

Zeit nach dem Abschalten	Entladungsstrom in Volt pro Stunde mit Einschluß des Reststroms	Logarithmus des Entladungsstroms nach Abzug des Reststroms
12.48^m	189	2.2742
19.02	193	2.2833
25.74	151.5	2.1761
32.08	151.5	2.1761
36.15	112	2.0453
47.34	108	2.0294
51.01	94	1.9685
61.6	82	1.9085
83.8	58	1.7559
134.0	21.6	1.3096
195.8	12.4	1.0492
344.2	5.19	0.5762
15.8^h	1.41	—
102.3	1.44	—

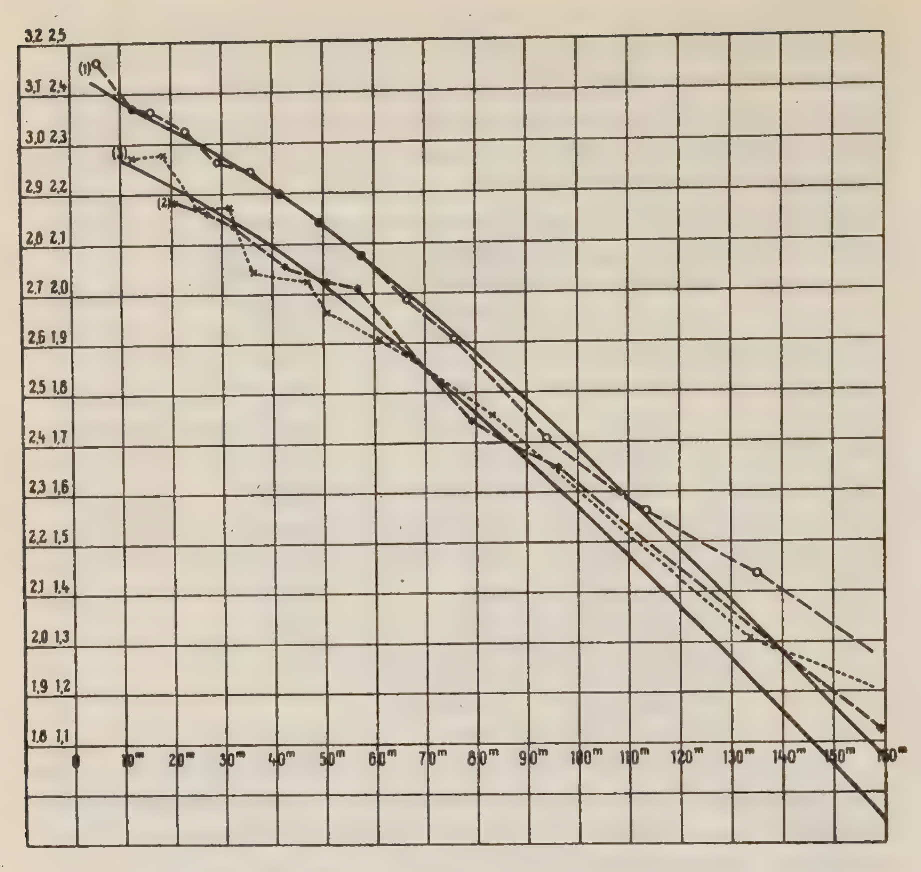


Fig. 1.

In Figur 1 sind die drei Abklingungskurven dargestellt. Die Ordinaten geben die Logarithmen des Entladungsstroms, die Abszissen die Zeit bis $2^1/_2$ Stunden nach der Abschaltung. Um die Form der ersten Kurve besser mit den andern beiden vergleichen zu können, ist der Nullpunkt der Ordinaten für die erste Kurve um 0,7 herunter gerückt. Die ausgezogenen Kurven stellen die Abklingung eines mit reiner Radiumemanation sehr lange[1]) aktivierten Drahtes dar, die meinen in den Göttinger Nachrichten 1907 S. 220 veröffentlichten Bestimmungen entnommen ist. Diese Kurven sind auf einen passend gewählten Ordinatennullpunkt bezogen, um sich den Beobachtungen möglichst gut anzuschließen,

1) Eigentlich müßte die zum Vergleich herangezogene Abklingungskurve des Radium der Expositionszeit des Versuchs grade entsprechen. Indessen würde sie dadurch nicht merklich geändert werden.

die eine den Beobachtungen des ersten Drahtes, die andere denen des zweiten und dritten.

Die Figur gibt uns eine Vorstellung von der erreichten Genauigkeit. Bei dem ersten Versuch ist der mittlere Fehler des Logarithmus, wenn man die Abklingungskurve des reinen Radiums als die wahre ansieht, innerhalb der ersten 2 Stunden gleich 2 Einheiten der zweiten Dezimale und ohne den ersten Punkt sogar nur 1,2 Einheiten der zweiten Dezimale. Der zweite und dritte Versuch sind lange nicht so genau. Das kommt daher, daß bei der schwächeren Aktivierung viel kleinere Intervalle für die Entladungskurven genommen werden mußten, um eine hinreichende Anzahl von Punkten der Abklingungskurve für gleiche Spannungen zu erhalten. Bei kurzen Entladungskurven wird aber die Bestimmung der Richtung leicht fehlerhaft. Bei dem dritten Versuch kommt erschwerend noch die unruhige Bewegung des Schiffes hinzu.

Immerhin ist der Anschluß an die Abklingungskurve des reinen Radiums innerhalb der ersten zwei Stunden auch bei dem zweiten und dritten Versuch unverkennbar. Nach mehr als zwei Stunden setzt dagegen bei allen drei Versuchen eine Abweichung von der Abklingungskurve des reinen Radiums ein. Leider werden zugleich aber die Entladungsströme zu schwach, um noch mit einiger Genauigkeit ihr Abklingen zu verfolgen und aus dem Gesetz des Abklingens auf die Natur der Emanation mit Sicherheit zu schließen.

Mit diesen drei in der Nähe der Küste angestellten Versuchen vergleiche man nun drei ungefähr in der Mitte zwischen Neufundland und England in derselben Weise angeordnete Versuche.

4. 23. April 1910. Ort um Mittag: 45° 24′ N, 34° 31′ W. Nächstes Land: Neufundland etwa 800 Seemeilen. Kurs ONO, mäßiger Wind von ONO. Batterie eingeschaltet: $12^h 17^m$, ausgeschaltet $1^h 22^m$, wieder eingeschaltet $1^h 42^m$, ausgeschaltet $4^h 0$. Mittlere Spannung zuerst 920, nachher 1400 Volt. Reststrom: 1,15 Volt pro Stunde.

Zeit nach dem Abschalten	Entladungsstrom in Volt pro Stunde mit Einschluß des Reststroms	Logarithmus des Entladungsstroms nach Abzug des Reststroms
9.2^m	49.07	1.680
67.2	12.30	1.047
77.8	11.78	1.026
4.8^h	1.89	9.869
15.9	1.09	—
20.2	1.21	—

5. 24. April 1910. Ort um Mittag: 46° 56′ N, 29° 53′ W. Nächstes Land: Irland, etwa 800 Seemeilen. Kurs ONO. Wind NNO. Windstärke 3. Batterie eingeschaltet: $12^h\,30^m$, ausgeschaltet: $3^h\,36^m$. Mittlere Spannung: 2500 Volt. Reststrom: 1,03 Volt pro Stunde.

Zeit nach dem Abschalten	Entladungsstrom in Volt pro Stunde mit Einschluß des Reststroms	Logarithmus des Entladungsstroms nach Abzug des Reststroms
5.35^m	695	2.841
17.98	180	2.253
23.25	172	2.233
35.20	107.5	2.027
52.95	69.3	1.834
72.3	61.6	1.782
92.9	40.0	1.591
119.2	19.8	1.274
4^h 58	3.12	0.320
31 20	1.37	9.532

6. 26. April 1910. Ort um Mittag: 48° 56′ N, 18° 31′ W. Nächstes Land: Irland, etwa 350 Seemeilen. Kurs O. Wind: mäßig SW. Dünung aus Norden. Batterie eingeschaltet: $11^h\,1^m$, ausgeschaltet: $3^h\,12^m$. Mittlere Spannung: 1900 Volt, in der letzten Stunde weniger. Reststrom: 1,03.

Zeit nach dem Abschalten	Entladungsstrom in Volt pro Stunde mit Einschluß des Reststroms	Logarithmus des Entladungsstroms nach Abzug des Reststroms
19.6^m	42.0	1.613
33.8	29.7	1.458
44.8	12.58	1.063
91	5.68	0.659
$13^h\,35^m$	0.982	—
30.2^h	1.08	—
71.3	1.04	—

In Fig. 2 sind die drei Versuche wieder in derselben Weise wie die ersten drei graphisch dargestellt. Für den sechsten Versuch ist der Nullpunkt der Ordinaten um 0,2 höher gelegt. Zum Vergleich ist die Abklingungskurve des reinen Radiums in zwei passenden Lagen hinzugefügt.

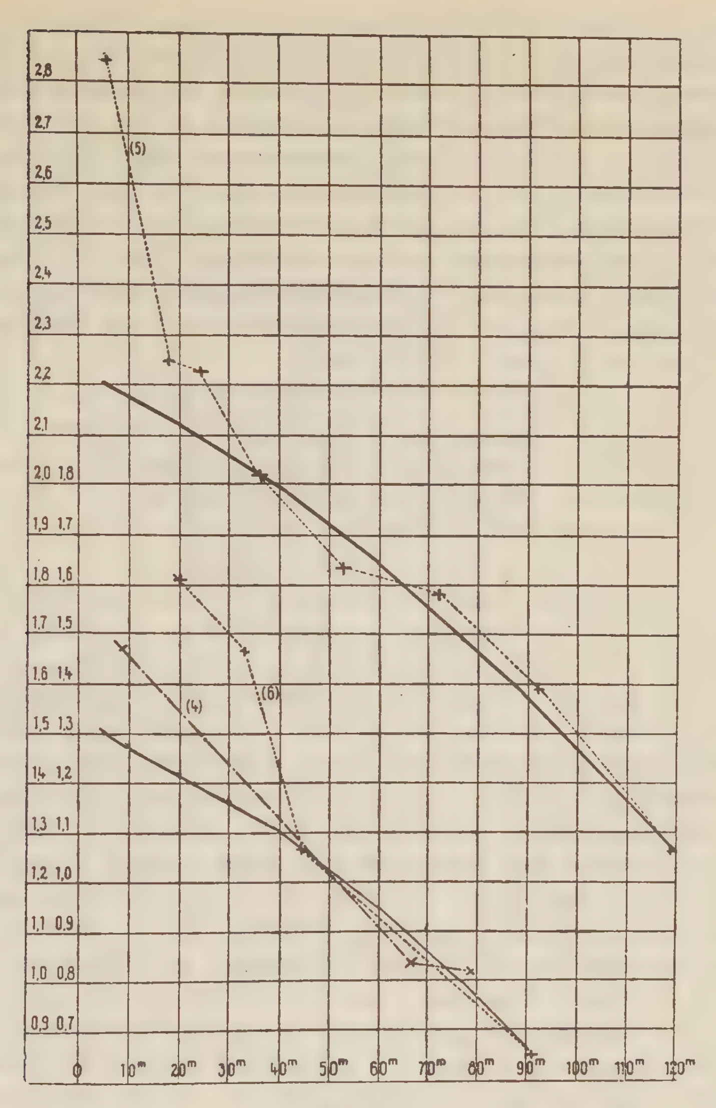


Fig. 2.

Man wird auf den vierten und sechsten Versuch im Vergleich zum fünften Versuch kein großes Gewicht legen können. Bei der geringen Aktivierung ist die Bestimmung der Entladungsströme des vierten und sechsten Versuchs sehr unsicher. Immerhin aber widersprechen sie nicht den Schlußfolgerungen die aus dem fünften Versuch gezogen werden können. Die Abklingungskurve des fünften Versuchs zeigte zwischen 30 Min. und 120 Min. nach der Abschaltung einen guten Anschluß an die Abklingungskurve des

reinen Radiums. Der Logarithmus der Entladungsströme ist für entsprechende Zeiten im Durchschnitt nicht wesentlich verschieden von dem der Entladungsströme des zweiten und dritten Versuchs. Dagegen ist ein sehr merklicher Unterschied in der ersten halben Stunde nach der Ausschaltung zu erkennen. Fünf Minuten nach der Ausschaltung ist der Entladungsstrom über vier Mal größer als er nach der Abklingungskurve des reinen Radiums sein sollte, an die er sich 30 Minuten später anschmiegt. Zieht man von den Beträgen der ersten drei beobachteten Entladungsströme die entsprechenden Werte der Abklingungskurve des reinen Radiums ab, so bleiben die folgenden Werte übrig:

Zeit nach der Ausschaltung der Batterie	Entladungsstrom nach Abzug des Reststroms und des vom Radium herrührenden Teils
5.35^m	534 Volt/Stunde
17.98	44 „
23.25	45 „

Auch daß die von Radium herrührende Aktivierung ungefähr ebenso groß ist, wie die beim 2. und 3. Versuch unter denselben Verhältnissen in der Nähe der Küste beobachtete, scheint mir ein merkwürdiges Resultat zu sein. Man sollte daraus schließen, daß die Radiumemanation aus dem Seewasser stammt und nicht vom Lande aus durch den Wind über den Ozean gelangt. Denn dabei würde durch den Zerfall der Emanation in vier Tagen auf die Hälfte eine wesentlich geringere Wirkung als in der Nähe der Küste zu erwarten sein. Dem widerspricht nun anderseits aber, daß A. S. Eve in Seewasser, das aus der Mitte des atlantischen Ozeans entnommen war, pro Gramm nur etwa den dreitausendsten Teil der Menge von Radium hat nachweisen können, die sich nach Strutts Bestimmungen durchschnittlich in Sedimentärgesteinen findet[1]).

Endlich möchte ich noch auf ein drittes Ergebnis aufmerksam machen, das Beachtung verdient. Auch in der Mitte des Ozeans klingt die induzierte Radioaktivität mehr als zwei Stunden später als die Ausschaltung der Batterie wesentlich langsamer ab, als der Fall sein könnte, wenn es sich um Radium allein handelte. Da der Reststrom abgezogen ist, so kann es sich, so viel ich sehe,

1) A. S. Eve, Phil. Mag. Februar 1907. S. 253.

nur um die Wirkung eines radioaktiven Elementes handeln, das von Radium verschieden ist. Aller Wahrscheinlichkeit nach handelt es sich dabei um die Wirkung von Thor, bei der die Aktivität in 11 Stunden auf ihren halben Wert sinkt. Die Beobachtungen sind aber nicht gut genug, um die Geschwindigkeit der Abnahme mit einiger Genauigkeit festzustellen.

Ich fasse die gefundenen Resultate noch einmal zusammen:

1. In der Mitte des atlantischen Ozeans ist unter den gleichen Bedingungen die induzierte Aktivität ungefähr ebenso groß gefunden worden, wie in der Nähe der Küste.

2. Innerhalb der ersten zwei Stunden stimmt die Abklingungskurve in der Nähe des Landes wie in der Mitte des Ozeans mit der bei reinem Radium überein, nur scheint in der Mitte des Ozeans innerhalb der ersten halben Stunde die Aktivität rascher abzuklingen.

3. In allen Fällen weicht die Abklingungskurve nach mehr als zwei Stunden von der des reinen Radium in einem Sinne ab, der die Anwesenheit von Thorium wahrscheinlich macht.

Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte.

Von

Hermann Weyl, Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 25. Februar 1911.

Im folgenden teile ich einige einfache Sätze über die Eigenwerte von Integralgleichungen mit, welche namentlich deren asymptotische Verteilung betreffen. Die Anwendung der gewonnenen Resultate auf die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ (Satz X) liefert insbesondere die Lösung eines Problems, auf dessen Wichtigkeit neuerdings A. Sommerfeld (auf der Naturforscherversammlung zu Königsberg[1]) und H. A. Lorentz (in seinen hier in Göttingen zu Beginn dieses Semesters gehaltenen Vorträgen[2]) nachdrücklich hingewiesen haben.

Die Eigenwerte eines symmetrischen Kernes $K(s, t)$ — nur um solche Kerne handelt es sich im folgenden — bezeichne ich, indem ich sie nach der Größe ihres absoluten Betrages anordne, mit $\frac{1}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa_2}, \ldots$; in dieser Reihe soll natürlich jeder Eigenwert so oft vertreten sein, als seine Vielfachheit angibt. Die reziproken positiven Eigenwerte, gleichfalls nach ihrer Größe angeordnet, heißen $\overset{+}{\varkappa}_1, \overset{+}{\varkappa}_2, \cdots$, die negativen $\overset{-}{\varkappa}_1, \overset{-}{\varkappa}_2, \cdots$. In entsprechender Weise verwende ich $\varkappa'$, $\varkappa''$ u. s. w. zur Bezeichnung der reziproken Eigenwerte anderer Kerne K', K'' u. s. w.

Meine Untersuchungen basieren auf dem folgenden

---

1) Physikalische Zeitschrift, Bd. XI (1910), S. 1061.
2) Physikalische Zeitschrift, Bd. XI (1910), S. 1248.

Satz I. Ist $K(s,t)$ $[0 \leqq s, t \leqq 1]$ ein quadratisch integrierbarer[1]*, symmetrischer Kern und $k_n(s,t)$ irgendeine bilineare symmetrische Kombination*

$$\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} \Phi_p(s) \Phi_q(t) \qquad (k_{pq} = k_{qp})$$

aus n beliebigen quadratisch integrierbaren Funktionen $\Phi_p(s)$, so ist der erste positive Eigenwert von $K(s,t) - k_n(s,t)$ nicht größer als der $(n+1)^{te}$ positive Eigenwert von $K(s,t)$.

Da der Beweis dieses Satzes äußerst einfach ist, gebe ich ihn kurz an. $\overset{+}{\varphi}_1(s), \overset{+}{\varphi}_2(s), \ldots$ mögen die zu $\overset{+}{\varkappa}_1, \overset{+}{\varkappa}_2, \ldots$ gehörigen (normierten) Eigenfunktionen sein. Da der Ausdruck

$$\int_0^1 k_n(s,t)\, x(t)\, dt$$

nur n linear unabhängige Funktionen darzustellen vermag, geht die quadratische Integralform

$$k_n\langle x\rangle = \int_0^1\!\!\int_0^1 k_n(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt$$

offenbar dadurch, daß wir

$$x(s) = x_1 \overset{+}{\varphi}_1(s) + x_2 \overset{+}{\varphi}_2(s) + \cdots + x_{n+1} \varphi_{n+1}(s)$$

setzen, in eine quadratische Form der $n+1$ Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ über, *deren Determinante* $= 0$ *ist.* Infolgedessen können wir Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1)$ so wählen, daß sie der Gleichung $k_n\langle x\rangle = 0$ Genüge leisten. Dann gilt

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \{K(s,t) - k_n(s,t)\}\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \int_0^1\!\!\int_0^1 K(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt$$

$$= \overset{+}{\varkappa}_1 x_1^2 + \overset{+}{\varkappa}_2 x_2^2 + \cdots + \overset{+}{\varkappa}_{n+1} x_{n+1}^2 \geqq \overset{+}{\varkappa}_{n+1}.$$

Daß es eine dieser Ungleichung genügende Funktion $x(s)$ gibt, deren Quadratintegral $= 1$ ist, beweist unsern Satz.

Aus I folgen unmittelbar die folgenden Sätze, von denen II

---

1) D. h. $\int_0^1\!\!\int_0^1 (K(s,t))^2\, ds\, dt$ soll konvergieren. Die Voraussetzung der Stetigkeit erweist sich oft als zu eng.

eine Verallgemeinerung von I, III wiederum eine Verallgemeinerung von II vorstellt.

Satz II. Der m^{te} *positive Eigenwert von* $K(s, t) - k_n(s, t)$ *ist nicht größer als der* $(n+m)^{\text{te}}$ *positive Eigenwert von* $K(s, t)$.

Satz III. Entsteht der Kern K *durch Summation aus zwei Kernen* K', K'', *so ist*

$$\overset{+}{\varkappa}_{m+n-1} \leqq \overset{+}{\varkappa}'_m + \overset{+}{\varkappa}''_n.$$

Satz IV. Lassen wir unter Festhaltung des Kernes $K(s, t)$ *das zugrunde gelegte Intervall, das bisher* $0 \leqq s \leqq 1$ *war, sich zusammenziehen, so wächst der* n^{te} *positive Eigenwert (stetig und) monoton, während der* n^{te} *negative Eigenwert (stetig und) monoton abnimmt.*

Die Eigenwerte λ fliehen also vom Punkte $\lambda = 0$ fort. Jeder einzelne Eigenwert konvergiert natürlich bei unbegrenzt abnehmendem Intervall gegen $\pm\infty$.

Hier ist ein spezielles Ergebnis, das der Satz III liefert und von dem wir im folgenden Gebrauch machen werden:

Satz V. Ist die asymptotische Verteilung der positiven Eigenwerte von K' *durch* $\lim\limits_{n=\infty} n\overset{+}{\varkappa}'_n = 1$ *gegeben und gilt für die positiven und negativen Eigenwerte von* K'' *das Gesetz* $\lim\limits_{n=\infty} n\overset{\pm}{\varkappa}''_n = 0$, *so ist die asymptotische Verteilung der positiven Eigenwerte von* $K = K' + K''$ *dieselbe wie bei* K': $\lim\limits_{n=\infty} n\overset{+}{\varkappa}_n = 1$.

Zur Untersuchung partieller Diffenentialgleichungen benötigen wir noch einen Satz, der erkennen läßt, wie die Eigenwerte von $K(s, t)$ sich ändern, wenn wir diesen Kern mit $p(s)\,p(t)$ multiplizieren, wo $p(s)$ eine stetige, im ganzen Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ wenig von 1 abweichende Funktion bedeutet. Darüber gibt I das folgende Resultat:

Satz VI. Für den Kern $K'(s, t) = K(s, t)\,p(s)\,p(t)$ *gelten, falls* $|p(s) - 1| \leqq \varepsilon$ *ist* $(\varepsilon < 1)$, *die Ungleichungen*

$$\overset{+}{\varkappa}_n (1-\varepsilon)^2 \leqq \overset{+}{\varkappa}'_n \leqq \overset{+}{\varkappa}_n (1+\varepsilon)^2.$$

Ich nehme die Bezeichnungen von Satz I wieder auf und setze $K^* = K(s, t) - k_n(s, t)$. Bedeutet l den Trägheitsindex der quadratischen Form mit den Koeffizienten k_{pq}, so finden wir durch Anwendung von Satz III (und des analogen, für die negativen Eigenwerte gültigen Satzes) auf $K' = K^*$, $K'' = k_n$:

$$\overset{+}{\varkappa}{}^*_1 \geqq \overset{+}{\varkappa}_{l+1}, \quad |\overset{-}{\varkappa}{}^*_1| \geqq |\overset{-}{\varkappa}_{n-l+1}|.$$

Aus diesen Ungleichungen, die eine Verschärfung von Satz I bedeuten, folgt offenbar

$$|\varkappa_1^*| \geqq |\varkappa_{n+1}|,$$

und daraus wiederum das allgemeinere, zu ähnlichen Konsequenzen wie I und II Anlaß gebende Resultat:

Satz VII. Der absolute Betrag des m^{ten} Eigenwertes von $K-k_n$ ist nicht größer als der absolute Betrag des $(n+m)^{\text{ten}}$ von K.

Durch Bildung der Quadratsummen erhalten wir hieraus den schon von Herrn E. Schmidt[1]) auf anderem Wege bewiesenen

Satz VIII:

$$\int_0^1\int_0^1 \{K(s,t)-k_n(s,t)\}^2\,ds\,dt \geqq \varkappa_{n+1}^2+\varkappa_{n+2}^2+\cdots$$

Von dem Schmidt'schen Satze werden wir in folgender Weise Gebrauch machen. Man teile das Quadrat $0 \leqq s,\ t \leqq 1$ durch Parallele zu den Seiten in n^2 gleiche Quadrate. Ist $K(s,t)$ beispielsweise stetig differenzierbar, so entwickle man $K(s,t)$ im Bereiche jedes dieser kleinen Quadrate nach Taylor (d. h. nach Potenzen von $s-s_0$, $t-t_0$, wenn s_0, t_0 der Mittelpunkt des betreffenden kleinen Quadrates ist), wobei wir die Entwicklung freilich schon mit den linearen Gliedern abbrechen. Wir haben dann den Kern $K(s,t)$ durch bilineare Kombination der $2n$ Funktionen

$$\Phi_h(s) = \begin{cases} 1 \text{ für } \frac{h}{n} \leqq s \leqq h+1 \\ 0 \text{ für alle andern } s, \end{cases} \qquad \Phi_{n+h}(s) = \begin{cases} s \text{ für } \frac{h}{n} \leqq s \leqq \frac{h+1}{n} \\ 0 \text{ für alle andern } s \end{cases}$$

$$(h = 0, 1, \ldots, n-1)$$

so weit angenähert, daß das Quadratintegral des Fehlers

$$= \frac{\varepsilon_n}{n^2} \left(\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0 \right)$$

wird. Und das wäre nach dem Schmidt'schen Satze ausgeschlossen, wenn nicht

$$\lim_{n=\infty} n^{3/2} \varkappa_n = 0$$

wäre.

Diese Betrachtungen übertragen sich natürlich alle von dem

---

1) Mathematische Annalen, Bd. 63 (1907), S. 467 ff.

eindimensionalen Fall auf den zweidimensionalen, in welchem anstelle jeder der Variablen s, t ein Variablenpaar tritt und anstelle des Intervalls $0 \leqq s \leqq 1$ irgendein endliches zweidimensionales Gebiet. Wir erhalten dann den

Satz IX. Für die asymptotische Verteilung der Eigenwerte eines h mal stetig differenzierbaren Kerns gelten, je nachdem wir es mit dem eindimensionalen oder dem zweidimensionalen Fall zu tun haben, die Gesetze:

$$\lim_{n=\infty} n^{h+\frac{1}{2}} \varkappa_n = 0, \quad \text{bezw.} \quad \lim_{n=\infty} n^{h/2+1/2} . \varkappa_n = 0.$$

Um etwas über die Eigenwerte zu erfahren, kann man auch von der Fredholmschen Determinante $D(\lambda)$ Gebrauch machen, die diese Eigenwerte zu Nullstellen hat. Durch eine einfache direkte Abschätzung der Koeffizienten der Potenzentwicklung von $D(\lambda)$ findet man beispielsweise, daß $D(\lambda)$ im Falle eines stetig differenzierbaren Kernes $K(s, t)$ höchstens von der „Ordnung" $^2/_3$ ist[1]). Hinsichtlich der Verteilung der Eigenwerte folgt daraus nach allgemeinen Sätzen von Hadamard über ganze transzendente Funktionen nur die Konvergenz der Reihe $\sum_{(n)} |\varkappa_n|^{2/3+\varepsilon}$ für jedes positive ε. Es ist aber für uns von ausschlaggebender Wichtigkeit, daß sich diese Aussage zu der in Satz IX enthaltenen verschärfen läßt.

Schließlich komme ich zu dem in der Einleitung in Aussicht gestellten, die Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ betreffenden Satze. Ich formuliere das Resultat lediglich für den zweidimensionalen Fall $\left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, wiewohl die Methode ohne weiteres auch für jede höhere Dimensionszahl zum Ziele führt.

Satz X. Die zu einem beliebigen Gebiet J vom Flächeninhalte J und zu der Randbedingung $u = 0$ gehörigen Eigenwerte λ_n der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ erfüllen, wenn man sie ihrer Größe nach anordnet, die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{J}{4\pi}. \tag{1}$$

Ich deute den Gang des Beweises kurz an. Die Greensche Funktion von Δu, zu der die λ_n als Eigenwerte gehören, hat die Form

1) Vergl. T. Lalesco, Comptes Rendus 145 (25 nov. 1907), pag. 906/07.

$$G(xy\,\xi\eta) = \lg\frac{1}{r} + A(xy\,\xi\eta) \quad [r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}],$$

und dabei ist A stetig und stetig differenzierbar. Infolgedessen konvergiert nach IX das Produkt des reziproken n^{ten} Eigenwerts von A in die Ordnungszahl n mit wachsendem n gegen Null, und es genügt daher nach V, den Beweis von (1), statt für die Greensche Funktion, für $\lg\frac{1}{r}$ zu erbringen. Dieser Schluß bedarf freilich noch einer Ergänzung, da A und umsomehr die 1. Differentialquotienten von A keineswegs (wie das bei direkter Anwendung des Satzes IX der Fall sein müßte) endlich bleiben, wenn (xy), $(\xi\eta)$ gegen denselben Randpunkt des Bereiches J streben. Diese vom Rande herrührende Schwierigkeit läßt sich durch einen einfachen Kunstgriff (dadurch, daß man gewisse, der Potentialtheorie im 4dimensionalen Raum entspringende Ungleichungen anwendet) beseitigen, falls die Konvergenz des Integrals

$$\iint\limits_J \iint\limits_J \left\{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\xi\, d\eta\,.\,dx\,dy$$

sicher gestellt werden kann. Es heißt nur, den Wert dieses Integrals halbieren, wenn wir in der Quadratsumme unter dem Integralzeichen die Glieder $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2$ streichen. Führen wir dann zunächst die innere Integration nach $\xi\eta$ aus, so kommt, wenn ds das Bogendifferential der Randkurve C und $\frac{\partial}{\partial n}$ die normale Ableitung am Rande bedeutet,

$$\iint\limits_J \left\{\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\xi\, d\eta = -\int\limits_C A\,\frac{\partial A}{\partial n}\,ds = -\int\limits_C \lg r\,\frac{\partial A}{\partial n}\,ds$$

(2) $$= -\int\limits_C \lg r\,\frac{\partial \lg r}{\partial n}\,ds - \int\limits_C \lg r\,\frac{\partial G}{\partial n}\,ds.$$

Indem wir bedenken, daß $\frac{\partial G}{\partial n} > 0$ und $\int\limits_C \frac{\partial G}{\partial n}\,ds = 2\pi$ ist, erhalten wir hieraus für den Wert des Integrals (2) eine obere Grenze von der Form

$$M\,.\,(\lg\varrho)^2,$$

wo M eine nur von der Randkurve, nicht von der Lage des inneren

Punktes xy abhängige Konstante bedeutet und ϱ der kürzeste Abstand des Punktes xy vom Rande ist. Da aber das Integral $\iint_J (\lg \varrho)^2 \, dx dy$ natürlich konvergiert, ist der zu Beginn des Beweises gezogene Schluß gerechtfertigt.

Indem wir nunmehr auf $\lg \frac{1}{r}$ Satz IV anwenden, erkennen wir, daß wir statt des beliebigen Bereiches J einen solchen nehmen können, der aus endlichvielen (N) kongruenten Quadraten $\mathfrak{q}$ von der Seitenlänge a besteht. Wir spalten jetzt wiederum $\lg \frac{1}{r}$ in zwei Teile:

$$\lg \frac{1}{r} = H + R;$$

$H(xy\,\xi\eta)$ stimmt mit $\lg \frac{1}{r}$ überein, falls (xy), $(\xi\eta)$ beide in *demselben* der Quadrate $\mathfrak{q}$ liegen; falls aber diese Punkte in verschiedenen Quadraten $\mathfrak{q}$ gelegen sind, nehmen wir $H = 0$. Von R beweisen wir nach derselben Methode wie soeben von A, daß es die asymptotische Verteilung der Eigenwerte nicht beeinflußt. Die Eigenwerte von H sind aber die nämlichen wie die Eigenwerte von $\lg \frac{1}{r}$ in einem einzelnen Quadrat $\mathfrak{q}$; nur daß, was hier ein 1-facher, dort ein Nfacher, was hier ein 2facher, dort ein $2\mathsf{N}$facher (u. s. f.) Eigenwert wird. Also brauchen wir die Formel (1) nur für die zu dem Kern

$$\lg \frac{1}{r} \left(0 \leqq {x, y \atop \xi, \eta} \leqq a\right)$$

gehörigen Eigenwerte zu beweisen. Hier aber darf, wenn wir den zu Beginn auseinandergesetzten Schluß statt auf J auf das einzelne Quadrat $\mathfrak{q}$ anwenden, $\lg \frac{1}{r}$ rückwärts wieder durch die zu dem Quadrat $0 \leqq x, y \leqq a$ gehörige Greensche Funktion ersetzt werden, deren Eigenwerte

$$\frac{\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2) \qquad [m, n \text{ ganz und positiv}]$$

wirklich der Limesgleichung (1) [mit $J = a^2$] genügen. Indem wir, von dieser elementaren (zahlentheoretischen) Tatsache ausgehend, die einzelnen Gedankenschritte rückwärts durchlaufen, erhalten wir einen synthetischen Beweis des allgemeinen Satzes X.

Ich habe mich auch mit der Frage beschäftigt, wie rasch das Verhältnis $\frac{n}{\lambda_n}$ gegen seinen Grenzwert $\frac{J}{4\pi}$ konvergiert.

Ferner läßt sich die gleiche Methode auf die allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)-qu+\lambda ku = 0 \tag{3}$$

übertragen, in der p, q, k in J (einschließlich des Randes) stetige Funktionen von xy sind und p und k überall positiv bleiben. Die neue Schwierigkeit, welche durch die Variabilität der Koeffizienten p, q, k hineinkommt, läßt sich mit Hülfe des Satzes VI leicht überwinden. Das Ergebnis lautet:

Satz XI. Die zu einem beliebigen Gebiet J gehörigen Eigenwerte λ_n der sich selbst adjungierten Differentialgleichung (3) *vom elliptischen Typus wachsen so ins Unendliche, daß*

$$\lim_{n=\infty}\frac{4\pi n}{\lambda_n} = \iint\limits_J \frac{k(xy)}{p(xy)}\,dxdy$$

wird.

Eine ausführlichere Darstellung dieser Untersuchungen werde ich in den Mathematischen Annalen veröffentlichen.

Göttingen, den 20. Februar 1911.

Zur Elektronentheorie des Ferromagnetismus.

(2. Mitteilung.)

Von

R. Gans.

Vorgelegt in d. Sitzung d. Kgl. Gesellschaft v. 11. März 1911 durch Herrn C. Runge.

Inhaltsverzeichnis:

§ 1. Einleitung.

In der ersten Mitteilung über die Elektronentheorie des Ferromagnetismus[1]) ist der Versuch gemacht worden, die Erscheinungen des Ferromagnetismus auf elektronentheoretischer Grundlage zu behandeln, und es ist auch geglückt, einige typische Phänomene wie das der Hysteresis ferromagnetischer Krystalle in ihrem charakteristischen Verhalten darzustellen.

Zum Schluß wurde in Aussicht gestellt, in einer weiteren Arbeit eine Theorie isotroper Ferromagnetika zu geben. Wenn

1) R. Gans, Gött. Nachr. 1910, p. 197. Diese Abhandlung wird im Folgenden als I zitiert werden.

ich diesem Versprechen jetzt noch nicht nachkomme, so geschieht das deshalb, weil ich das Bedürfnis hatte, zunächst eine Lücke auszufüllen, die der ersten Abhandlung noch anhaftete. Dort war nirgends die Rede von thermisch-magnetischen Beziehungen, die doch bei magnetischen Experimenten eine so große Rolle spielen, und über die wir — besonders durch die eleganten und wertvollen Untersuchungen des Herrn P. Weiß — jetzt eine umfassendere Kenntnis erlangt haben.

Die Annahmen, die wir in der vorigen Mitteilung gemacht haben, waren kurz die: Ein Elementarmagnet oder Magneton ist ein um seine Figurenaxe schnell rotierender elektrisch geladener Rotationskörper. Ein Elementarkomplex besteht aus einer Gruppe solcher Magnetonen, die in einem Raume, der die Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoids hat, nach den Wahrscheinlichkeitsgesetzen angeordnet sind. Der Mittelpunkt jedes Magnetons war hierbei als absolut festliegend, das Magneton selbst als um seinen Mittelpunkt frei drehbar angenommen. Aus solchen kongruenten Elementarkomplexen wurde ein ferromagnetischer Krystall aufgebaut, indem die Ellipsoide in den Punkten eines Raumgitters, parallel zu einander, angeordnet gedacht wurden.

In diesen Voraussetzungen ist nichts enthalten, was es ermöglichte, den Temperaturbegriff in die Betrachtungen einzuführen. Durch eine einfache Modifikation sind wir aber in die Lage versetzt, die thermischen Erscheinungen mit den magnetischen zu verknüpfen, und zwar nehmen wir einfach an, daß die Magnetonen innerhalb des Elementarkomplexes von fest gegebener Form und unveränderlicher Lage hin- und herfliegen können wie die Moleküle eines Gases und sich gegenseitig stoßen und ablenken. Indem wir mit Langevin[1]) die Methoden der statistischen Mechanik heranziehen, können wir dieser thermischen Agitation Rechnung tragen und erhalten eine Formel für die Magnetisierungskurve eines Elementarkomplexes, in der die Temperatur als Parameter auftritt.

Insofern in unserer ersten Abhandlung die thermische Agitation unberücksichtigt blieb, können wir sagen, daß die damals entwickelten Formeln die Magnetisierungskurve im absoluten Nullpunkte der Temperatur darstellen, in welchem ja jegliche molekulare Bewegung aufhört. In der Tat werden wir sehen, daß die jetzt von uns abzuleitenden Gleichungen für lim $T = 0$ in die der früheren Mitteilung übergehen.

Indem wir diese Formeln auf ein System von Elementarkomplexen anwenden, aus denen sich ein Krystall aufbaut, be-

1) P. Langevin, Ann. Chim. Phys. (8) 5, pag. 70, 1905.

kommen wir Beziehungen zwischen magnetischen und thermischen Größen, die in ganz ähnlicher Form von Weiß[1]) auf Grund seiner Hypothese des molekularen Feldes aufgestellt worden sind.

Wenn wir trotz der Weißschen Arbeiten ausführlicher auf diese Formeln eingehen, so geschieht das einmal deshalb, weil unsere Beziehungen mit denen von Weiß nicht identisch, sondern ihnen nur ähnlich sind — wir können sagen, sie umfassen die Weißsche Theorie —, dann glauben wir, daß durch unsere Theorie ein etwas genauerer Einblick in den Mechanismus der Vorgänge gegeben wird, ferner sind wir in der Lage, auf Grund der von uns in der ersten Mitteilung bereits eingeführten Stabilitätsbetrachtungen die ganze Magnetisierungskurve zu berechnen und Beziehungen, wie z. B. die Abhängigkeit der Coercitivkraft von der Temperatur, anzugeben, die einer experimentellen Nachprüfung fähig sind, und durch die einige vom molekulartheoretischen Standpunkte aus wichtige Konstanten, nämlich die Anzahl Magnetonen in der Volumeinheit und das mittlere magnetische Moment eines Magnetons sich bestimmen lassen.

Um den Unterschied unserer Theorie gegenüber den Weißschen Formeln genauer präzisieren zu können, wollen wir noch kurz auf den Mechanismus des Magnetisierens eingehen.

Herrscht im Innern eines Ferromagnetikums ein magnetisches Feld, so wirkt am Orte jeden Magnetons eine Feldstärke, die sogenannte erregende Kraft, in die sich die magnetische Axe des Elementarmagneten einzustellen sucht, und hierdurch wird eine Magnetisierung erzeugt.

Andrerseits hat die thermische Agitation das Bestreben, eine Unordnung in der Richtung der Magnetonenaxen hervorzurufen, sodaß hierdurch eine etwa vorhandene Magnetisierung mehr oder weniger wieder aufgehoben wird.

Diese beiden Tendenzen wirken also in entgegengesetztem Sinne, die eine im ordnenden, die andre im ordnungszerstörenden Sinne, und es wird sich ein statistischer Gleichgewichtszustand herstellen, der dadurch charakterisiert ist, daß die Wahrscheinlichkeit der Anordnung ein Maximum ist. Dies hat zur Folge, daß die Magnetisierung um so größer ist, je größer die Feldstärke und je niedriger die Temperatur ist.

Bei Weiß setzt sich nun die erregende Kraft aus zwei Bestandteilen additiv zusammen, aus der (äußeren) Feldstärke $\mathfrak{H}$ und dem molekularen Felde, das bei isotropen Körpern die Form $N\mathfrak{M}$ hat, wo N eine Konstante, $\mathfrak{M}$ die Magnetisierung bedeutet;

1) P. Weiß, J. d. phys. (4) 6, pag. 661, 1907.

das molekulare Feld ist also der Magnetisierung proportional und ihr gleich gerichtet. Bei Krystallen hat dieser zweite Bestandteil die Komponenten $N_1 \mathfrak{M}_x$, $N_2 \mathfrak{M}_y$, $N_3 \mathfrak{M}_z$, wenn als Koordinatenaxen die Symmetrieaxen des Krystalls gewählt werden. Wir werden den zweiten Teil der erregenden Kraft mit den Komponenten $N_1 \mathfrak{M}_x$, $N_2 \mathfrak{M}_y$, $N_3 \mathfrak{M}_z$ nicht das molekulare, sondern das Strukturfeld nennen, weil auf Grund unseres Mechanismus im Wesentlichen die Struktur des Krystalls für dasselbe verantwortlich ist.

Bei allen endlichen Temperaturen wird nach Weiß, wenn die Feldstärke unendlich groß wird, Sättigung eintreten, da gegen die unendlich große ordnende Tendenz des Magnetfeldes die ordnungszerstörende der thermischen Agitation vernachlässigt werden kann. Im absoluten Nullpunkte der Temperatur dagegen erzeugt jedes noch so kleine Feld bereits Sättigung, da in diesem Falle überhaupt keine Molekularbewegung und somit keine unordnende Wirkung vorhanden ist.

Anders bei uns: In unserer Theorie besteht die erregende Kraft eines Magnetons außer aus der Feldstärke und dem soeben erwähnten Strukturfelde noch aus einem Felde A, das wir das Molekularfeld (nicht zu verwechseln mit dem Weißschen Molekularfelde!) nennen wollen, welches in unserer ersten Abhandlung bereits eingeführt worden ist, und das seinen Ursprung der Wirkung der dem betrachteten Magneton benachbarten Magnetonen desselben Elementarkomplexes verdankt. Es ließ sich wegen der analytischen Schwierigkeiten nicht streng beweisen, aber doch plausibel machen, daß jede Richtung für dieses Feld A gleich wahrscheinlich, und daß seine Größe von der Richtung unabhängig ist.

Dieses molekulare Feld hat nun wegen der verschiedenen Richtungen, die es an den Orten der verschiedenen Magnetonen einnimmt, auch eine unordnende Tendenz, wirkt also im selben Sinne wie die thermische Agitation. Bei hohen Temperaturen wird man zwar mit gewisser Näherung von der Wirkung des molekularen Feldes absehen können wegen der kräftigen unordnenden Molekularbewegung, aber in der Nähe des absoluten Nullpunktes und a fortiori in diesem selbst darf das molekulare Feld keineswegs unberücksichtigt bleiben, und so kommt es auch, daß in unserer Theorie beim absoluten Nullpunkte (man vergleiche die Resultate der ersten Abhandlung) nicht bei endlichen, sondern erst bei unendlich großen Feldern Sättigung auftritt.

Es möge noch erwähnt werden, daß gerade bei sehr tiefen Temperaturen die Beobachtungen von Weiß und Kamerlingh

Onnes[1]) nicht in Übereinstimmung mit der Weißschen Theorie sind. Ob aber die Nichtberücksichtigung des molekularen Feldes den Grund dieser Abweichungen bildet, soll erst später entschieden werden, wenn wir unsere Theorie auf isotrope Medien ausgedehnt haben.

§ 2. Die kinetische Energie der Magnetonen.

Jedes Magneton wollen wir uns zunächst als einen um irgend eine beliebige Axe rotierenden Rotationskörper mit den Hauptträgheitsmomenten A (bezüglich der Figurenaxe) und C vorstellen. A und C entsprechen also den Größen $2mK$ resp. $m(K+K')$ des § 3 der ersten Abhandlung (vgl. I (68) p. 214).

Dann ist die Lage eines Magnetons bestimmt durch Angabe der Koordinaten x, y, z des Mittelpunktes sowie z. B. der Eulerschen Winkel $\varepsilon, \psi, \varphi$, wenn ε die Neigung der Figurenaxe gegen eine im Raume feste Richtung, ψ die sogenannte Länge der Knotenlinie, φ den Azimutwinkel des „Kreisels" bedeutet[2]).

Die Geschwindigkeiten der translatorischen und rotatorischen Bewegung lassen sich aus den zeitlichen Ableitungen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, $\dot{\varepsilon}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$ bestimmen, und es folgt für die kinetische Energie T die Formel

(1) $$T = T_1 + T_2,$$

wobei

(2) $$2T_1 = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

das Doppelte der kinetischen Energie der translatorischen Bewegung,

(3) $$2T_2 = A\,(\dot{\varepsilon}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \varepsilon) + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\varepsilon)^2$$

das Doppelte der kinetischen Energie der Rotationsbewegung darstellt[3]).

Nun werden die Sätze der statistischen Mechanik, die herangezogen werden müssen, wenn der Begriff der Temperatur molekulartheoretisch in die Betrachtungen eingeführt werden soll, wesentlich einfacher, wenn man zur Bestimmung des momentanen

---

1) P. Weiß und H. Kamerlingh Onnes, J. d. phys. Juli 1910.

2) Vgl. z. B. P. Stäckel, Elementare Dynamik. Math. Enc. IV^1, Art. 6, p. 552. Leipzig 1901—1908. (Unser ε entspricht dem Stäckelschen ϑ.)

3) F. Klein und A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels 1. pag. 156, Formel (6). Leipzig 1897.

Zustandes nicht die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten, sondern die Koordinaten und Impulse wählt.

Es soll also die Lage und Lagenänderung des Mittelpunktes eines Magnetons durch die Koordinaten x, y, z und die Impulskomponenten

$$\xi = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \eta = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad \zeta = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{4}$$

bestimmt werden, während Lage und Bewegung relativ zum Mittelpunkt durch die Eulerschen Winkel $\varepsilon, \psi, \varphi$ und die ihnen entsprechenden Impulskomponenten

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial T_2}{\partial \dot{\varepsilon}} = A\dot{\varepsilon} \\ \Psi &= \frac{\partial T_2}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi}\sin^2\varepsilon + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\varepsilon)\cos\varepsilon \\ \Phi &= \frac{\partial T_2}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\varepsilon) \end{aligned} \tag{5}$$

angegeben werden mögen, sodaß

$$x, y, z, \varepsilon, \psi, \varphi, \xi, \eta, \zeta, E, \Psi, \Phi \tag{6}$$

die charakteristischen Bestimmungsstücke des momentanen Zustandes eines Magnetons sind.

Löst man die Gleichungen (5) nach $\dot{\varepsilon}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$ auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{E}{A} \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{A\sin^2\varepsilon}[\Psi - \Phi\cos\varepsilon] \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Phi}{C} - \frac{\cos\varepsilon}{A\sin^2\varepsilon}[\Psi - \Phi\cos\varepsilon], \end{aligned} \tag{7}$$

und durch Substitution dieser Werte in (3) folgt

$$2T_2 = \frac{E^2}{A} + \frac{[\Psi - \Phi\cos\varepsilon]^2}{A\sin^2\varepsilon} + \frac{\Phi^2}{C}, \tag{8}$$

während nach (2) und (4)

$$2T_1 = \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{m} \tag{8 a}$$

ist.

Wir beschränken unsere Betrachtungen zunächst auf einen Teil der sämtlichen in einer Volumeinheit befindlichen N Magnetonen. Wir wollen nämlich von den N Magnetonen diejenigen heraus-

greifen, die zu einer bestimmten Zeit sich gerade an Orten befinden, in denen das molekulare Feld A (I § 6) seiner Richtung nach innerhalb eines Kegels mit dem unendlich kleinen Öffnungswinkel $d\omega$ liegt, und zwar können wir $d\omega = \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi'$ setzen, wenn ϑ', φ' die Neigung des Vektors A gegen eine im Raume feste Vorzugsrichtung, φ' sein Azimut bezüglich einer durch die Vorzugsrichtung gelegten festen Ebene bedeutet. Diesen betrachteten Teil sämtlicher Magnetonen wollen wir eine ausgezeichnete Gruppe nennen.

Da nach I § 5 jede Richtung für das molekulare Feld gleich wahrscheinlich ist, werden

$$N\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{N}{4\pi}\sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi'$$

ausgezeichnete Magnetonen in der Volumeinheit sein.

Es mögen nun

$$df'.d\Omega' = df'(x, y, z, \varepsilon, \psi, \varphi, \xi, \eta, \zeta, E, \Psi, \Phi)\, dx\, dy\, dz\, d\varepsilon\, d\psi\, d\varphi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dE\, d\Psi\, d\Phi \tag{9}$$

Magnetonen einer ausgezeichneten Gruppe Koordinaten und Impulse haben, die zu einer bestimmten Zeit zwischen x und $x + dx$, y und $y + dy, \ldots \Phi$ und $\Phi + d\Phi$ liegen, d. h. df' sei die Verteilungsfunktion der Magnetonen innerhalb einer ausgezeichneten Gruppe, es sei also

$$df' = f' d\omega,$$

wenn f' die Verteilungsfunktion sämtlicher in der Volumeinheit liegender Magnetonen bedeutet.

Dann muß

$$\int_{\Omega'} df'.d\Omega' = \frac{N d\omega}{4\pi} \tag{10}$$

und

$$\iiint dx\, dy\, dz = 1 \tag{11}$$

sein. Hierbei ist die Integration in (10) über sämtliche möglichen Werte von (6) zu erstrecken, d. h. bezüglich x, y, z über alle in der Volumeinheit vorhandenen Punkte; ferner läuft ε von 0 bis π, ψ und φ von 0 bis 2π, $\xi, \eta, \zeta, E, \Psi, \Phi$ von $-\infty$ bis $+\infty$.

Die gesamte kinetische Energie dT der Teilchen einer ausgezeichneten Gruppe ist somit nach (9), (8) und (8a) gegeben durch die Gleichung

$$2\,dT = \int df'\, d\Omega' \left\{\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{m} + \frac{E^2}{A} + \frac{[\Psi - \Phi\cos\varepsilon]^2}{A\sin^2\varepsilon} + \frac{\Phi^2}{C}\right\}. \tag{12}$$

Anstatt der E, Ψ, Φ sollen jetzt andere Variable in (12) eingeführt werden.

Bezeichnen wir die momentanen Drehgeschwindigkeiten um die Hauptträgheitsaxen mit p, q, r, so ist[1])

$$(13) \quad \begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \varepsilon \sin \varphi + \dot{\varepsilon} \cos \varphi \\ q &= \dot{\psi} \sin \varepsilon \cos \varphi - \dot{\varepsilon} \sin \varphi \\ r &= \dot{\psi} \cos \varepsilon + \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

und die kinetische Energie der Rotationsbewegung lautet in den p, q, r

$$(14) \quad 2\,T_2 = A(p^2 + q^2) + Cr^2$$

oder, wenn wir die „Impulse"

$$(15) \quad \begin{aligned} P &= \frac{\partial T_2}{\partial p} = Ap \\ Q &= \frac{\partial T_2}{\partial q} = Aq \\ R &= \frac{\partial T_2}{\partial r} = Cr \end{aligned}$$

einführen,

$$(16) \quad 2\,T_2 = \frac{P^2 + Q^2}{A} + \frac{R^2}{C}.$$

Diese Größen P, Q, R sollen anstatt E, Ψ, Φ in (12) substituiert werden.

Die in der geschweiften Klammer von (12) vorkommende Größe $2\,T_2$ ist dabei ohne Weiteres durch (16) ausgedrückt, es muß also nur noch $dE\,d\Psi\,d\Phi$ durch die neuen Variablen ersetzt werden.

Zu dem Zweck braucht man nur wegen (15) die Gleichungen (13) resp. mit A, A, C zu multiplizieren, nach den $\dot{\varepsilon}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$ aufzulösen und diese Werte in (5) einzusetzen. Man erhält so auf Grund ganz elementarer Rechnungen

$$(17) \quad \begin{aligned} E &= P \cos \varphi - Q \sin \varphi \\ \Psi &= (P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \sin \varepsilon + R \cos \varepsilon \\ \Phi &= R. \end{aligned}$$

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, daß bei der Bildung der Differentiale $dE, d\Psi, d\Phi$ in (17) ε und φ konstant gelassen werden müssen, da ja Koordinaten und Impulse als von einander gänzlich unabhängige Größen angesehen werden.

---

1) P. Stäckel, l. c. pag. 564 oder pag. 593. (Am letzteren Orte ist versehentlich in Gl. (8) $\cos \varphi$ statt $\sin \varphi$ geschrieben.)

Wir erhalten somit

$$(18) \qquad \begin{aligned} dE &= \cos\varphi dP - \sin\varphi dQ \\ d\Psi &= \sin\varepsilon \sin\varphi dP + \sin\varepsilon\cos\varphi dQ + \cos\varepsilon dR \\ d\Phi &= dR \end{aligned}$$

und

$$(19) \qquad dE d\Psi d\Phi = \Delta . dP . dQ dR,$$

wenn Δ die Funktionaldeterminante

$$(20) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi, & 0 \\ \sin\varepsilon\sin\varphi, & \sin\varepsilon\cos\varphi, & \cos\varepsilon \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \sin\varepsilon$$

bedeutet, sodaß

$$(21) \qquad dE d\Psi d\Phi = \sin\varepsilon dP dQ dR$$

wird. Setzen wir

$$(22) \qquad dx\, dy\, dz\, d\varepsilon\, d\psi\, d\varphi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dP\, dQ\, dR = d\Omega,$$

so wird

$$d\Omega' = \sin\varepsilon\, d\Omega.$$

Nennen wir ferner die Verteilungsfunktion df' der ausgezeichneten Gruppe df, wenn anstatt der E, Ψ, Φ die P, Q, R eingeführt gedacht sind, so liegen nach (9) im Element $d\Omega$ des Phasenraums (unter Phasenraum verstehen wir mit Gibbs[1]) einen in unserem Falle 12 dimensionalen Raum, in dem wir die $x, y, \ldots Q, R$ als rechtwinklige kartesische Koordinaten wählen, dessen Volumelement also $d\Omega = dx\,dy \ldots dQ\,dR$ ist)

$$(9') \qquad df \sin\varepsilon\, d\Omega = f . d\omega \sin\varepsilon\, d\Omega$$

Magnetonen der ausgezeichneten Gruppe, und nach (10) wird

$$(10') \qquad \int_\Omega df \sin\varepsilon\, d\Omega = \frac{N}{4\pi} d\omega,$$

während (12) die Form annimmt

$$(12') \qquad 2\,dT = \int df \sin\varepsilon\, d\Omega \left\{ \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{m} + \frac{P^2 + Q^2}{A} + \frac{R^2}{C} \right\}.$$

§ 3. Die magnetische Energie der Magnetonen.

Die magnetische Energie eines von Magnetonen erfüllten Raumes ist

1) J. W. Gibbs, Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik, deutsch von E. Zermelo, Leipzig 1905.

(23) $$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}^2 \, dS,$$

wobei die Integration über den unendlichen Raum zu erstrecken ist. Hierfür können wir nach den Ausführungen oben auf S. 212 des ersten Teils

$$W = -\tfrac{1}{2} \int (\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) \, dS$$

oder nach I pag. 224 Formel (105)

(23') $$W = -\tfrac{1}{2} \Sigma (\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$$

setzen. (23') hat vor (23) den Vorzug, daß in (23') die Summation nur über den von Magnetonen erfüllten Raum, in (23) aber über den unendlichen Raum zu erstrecken ist.

Aus (23') würde für die Änderung der magnetischen Energie bei irgend welchen unendlich kleinen Drehungen der Magnetonen um ihren Mittelpunkt folgen

$$\delta W = -\tfrac{1}{2} \delta \Sigma (\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = -\tfrac{1}{2} \Sigma (\mathfrak{h}, \delta \mathfrak{m}) - \tfrac{1}{2} \Sigma (\mathfrak{m}, \delta \mathfrak{h}).$$

Da aber die Feldänderung $\delta \mathfrak{h}$ am Orte eines Magnetons von der Lagenänderung sämtlicher Magnetonen abhängig ist, so wollen wir einen Ausdruck für δW suchen, der aus Summanden besteht, von denen jeder von der Lagenänderung nur eines Magnetons abhängt.

Aus (23) ergibt sich, da nach I (45)

$$\mathfrak{h} = -\operatorname{grad} V$$

ist,

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \int (\operatorname{grad} V, \delta \mathfrak{h}) \, dS,$$

und es folgt durch partielle Integration

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int V \operatorname{div} \delta \mathfrak{h} \, dS$$

oder nach I (2) und (4)

$$\delta W = -\int V \operatorname{div} \delta \mathfrak{m} \, dS$$

und nach abermaliger partieller Integration

(24) $$\delta W = \int (\operatorname{grad} V, \delta \mathfrak{m}) \, \delta S = -\int (\mathfrak{h}, \delta \mathfrak{m}) \, dS.$$

Nun können wir $\mathfrak{h}$ in zwei Bestandteile zerlegen, in das von dem betrachteten Magneton selbst erzeugte „innere“ Feld $\mathfrak{h}_i$ und das von den übrigen im Raume befindlichen Magnetonen hervorgerufene „äußere“ Feld $\mathfrak{h}_a$, sodaß

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_i + \mathfrak{h}_a$$

ist. Also wird nach (24)

(25) $$\delta W = -\int (\mathfrak{h}_i, \delta \mathfrak{m})\, dS - \int (\mathfrak{h}_a, \delta \mathfrak{m})\, dS.$$

Es läßt sich leicht beweisen, daß der erste Term der rechten Seite dieser Formel Null ist. Es ist nämlich

$$-\int (\mathfrak{h}_i, \delta \mathfrak{m})\, dS = \int (\operatorname{grad} V_i, \delta \mathfrak{m})\, dS$$

oder durch partielle Integration

$$= -\int V_i \operatorname{div} \delta \mathfrak{m}\, dS = \frac{1}{4\pi} \int V_i \operatorname{div} \delta \mathfrak{h}_i\, dS$$

oder durch nochmalige partielle Integration

$$= -\frac{1}{4\pi} \int (\mathfrak{h}_i, \delta \mathfrak{h}_i)\, dS = \delta \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{h}_i^2\, dS = \delta W_i,$$

wenn W_i die Summe der magnetischen Energien der einzelnen im Raume allein befindlich gedachten Magnetonen bedeutet.

Da hierbei die Magnetonen als schnell um die Figurenaxe mit konstanter Geschwindigkeit rotierende elektrisch geladene Moleküle aufgefaßt werden müssen, so bleibt ihr Moment und damit das von jedem selbst erzeugte Feld unverändert. Somit ist auch W_i konstant, d. h. $\delta W_i = 0$, und es wird aus (25)

(25') $$\delta W = -\int (\mathfrak{h}_a, \delta \mathfrak{m})\, dS$$

Nun können wir aber $\mathfrak{h}_a$ innerhalb des von einem Magneton eingenommenen Raumes als konstant ansehen und dürfen somit unter Benutzung von I (105) schreiben

(26) $$\delta W = -\sum (\mathfrak{h}_a, \delta \mathfrak{m}).$$

Dieser Ausdruck für die Energieänderung δW besitzt die oben erwähnte gewünschte Eigenschaft, daß jedes Glied der Summe nur von der Lagenänderung eines Magnetons abhängig ist.

§ 4. Die Verteilungsfunktion.

Das in der Formel (26) vorkommende Feld $\mathfrak{h}_a$, das wir, wie im ersten Teil, jetzt auch einfach mit $\mathfrak{h}$ bezeichnen wollen, setzt sich nach I § 5 aus zwei Bestandteilen zusammen, dem Felde

(27) $$K = H + \frac{4\pi}{3} M$$

in der Vorzugsrichtung, welches die Magnetonen der Außenzone erzeugen, und einem molekularem Felde A, das durch die Magne-

tonen der Mittelzone hervorgerufen wird, und von dem wir angenommen haben, daß es der Größe nach konstant ist, und daß alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind.

Im Gegensatz zur früheren Abhandlung, in der auf die thermische Agitation keine Rücksicht genommen worden ist, setzen wir jetzt keineswegs voraus, daß sich die Magnetonen in die Richtung des aus K und A resultierenden Feldes einstellen, sondern daß sie alle möglichen Winkel ε mit diesen Richtung bilden, und wir fragen uns, wie viele Magnetonen einer ausgezeichneten Gruppe im stationären Zustand Winkel mit $\mathfrak{h}$ bilden, die zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegen.

Die Tatsache, daß alle Richtungen für das molekulare Feld A gleich wahrscheinlich sind, erlaubt es uns, die Verteilungsfunktion für die ausgezeichneten Magnetonen, die sich also gerade an Orten befinden, in denen A der Richtung nach in einen unendlich kleinen Kegel der Öffnung $d\omega$ fällt, gesondert aufzustellen ohne Rücksicht auf die anderen Gruppen ausgezeichneter Magnetonen, die anderen Kegeln $d\omega$ entsprechen.

Es wird zwar keineswegs ein und dasselbe Magneton dauernd zu derselben ausgezeichneten Gruppe gehören, aber bei den statistischen Betrachtungen, die wir im Folgenden anstellen, kommt es auch nie auf die individuelle Zuordnung eines Teilchens zu einer bestimmten Gruppe an, sondern nur auf die Zahl der Teilchen, die einem Elementarkegel $d\omega$ angehören, und diese ist für jeden Kegel dieselbe, nämlich $N\frac{d\omega}{4\pi}$.

Wir nennen die Verteilungsfunktion einer bestimmten ausgezeichneten Gruppe df, genauer

$$df(x, y, z, \varepsilon, \psi, \varphi, \xi, \eta, \zeta, P, Q, R),$$

d. h. es sollen $df \sin \varepsilon d\Omega$ ausgezeichnete Magnetonen der Volumeinheit sich im Element $d\Omega$ des Phasenraums befinden.

df muß der Bedingung genügen, daß

$$\int df \sin \varepsilon d\Omega = \frac{N}{4\pi} d\omega \tag{28}$$

ist, und da wir uns auf die in einer Volumeinheit befindlichen ausgezeichneten Magnetonen beziehen, so muß

$$\iiint dx\, dy\, dz = 1 \tag{29}$$

sein.

Ferner ist der Beitrag der ganzen Gruppe zur kinetischen Energie nach (12′)

(30) $$dT = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{m}+\frac{P^2+Q^2}{A}+\frac{R^2}{C}\right\}df\sin\varepsilon d\Omega$$

und der Beitrag der Gruppe zur magnetischen Energie nach (23′)

(31) $$dW = -\tfrac{1}{2}\int\mathfrak{h}\,.\,\mu\cos\varepsilon df\sin\varepsilon d\Omega,$$

wenn in (31) μ den absoluten Wert des Moments eines Magnetons, $\mathfrak{h}$ von jetzt an den absoluten Wert der Feldstärke am Orte eines Magnetons, also die Resultante von K und A und schließlich ε den Winkel bedeutet, den die Magnetonenaxe mit der Richtung von $\mathfrak{h}$ einschließt.

Auf Grund der Elemente der statistischen Mechanik ist nun (statistisches) Gleichgewicht vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit des Zustandes oder die elementare Unordnung bei gegebener Energie und gegebenem Volumen so groß wie möglich ist, d. h. wenn die Entropie einen Maximalwert hat. Gleichberechtigte Volumenelemente des Phasenraums, die als Grundlage der Verteilung dienen, sind aber nach dem Liouvilleschen Satze gleich große Volumelemente, wenn als bestimmende Stücke der Phase die Koordinaten und Impulse, nicht die Koordinaten und Geschwindigkeiten angesehen werden. Diese Tatsache gab uns die Veranlassung, in § 2 die Impulse anstatt der Geschwindigkeiten heranzuziehen, und zwar haben wir zunächst die Impulsgrößen E, Ψ, Φ, die den Eulerschen Winkeln $\varepsilon, \psi, \varphi$ als Koordinaten entsprechen, eingeführt und waren erst dann zu den „Impulsen“ P, Q, R übergegangen. Der Grund hierfür ist der, daß die Rotationsgeschwindigkeiten p, q, r um die Hauptträgheitsaxen nicht die zeitlichen Ableitungen „eigentlicher“ Koordinaten sind. So kommt es auch, daß in allen Formeln, in denen E, Ψ, Φ auftreten sollten, durch die Substitution von P, Q, R der Faktor $\sin\varepsilon$ erscheint (vgl. § 2 (21)).

Die Entropie einer Volumeinheit des von uns betrachteten Körpers ist nach den Gesetzen der statistischen Mechanik [1])

(32) $$S = \text{Const} - k\iint f\,.\log f\,.\,d\Omega\,.\,d\omega,$$

wo k eine universelle Konstante ist, die im absoluten *C.G.S.*-System den Wert [2])

$$k = 1{,}35\,.\,10^{-16}$$

hat.

Für den Gleichgewichtszustand muß also die Bedingung

(33) $$\delta S = 0$$

1) Vgl. z. B. M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig 1906, pag. 144.

2) M. Planck, ibid. pag. 162.

gelten, während die Gesamtenergie $U = T + W$ konstant bleibt, d. h.

$$\delta U = \delta T + \delta W = 0 \tag{34}$$

oder nach (30) und (26)

$$\delta U = \iint \left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{m} + \frac{P^2+Q^2}{A} + \frac{R^2}{C}\right\} - \mathfrak{h}\mu\cos\varepsilon\right]\delta f \sin\varepsilon d\Omega d\omega = 0 \tag{35}$$

oder

$$\delta U = \iint u\delta f \sin\varepsilon d\Omega d\omega, \tag{35'}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{m} + \frac{P^2+Q^2}{A} + \frac{R^2}{C}\right) - \mu\mathfrak{h}\cos\varepsilon \tag{36}$$

setzen.

Die Gesamtzahl der Magnetonen in der Volumeinheit

$$N = \iint f \sin\varepsilon d\Omega d\omega \tag{37}$$

ist ebenfalls gegeben, sodaß

$$\iint \delta f \sin\varepsilon d\Omega d\omega = 0 \tag{38}$$

sein muß.

Nun wird aber (33) auf Grund von (32)

$$\delta S = -k\iint(\log f + 1)\,\delta f \sin\varepsilon d\Omega d\omega = 0, \tag{39}$$

also folgt nach den Prinzipien der Variationsrechnung aus (39), (35') und (38)

$$\log f + 1 + \lambda u + \lambda' = 0 \tag{40}$$

oder

$$f = \alpha e^{-\lambda u}, \tag{40'}$$

wenn λ und λ' Lagrangesche Faktoren, also α und λ willkürliche Größen sind, die sich aber durch die Werte N und U bestimmen lassen, und zwar ergibt sich, daß [1])

$$\frac{1}{\lambda} = kT \tag{41}$$

ist, wenn T die absolute Temperatur bedeutet [2]). $1/\lambda$ ist die doppelte auf jeden Freiheitsgrad entfallende kinetische Energie.

Setzt man die Werte für λ und u aus (41) und (36) in (40') ein, so erhält man

$$f = \alpha e^{-\frac{1}{kT}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{m} + \frac{P^2+Q^2}{A} + \frac{R^2}{C}\right) - \mu\mathfrak{h}\cos\varepsilon\right]} \tag{42}$$

1) Vgl. z. B. M. Planck, l. c. § 143 und § 144.

2) Man wird T nicht mit der in § 2 ebenso bezeichneten lebendigen Kraft eines Teilchens verwechseln.

Multipliziert man ferner f mit $\sin \varepsilon d\Omega d\omega$, führt die Integrationen nach $x, y, z, \psi, \varphi, \xi, \eta, \zeta, P, Q, R$, d. h. nach sämtlichen Koordinaten des Phasenraums bis auf ε, aus und nennt das Resultat der Integration F, so ergibt sich, daß

(43) $$F d\omega \sin \varepsilon d\varepsilon = b e^{\frac{\mu \mathfrak{h} \cos \varepsilon}{kT}} \sin \varepsilon d\varepsilon d\omega \text{ }^{1)}$$

ausgezeichnete Magnetonen der Volumeinheit mit der Richtung des ihnen zukommenden Feldes $\mathfrak{h}$ Winkel bilden, die zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegen.

Die Konstante b bestimmt sich daraus, daß

(44) $$\int d\omega \int_0^\pi F \sin \varepsilon d\varepsilon = N$$

sein muß, zu

(45) $$b = \frac{N}{8\pi} \frac{a}{\mathfrak{Sin}\, a},$$

wenn zur Abkürzung

(46) $$a = \frac{\mu \mathfrak{h}}{kT} = \gamma \mathfrak{h}$$

gesetzt ist, also γ den Wert

(46′) $$\gamma = \frac{\mu}{kT}$$

hat, sodaß

(47) $$F d\omega \sin \varepsilon d\varepsilon = \frac{N}{8\pi} \frac{a}{\mathfrak{Sin}\, a} e^{a \cos \varepsilon} \sin \varepsilon d\varepsilon d\omega$$

wird.

---

1) Diese Verteilungsfunktion wird allerdings für den von uns supponierten Mechanismus deshalb nicht gelten, weil, wie wir in der früheren Abhandlung gesehen haben, im stationären Zustande p und q und somit P und Q infolge der Ausstrahlung Null werden, und weil R durch die Zusammenstöße überhaupt nicht geändert wird. Ferner ist das Moment μ eigentlich R proportional, da aber dieses unveränderlich ist, wird es auch jenes sein. Trotzdem wird durch (42) die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von den anderen Variabeln richtig dargestellt sein, und darauf kommt es uns allein an. Wir hätten von vorn herein diesem Tatbestand Rechnung tragen können, indem wir P und Q gleich Null und die R als gegebene Größen angesehen hätten. Dabei wird die Tatsache, daß P und Q durch die Zusammenstöße immer wieder von Null verschiedene Werte erhalten, an den Resultaten nichts Wesentliches ändern, da die hierdurch entstehenden Komponenten p und q der Rotationsgeschwindigkeiten in ihrer Größe durch das Gesetz der Äquipartition der kinetischen Energie gegeben sind, während die Komponente r, die an dem Energieausgleich überhaupt nicht teilnimmt, merklich größer als p und q angenommen werden kann, sodaß P und Q gegen R zu vernachlässigen sind.

§ 5. Die Magnetisierungskurve.

Das Moment der Magnetonen einer ausgezeichneten Gruppe hat aus Symmetriegründen die Richtung des Feldes $\mathfrak{h}$; die Größe ergibt sich leicht aus der Verteilungsfunktion (47) zu

$$(48)\quad dM = \mu d\omega \int_0^\pi F \cos\varepsilon \,.\, \sin\varepsilon d\varepsilon = \frac{N\mu}{8\pi} d\omega \frac{a}{\mathfrak{Sin}\, a} \int_0^\pi e^{a\cos\varepsilon} \cos\varepsilon \sin\varepsilon d\varepsilon$$

oder durch Ausführung der Integration zu

$$(49)\quad dM = \frac{M_\infty}{4\pi} L(a)\, d\omega,$$

wenn wir

$$N\mu = M_\infty$$

und

$$(50)\quad \mathfrak{Ctg}\, a - \frac{1}{a} = L(a)$$

setzen.

Die Axe des dem Element $d\omega$ zugehörigen Kegels bildet nun mit der Vorzugsrichtung, in der das äußere Feld $\mathfrak{H}$ wirkt, den Winkel ϑ, wenn ϑ dieselbe Bedeutung hat wie in I § 6 Fig. 1.

Das Moment aller in der Volumeinheit liegender Magnetonen oder die Magnetisierung M erhält man somit, wenn man (49) mit $\cos\vartheta$ multipliziert und über sämtliche $d\omega = \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi'$ integriert.

Auf diese Weise ergibt sich

$$(51)\quad M = \frac{M_\infty}{4\pi} \int_0^\pi \sin\vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' L(a) \cos\vartheta$$

oder, wenn wir nach I (156) resp. I (157)

$$\sin\vartheta' d\vartheta' = -\frac{\mathfrak{h} d\mathfrak{h}}{AK} \text{ und } \cos\vartheta = \frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{2\mathfrak{h} K}$$

einführen und die Integration nach φ' ausführen,

$$(52)\quad M = -M_\infty \int L(a) \frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{4AK^2} d\mathfrak{h},$$

wo a und L durch die Gleichungen (46) und (50) definiert sind, und zwar erstreckt sich die Integration genau so wie in I § 6 für $K < A$ von $A + K$ bis $A - K$ und für $K > A$ von $K + A$ bis $K - A$.

Wir haben also in jedem isotrop aus Magnetonen aufgebauten Medium, also in jedem Elementarkomplex für $K < A$:

(52a) $$\frac{M}{M_\infty} = \int_{A-K}^{A+K} L(a) \frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{4AK^2} d\mathfrak{h}$$

und für $K > A$:

(52b) $$\frac{M}{M_\infty} = \int_{K-A}^{K+A} L(a) \frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{4AK^2} d\mathfrak{h},$$

wo

$$a = \frac{\mu\mathfrak{h}}{kT} = \gamma\mathfrak{h}$$

ist.

Durch (52a) und (52b) ist M als Funktion von K gegeben, und da nach I (150)

(53) $$K = H + \frac{4\pi}{3} M$$

ist, so kennt man somit M als Funktion von H.

Zunächst folgt, daß im absoluten Nullpunkt $T = 0$, für den nach (46) $a = \infty$, also $L(a) = 1$ wird, M nach (52) in den Wert

(54) $$M = -M_\infty \int \frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{4AK^2} d\mathfrak{h}$$

übergeht. Das ist aber gerade die Gleichung I (158), es bestätigt sich also die in der Einleitung gemachte Bemerkung, daß unsere früheren Betrachtungen die Magnetisierungskurve im absoluten Nullpunkte ergeben.

Ist das molekulare Feld A gleich Null, so verliert natürlich die Gleichung (52a) ihre Gültigkeit, aus (52b) wird

(55) $$\frac{M}{M_\infty} = L(a') \lim_{A=0} \int_{K-A}^{K+A} \frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{4AK^2} d\mathfrak{h} = L(a'),$$

wenn

(56) $$a' = \frac{\mu K}{kT}$$

gesetzt ist.

Langevin[1]) findet durch ganz analoge Überlegungen, wie wir sie im Vorhergehenden angestellt haben,

(55') $$\frac{M}{M_\infty} = L(a''),$$

wo

1) P. Langevin, Ann. de chim. et de phys. (8) 5. 1905, pag. 117.

(56′) $$a'' = \frac{\mu H}{kT}$$

bedeutet. Unsere Formeln gehen also in seine über, wenn wir erstens von dem molekularen Felde A absehen können und zweitens in (53) die Magnetisierung neben der Feldstärke vernachlässigen dürfen, oder, anders ausgesprochen, die Abweichung der Langevinschen Magnetisierungskurve von unserer beruht darin, daß er anstatt der erregenden Kraft, die sich aus K und A vektoriell zusammensetzt, die Feldstärke einführt. Das wird für schwach paramagnetische Körper wie Gase, für die Langevin seine Formel als gültig annimmt, richtig sein, im Allgemeinen müssen wir aber die Gleichungen (52a) und (52b) anstatt (55′) benutzen.

§ 6. Diskussion der Magnetisierungskurve.

Aus der Gleichung (52a) folgt für $\lim K = 0$, wo $\mathfrak{h}$ den Wert A und $a = \gamma\mathfrak{h}$ den Wert γA annimmt,

(57) $$\lim_{K=0} \frac{M}{M_\infty} = \lim_{K=0} L(\gamma A) \frac{2}{3} \frac{K}{A},$$

d. h. die Magnetisierung wird mit K zu Null, die Neigung der M, K-Kurve im Nullpunkt ist aber endlich.

Nähert sich K von kleineren Werten aus dem Werte A, so ergibt sich aus (52a), daß

(58) $$\frac{M}{M_\infty} = \int_0^{2A} L(a) \frac{\mathfrak{h}^2}{4A^2} d\mathfrak{h}$$

wird, und denselben Wert nimmt die Magnetisierung nach (52b) auch an, wenn K sich von größeren Werten aus der Grenze $K = A$ nähert.

Beim Übergang vom ersten ins zweite Stadium macht die Magnetisierung also keinen Sprung.

Daß die M, K-Kurve für $K = A$ auch keinen Knick hat, erkennt man daran, daß $\lim\limits_{K=A} \frac{dM}{dK}$ nach (52a) denselben Wert liefert, wie nach (52b). Es ist nämlich im ersten resp. im zweiten Stadium

(59a) $$\frac{d}{dK}\left(\frac{M}{M_\infty}\right) = L(\gamma(A+K)) \frac{A+K}{2AK} - L(\gamma(A-K)) \frac{A-K}{2AK}$$
$$- \int_{A-K}^{A+K} L(a) \frac{\mathfrak{h}^2 - A^2}{2AK^2} d\mathfrak{h}$$

resp.

$$\text{(59b)}\quad \frac{d}{dK}\left(\frac{M}{M_\infty}\right) = L(\gamma(K+A))\frac{K+A}{2AK} - L(\gamma(K-A))\frac{K-A}{2AK} - \int_{K-A}^{K+A} L(a)\frac{\mathfrak{h}^2 - A^2}{2AK^2}\,d\mathfrak{h},$$

und diese beiden Gleichungen gehen für $K = A$ über in denselben Ausdruck

$$\text{(60)}\quad \frac{d}{dK}\left(\frac{M}{M_\infty}\right)_{K=A} = L(2\gamma A)\frac{1}{A} - \int_0^{2A} L(a)\frac{\mathfrak{h}^2 - A^2}{2A^4}\,d\mathfrak{h}.$$

Der Grenzwert, dem sich $\frac{M}{M_\infty}$ für $\lim K = \infty$ nähert, folgt aus (52b) zu

$$\lim_{K=\infty}\frac{M}{M_\infty} = \lim_{K=\infty} L(\gamma K) \cdot \lim_{K=\infty}\int_{K-A}^{K+A}\frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{4AK^2}\,d\mathfrak{h}.$$

Da aber beide Faktoren sich mit wachsendem K der Einheit nähern, so ist

$$\text{(61)}\quad \lim_{K=\infty}\frac{M}{M_\infty} = 1.$$

Um zu beweisen, daß M dauernd mit K wächst, greifen wir am besten auf Gleichung (51) zurück. Hiernach ist der Beitrag jeden Elements $d\omega$ zur Magnetisierung

$$\text{(62)}\quad d\omega\,\frac{M_\infty}{4\pi}L(\gamma\mathfrak{h})\cos\vartheta.$$

Fragen wir uns, wie sich dieser Wert ändert, wenn K um dK wächst. Nach Fig. 1 (vgl. auch Fig. 1 des ersten Teils pag. 243) ist

$$\text{(63)}\quad \begin{aligned} d\vartheta &= -dK\frac{\sin\vartheta}{\mathfrak{h}} \\ d\mathfrak{h} &= +dK\cos\vartheta \end{aligned}$$

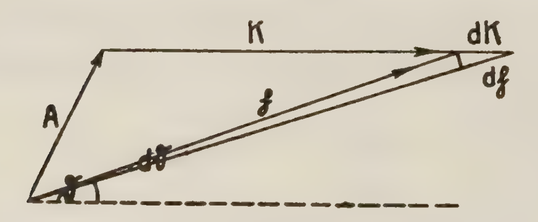


Fig. 1.

Also wird die Änderung des Ausdrucks (62)

(64) $$d\omega \frac{M_\infty}{4\pi}\left[L'(\gamma\mathfrak{h})\,\gamma\cos\vartheta\, d\mathfrak{h} - L(\gamma\mathfrak{h})\sin\vartheta d\vartheta\right]$$

oder durch Einsetzen von (63)

(65) $$d\omega \frac{M_\infty}{4\pi\mathfrak{h}}\left[a\,.\,L'(a)\cos^2\vartheta + L(a)\sin^2\vartheta\right] dK.$$

Diese Größe ist aber wesentlich positiv, denn erstens ist $L(a) = \mathfrak{Ctg}\, a - \frac{1}{a}$, wie sich leicht nachweisen läßt, immer >0 und dasselbe gilt von $L'(a) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 a}$.

Wir verzichten darauf, dies Verhalten von $L(a)$ und $L'(a)$ analytisch zu zeigen, sondern verweisen einfach auf die Funktionentafel am Ende der Abhandlung Kolonne 2 und 4.

Da also der Integrand von $\frac{d}{dK}\left(\frac{M}{M_\infty}\right)$ nach (65) wesentlich positiv ist, so gilt dasselbe von dem Integral

(66) $$\frac{d}{dK}\left(\frac{M}{M_\infty}\right) = \int \frac{\gamma}{a 4\pi} d\omega\left[(L'(a)\, a\cos^2\vartheta + L(a)\sin^2\vartheta\right]$$

d. h. *M* w ä c h s t d a u e r n d m i t *K*.

Um das Verhalten von $\frac{d^2 M}{dK^2}$ zu studieren, bilden wir die Änderung des Integranden in (66) mit K, also die Änderung der Größe

$$\frac{1}{a}\left[L'(a)\, a\cos^2\vartheta + L(a)\sin^2\vartheta\right]$$

Diese beträgt

$$-\frac{1}{a^2}\left[L'(a)\, a\cos^2\vartheta + L(a)\sin^2\vartheta\right]\gamma\,.\,d\mathfrak{h} + \frac{1}{a}\left[(aL''(a) + L'(a))\cos^2\vartheta\right.$$
$$\left. + L'(a)\sin^2\vartheta\right]\gamma d\mathfrak{h} + \frac{1}{a}\left[-aL'(a) + L(a)\right] 2\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta$$

oder mit Benutzung von (63) und mit Zusammenfassung einiger Terme

(67) $$\frac{\gamma\cos\vartheta}{a^2}\left[L''(a)\,.\,a^2\cos^2\vartheta - 3\,(L(a) - aL'(a))\sin^2\vartheta\right] dK$$

Aus der Funktionentabelle Kolonne 5 ersieht man nun, daß $L(a) - aL'(a)$ immer positiv ist, und aus Kolonne 4, daß $L'(a)$ mit wachsendem a immer kleiner wird, also $L''(a)$ negativ ist; somit ist der Ausdruck in der eckigen Klammer von (67) negativ. Da

nun nach Fig. 1 im zweiten Stadium ($K > A$) ϑ immer $< \pi/2$ sein muß, gleichgültig, welchen Winkel A mit der Vorzugsrichtung einschließt, so ist für $K > A$ der Ausdruck (67) negativ, d. h. $\frac{d^2 M}{d K^2} < 0$ oder in Worten:

Im zweiten Stadium ist die konkave Seite der M, K-Kurve stets der K-Axe zugewendet.

Im ersten Stadium ($K < A$) läßt sich das Verhalten von $\frac{d^2 M}{d K^2}$ nicht so einfach übersehen, doch werden wir später (§ 9) (105) und (115)) zeigen, daß sowohl für kleine A und nicht zu tiefe Temperaturen, sodaß auch γA noch klein ist, als auch für so tiefe Temperaturen, daß γA groß ist, stets $\frac{d^2 M}{d K^2} < 0$ ist; d. h. in diesen uns besonders interessierenden Spezialfällen ist auch im ersten Stadium die konkave Seite der M, K-Kurve stets der K-Axe zugewendet. Die M, K-Kurve hat also den in Fig. 2 dargestellten Verlauf.

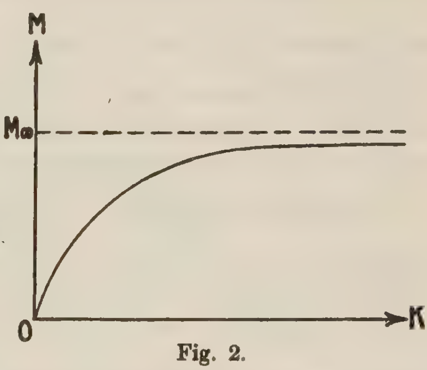


Fig. 2.

§ 7. Ferromagnetische Kristalle.

Wie im § 9 des ersten Teiles denken wir uns einen Elementarkomplex isotrop aus Magnetonen aufgebaut, nur mit dem Unterschied, daß jetzt der Mittelpunkt des Magnetons nicht mehr fest sondern frei beweglich ist, sodaß die Magnetisierung jetzt als Funktion der Feldstärke und Temperatur durch die Gleichungen (52a) und (52b) gegeben ist. Der Elementarkomplex habe, wie auch früher angenommen, eine unveränderliche Gestalt, nämlich die eines 3axigen Ellipsoids, und wir denken uns einen Kristall so aus Elementarkomplexen zusammengesetzt, wie es der Kristallstruktur entspricht. Beim Pyrrhotin z. B. mögen die Ellipsoide in den Punkten eines rhombischen Raumgitters liegen, und zwar seien die Ellipsoidaxen parallel den Parallelepipedkanten des Raumgitters orientiert.

Wir wollen nun Magnetisierung und Feldstärke im Innern eines Elementarkomplexes, d. h. dieselben Größen, die wir in den

vorigen Paragraphen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ genannt haben, $\mathfrak{M}'''$ und $\mathfrak{H}'''$ nennen, um die Bezeichnungen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ für die Magnetisierung und Feldstärke im Kristall selbst zu reservieren, und um mit den Benennungen von I § 9 im Einklag zu bleiben.

So ergibt sich nach I (203)

(68)
$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x''' &= \mathfrak{H}_x + N_1' \mathfrak{M}_x \\ \mathfrak{H}_y''' &= \mathfrak{H}_y + N_2' \mathfrak{M}_y \\ \mathfrak{H}_z''' &= \mathfrak{H}_z + N_3' \mathfrak{M}_z, \end{aligned}$$

wenn wir die Konstanten N_1, N_2, N_3 der früheren Abhandlung jetzt mit N_1', N_2', N_3' bezeichnen.

Ferner ist (vgl. I (199))

(69)
$$\mathfrak{M} = nV\mathfrak{M}''',$$

wenn n die Anzahl Elementarkomplexe in der Volumeinheit, V das Volumen eines einzelnen bedeutet.

Die in den vorigen Paragraphen eingeführte Größe $\mathfrak{K}$ ist definiert durch

(70)
$$\mathfrak{K} = \mathfrak{H}''' + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{M}'''$$

oder nach (68) mit Benutzung von (69)

(71)
$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_x &= \mathfrak{H}_x + N_1 \mathfrak{M}_x \\ \mathfrak{K}_y &= \mathfrak{H}_y + N_2 \mathfrak{M}_y \\ \mathfrak{K}_z &= \mathfrak{H}_z + N_3 \mathfrak{M}_z, \end{aligned}$$

wenn

(72)
$$N_1 = N_1' + \frac{4\pi}{3nV}; \quad N_2 = N_2' + \frac{4\pi}{3nV}; \quad N_3 = N_3' + \frac{4\pi}{3nV}$$

gesetzt ist.

Aus $\mathfrak{K}$ und dem molekularen Felde A setzt sich, wir erinnern daran, die erregende Kraft eines Magnetons, d. h. das Feld am Orte eines Magnetons, vektoriell zusammen, und zwar hat $\mathfrak{K}$ stets die Vorzugsrichtung, welche auch die Richtung der Magnetisierung ist.

Wir können somit $\mathfrak{K}$ als geordneten Teil der erregenden Kraft bezeichnen. Dieser Vektor unterscheidet sich nun nach den Formeln (71) von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Kristall um ein Feld mit den Komponenten $N_1\mathfrak{M}_x$, $N_2\mathfrak{M}_y$, $N_3\mathfrak{M}_z$, welches im wesentlichen von der Struktur der Materie, insbesondere von der Form und Anordnung der Elementarkomplexe abhängig ist, und das wir deshalb das Strukturfeld nennen wollen.

Weiß[1]) führt es einfach durch eine Annahme ein, bezeichnet es als das Feld, welches alle übrigen Moleküle zusammengenommen am Orte eines bestimmten Moleküls erzeugen, und nennt es das molekulare Feld. Den Namen molekulares Feld wollen wir dagegen für den Vektor A reservieren, der tatsächlich den Einfluß der Nachbarmoleküle repräsentiert.

Die Magnetisierungskurve ($\mathfrak{H}, \mathfrak{M}$-Kurve) des Kristalls in Richtung einer der Symmetrieaxen, z. B. in Richtung der x-Axe, ergibt sich aus der $\mathfrak{K}, \mathfrak{M}$-Kurve durch Scherung einfach in folgender Weise:

In der K, M-Ebene ziehe man durch den Nullpunkt 0 die Scherungslinie SS' (Fig. 3), so, daß der Winkel α, den sie mit der

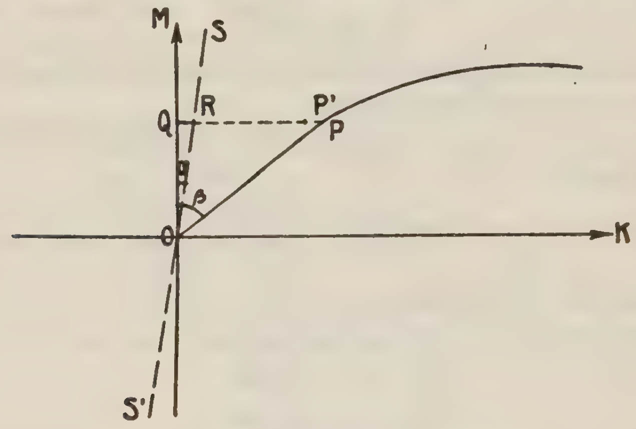


Fig. 3.

Ordinatenaxe einschließt, durch $\operatorname{tg} \alpha = N_1$ gegeben ist, und lege durch einen beliebigen Punkt P der M, K-Kurve eine Parallele zur K-Axe, die von der M-Axe und der Scherungslinie resp. in Q und R getroffen wird. Trägt man dann die Strecke

$$RQ = QO \operatorname{tg} \alpha = MN_1$$

von P aus bis P' auf dieser Parallelen ab, so ist P' ein Punkt der M_x, H_x-Kurve, denn es ist

$$QP' = QP - P'P = QP - RQ = K_x - M_x N_1,$$

und das ist nach (71) gleich H_x.

Wie man sieht, erhält man die Magnetisierungskurve durch genau dieselbe Konstruktion, die Lord Rayleigh[2]) bei der Auf-

1) P. Weiß, Bull. des séances de la Soç. Franç. de Phys. 1907. Separatabdruck pag. 4.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 22, 175, 1886.

nahme der M, H-Kurve isotroper ferromagnetischer Materialien verwendet, um der Entmagnetisierung infolge der endlichen Länge des Probestücks Rechnung zu tragen, nur mit dem Unterschied, daß in unserem Falle der Scherungswinkel α von der Struktur, und nicht, wie bei der Bestimmung gewöhnlicher Magnetisierungskurven, von der Form des Körpers abhängt.

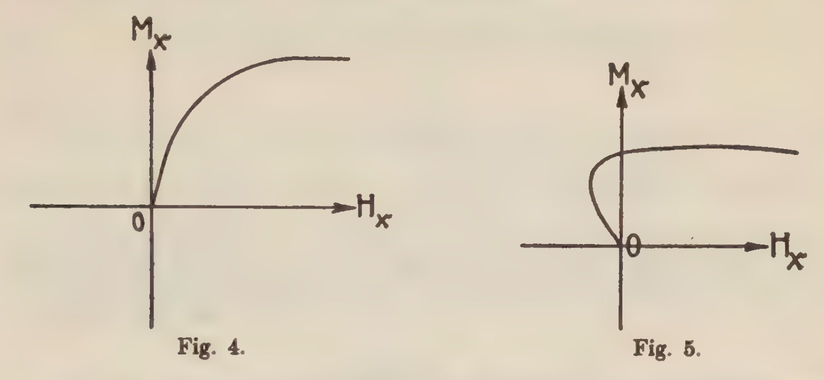


Fig. 4. Fig. 5.

Es ist nun ein wesentlicher Unterschied, ob der Scherungswinkel α kleiner oder größer als der Winkel β ist, den die Tangente an die K, M-Kurve im Anfangspunkte 0 mit der M-Axe bildet. Im ersteren Falle ($\alpha < \beta$) schneidet nämlich die M_x, H_x-Kurve die M-Axe nicht, sondern verläuft vollkommen im ersten Quadranten, während im zweiten Falle ($\alpha > \beta$) die Kurve sofort von O aus in den zweiten Quadranten eintritt und erst nachher in den ersten Quadranten kommt. Die beiden Typen der so entstehenden Magnetisierungskurven findet man in den Figuren 4 und 5 dargestellt. In Fig. 4a und 5a sind auch die für entgegengesetzt gerichtete Felder $\mathfrak{H}$ geltenden Teile konstruiert, indem zu

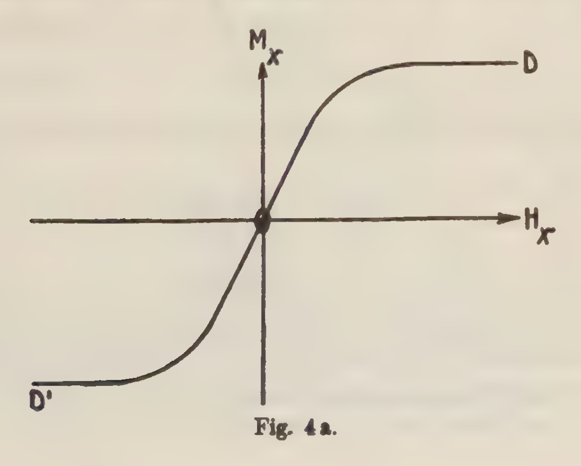


Fig. 4a.

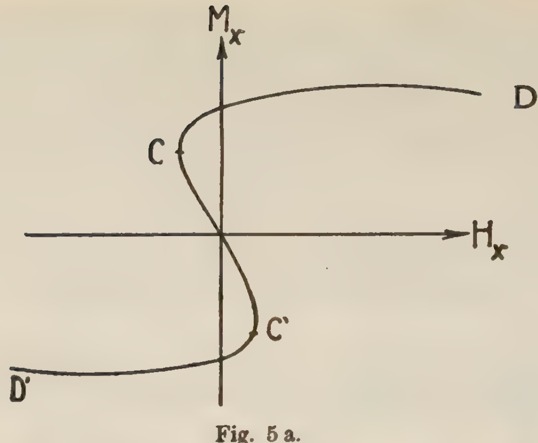


Fig. 5 a.

jedem Punkt mit den Koordinaten H, M der Figuren 4 resp. 5 die Punkte mit den Koordinaten $-H, -M$ hinzugefügt sind.

§ 8. Stabilität.

Hier setzen nun wieder Stabilitätsbetrachtungen, genau wie in der ersten Abhandlung ein. Nur wollen wir jetzt sofort die Untersuchung auf den Kristall, und nicht erst wie früher auf den einzelnen Elementarkomplex anwenden.

Bezeichnen wir wieder in einem Falle, der nicht exakt dem Gleichgewicht entspricht, mit M^* die wirkliche Magnetisierung, dagegen mit M^{**} diejenige Magnetisierung, die eintreten würde, wenn die Magnetonen nach den Gesetzen der magnetischen Kräftewirkungen und der thermischen Agitation die Gleichgewichtsverteilung in dem gestörten Gebiete annehmen würden, und setzen wir wie früher

$$x = \frac{\partial M^{**}}{\partial M^{*}}, \tag{73}$$

so herrscht nach den Überlegungen von I S. 251 und S. 252 im Falle

$$\begin{array}{ll} |x| < 1 & \text{Stabilität} \\ x > 1 & \text{Labilität} \\ x < -1 & \text{Stabilität.} \end{array} \tag{74}$$

Wie damals betrachten wir nur eine spezielle Störung, bei der $\mathfrak{H}$ unverändert bleibt, also $\delta\mathfrak{H} = 0$ ist, sodaß nach Gleichung (71) (wir beschränken unsere Erörterungen auf irgend eine der Axenrichtungen, etwa auf die x-Axe)

(75) $$\partial K = N_1 \partial M^*$$

oder nach (73)

(76) $$x = N_1 \frac{\partial M^{**}}{\partial K}$$

folgt (vgl. I (184)). Anstatt dessen kann man auch (vgl. I (185))

(77) $$x = N_1 \left(\frac{\partial M}{\partial K}\right) \text{ auf der Gleichgewichtskurve}$$

setzen.

Da aber, wie wir im § 6 gesehen haben, M dauernd mit K wächst, sodaß $\frac{\partial M}{\partial K} > 0$ ist, und die Konstanten N sehr große positive Werte haben, so dürfen wir nach (77) unsere Betrachtungen in (74) auf die Fälle $x < 1$ und $x > 1$ beschränken [1]).

Aus (77) ergibt sich

$$x = N_1 \frac{dM}{dK} = N_1 \frac{dM}{dH} \frac{dH}{dK},$$

und aus (71) folgt durch Differentiation nach K

$$1 = \frac{dH}{dK} + N_1 \frac{dM}{dK} = \frac{dH}{dK} + x,$$

sodaß wir

(78) $$\frac{dM}{dH} = \frac{1}{N_1} \frac{x}{1-x}$$

erhalten.

Da nun nach (78) für $x < 1$ $\frac{dM}{dH} > 0$, dagegen für $x > 1$ $\frac{dM}{dH} < 0$ ist, so bekommen wir das Resultat:

Diejenigen Teile der M, H-Kurve des Kristalls, in denen M mit H wächst, also $\frac{dM}{dH} > 0$ ist, entsprechen stabilen, die Teile, in denen $\frac{dM}{dH} < 0$ ist, labilen Zuständen.

Während somit die ganze Figur 4a stabile Gleichgewichtslagen darstellt, sind die Kurventeile zwischen den Punkten C und C' der Fig. 5a, in denen die Tangenten vertikal sind, labil, und

1) Das wäre auch in der ersten Abhandlung erlaubt gewesen, da auch dort M mit K dauernd wachsend war.

man erhält in diesem Falle nach den Erörterungen von I § 8 die in Fig. 6 dargestellte Hysteresiskurve. Dieser Fall entspricht also einem ferromagnetischen Material, während die in Fig. 4a gezeichnete Kurve einen paramagnetischen Körper repräsentiert.

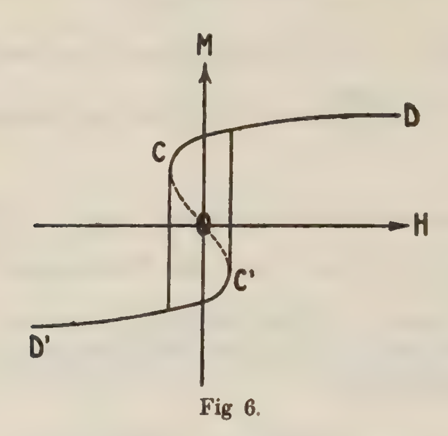


Fig 6.

§ 9. Reihenentwickelungen und Nährungsformeln.

Da die Integrale in den Formeln (52a) und (52b), welche M als Funktion von K darstellen, sich nicht allgemein integrieren lassen, so sollen in diesem Paragraphen zunächst Reihen für M als Funktion von K entwickelt werden.

Nach (52a) ist für $K < A$

$$\frac{M}{M_\infty} = \int_{A-K}^{A+K} L(a) \frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{4 K^2 A} d\mathfrak{h}, \tag{79}$$

wenn a und L durch (46) und (50) definiert sind.

Entwickeln wir $L(a)$ nach Potenzen von $\gamma(\mathfrak{h} - A)$, also

$$\begin{aligned} L(a) &= L(\gamma A) + L'(\gamma A)\gamma(\mathfrak{h} - A) + L''(\gamma A)\gamma^2 \frac{(\mathfrak{h} - A)^2}{2} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} L^{(n)}(\gamma A)\gamma^n \frac{(\mathfrak{h} - A)^n}{n!} \end{aligned} \tag{80}$$

und substituieren diesen Wert in (79), so erhalten wir bei Vertauschung der Summations- und Integrationsfolge

$$\frac{M}{M_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{(n)}(\gamma A)\gamma^n}{n!\,4 K^2 A} \int_{A-K}^{A+K} (\mathfrak{h} - A)^n [\mathfrak{h}^2 + K - A^2]\, d\mathfrak{h}$$

oder, wenn wir in dem Integral anstatt $\mathfrak{h}$ eine neue Variable durch die Substitution $u = \mathfrak{h} - A$ einführen,

$$\frac{M}{M_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{(n)}(\gamma A)\gamma^n}{n!\,4\,K^2 A} \int_{-K}^{+K} u^n [u^2 + 2\,Au + K^2]\,du$$

oder schließlich durch Ausführung der Quadratur für $K < A$

$$(81) \quad \frac{M}{M_\infty} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big\{ L^{(2\nu)}(\gamma A)(\gamma A)^{2\nu} 2.(\nu+1) + L^{(2\nu+1)}(\gamma A)(\gamma A)^{2\nu+1} \Big\} \left(\frac{K}{A}\right)^{2\nu+1} \frac{1}{(2\nu+1)!\,(2\nu+3)}.$$

In derselben Weise ergibt sich für $K > A$ aus (52b), wenn wir $L(a)$ nach Potenzen von $\gamma(\mathfrak{h} - K)$ entwickeln,

$$\frac{M}{M_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{(n)}(\gamma K)\gamma^n}{n!} \int_{K-A}^{K+A} (\mathfrak{h} - K)^n \frac{\mathfrak{h}^2 + K^2 - A^2}{4\,K^2 A}\,d\mathfrak{h}$$

oder durch die Substitution $\mathfrak{h} - K = u$ in dem Integral und Ausführung der Quadratur für $K > A$

$$(82) \quad \frac{M}{M_\infty} = L(\gamma K) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big\{ L^{(2\nu)}(\gamma K)(\gamma K)^{2\nu} + 2\,\nu L^{(2\nu-1)}(\gamma K)(\gamma K)^{2\nu-1} - 2\,\nu L^{(2\nu-2)}(\gamma K).(\gamma K)^{2\nu-2} \Big\} \left(\frac{A}{K}\right)^{2\nu} \frac{1}{(2\nu+1)!}.$$

Es sollen nun einige Spezialisierungen der Formeln (81) und (82) vorgenommen werden, die von besonderem Interesse sind.

Wie wir bereits in der Einleitung erwähnten, hat das molekulare Feld A die Wirkung, daß bei endlichen Feldern nicht alle Magnetonen in die Feldrichtung sich einstellen, und dieselbe Tendenz, den äußeren magnetischen Richtkräften entgegenzuwirken, hat auch die thermische Agitation, und zwar um so mehr, je höher die Temperatur ist. Bei höheren Temperaturen wird man also A überhaupt vernachlässigen können.

Setzen wir $A = 0$, so erhalten wir Formeln, die bereits von Weiß aufgestellt und an der Erfahrung im Allgemeinen sehr gut bestätigt worden sind. Auf Grund unserer Stabilitätsbetrachtungen können wir indessen darüber hinaus die ganze Magnetisierungskurve eines Kristalls bei beliebig gegebener Temperatur berechnen und Formeln für verschiedene magnetische Größen als Funktion der Temperatur angeben. So werden wir unter anderem auch die Koerzitivkraft in ihrer Temperaturabhängigkeit bestimmen.

Diese Formeln werden aber bei sehr niedrigen Temperaturen, bei denen die thermische Agitation so klein ist, daß A berücksichtigt werden muß, keine Gültigkeit mehr beanspruchen können.

Deshalb werden wir besondere Formeln für niedrige Temperaturen ableiten, an der Hand derer sich das molekulare Feld A eventuell experimentell wird bestimmen lassen.

1. Vernachlässigung des molekularen Feldes.

Ist A so klein und T so groß, daß $(\gamma A)^2 = \left(\frac{\mu A}{kT}\right)^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, so folgt aus (81) für $K < A$

$$\frac{M}{M_\infty} = [2\,L(\gamma A) + L'(\gamma A)\,\gamma A]\,\frac{K}{3A}, \tag{83}$$

und da mit der erwähnten Vernachlässigung, wie sich durch Reihenentwicklung der Funktion $L(x)$ ohne weiteres ergibt:

$$L(x) = x\,L'(x) = \frac{x}{3} \tag{84}$$

ist, so erhalten wir aus (83)

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{\gamma K}{3} = L(\gamma K). \tag{85}$$

Für $K > A$ ergibt sich mit derselben Genauigkeit aus (82)

$$\frac{M}{M_\infty} = L(\gamma K) + [L''(\gamma K)(\gamma K)^2 + 2\,L'(\gamma K)\,.\,\gamma K - 2\,L(\gamma K)]\,\frac{A^2}{6K^2}. \tag{86}$$

Da aber nach (50)

$$L(x) = \mathfrak{Ctg}\,x - \frac{1}{x}$$

und somit

$$L'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x}, \tag{87}$$

$$L''(x) = 2\left(\frac{\mathfrak{Ctg}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x} - \frac{1}{x^3}\right)$$

ist, so können wir den eckigen Klammerausdruck in (86) in der Form schreiben $-2\,L(\gamma K)\,L'(\gamma K)\,(\gamma K)^2$, sodaß

$$\frac{M}{M_\infty} = L(\gamma K)\left[1 - L'(\gamma K)\,\frac{\gamma^2 A^2}{3}\right] \tag{88}$$

wird. Da nun, wie aus der Funktionentafel Kolonne 4 hervorgeht, $L'(x)$ stets kleiner als $1/3$ ist, so ist $L'(\gamma K)\,\frac{\gamma^2 A^2}{3} < \frac{\gamma^2 A^2}{9}$ und also zu vernachlässigen.

Für alle Werte von K haben wir also

(89) $$\frac{M}{M_\infty} = L(\gamma K),$$

wie auch unmittelbar aus der Gleichung (52b) hervorgeht,[1] wenn man darin $\lim A = 0$ setzt.

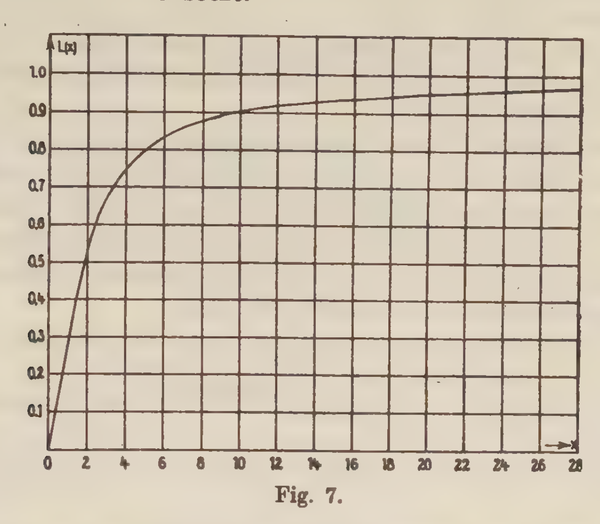


Fig. 7.

Um ein Bild von dem Verhalten der Funktion L zu geben, ist in Fig. 7 $L(x)$ als Funktion von x, oder was nach (89), dasselbe ist, $\frac{M}{M_\infty}$ als Funktion von γK aufgetragen und zwar auf Grund der in Kolonne 2 der Funktionentafel berechneten Zahlenwerte.

Zu der Gleichung (89) kommt nun noch die Formel (vgl. (71))

(90) $$K = H + NM$$

hinzu, in der N für die verschiedenen Symmetrieaxen verschiedene Werte hat.

Aus (90) folgt

$$\gamma H = \gamma K - \gamma N M_\infty \cdot \frac{M}{M_\infty}$$

oder

(91) $$\gamma H = \gamma K - \operatorname{tg} \alpha \frac{M}{M_\infty},$$

wenn wir

(92) $$\operatorname{tg} \alpha = \gamma N M_\infty = \frac{\mu N M_\infty}{kT}$$

setzen.

Nach den Erörterungen des § 7 zeigt Gleichung (91), daß man $\frac{M}{M_\infty}$ als Funktion von γH einfach durch Scherung um den Winkel α aus Fig. 7 erhält, und zwar ist die trigonometrische Tangente dieses Scherungswinkels nach (92) der absoluten Temperatur umgekehrt proportional.

Gibt man T alle möglichen Werte, so erhält man ein System von Kurven, die als Isothermen für das magnetische Verhalten des Kristalls anzusprechen sind.

Wie wir ebenfalls im § 7 bereits gefunden haben, weisen diese Isothermen einen ganz verschiedenen Typus auf, je nachdem α größer oder kleiner als der Winkel β ist, den die Tangente an der Kurve Fig. 7 im Nullpunkt mit der Ordinatenaxe bildet. Aus der Reihenentwicklung des in (87) angegebenen Ausdrucks für $L'(x)$ nach Potenzen von x folgt aber, daß

$$L'(0) = \lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 x} \right) = \tfrac{1}{3}$$

ist, sodaß

(93) $$\operatorname{tg} \beta = 3$$

wird.

Für $\alpha < \beta$ oder, was nach (92) und (93) dasselbe ist, für

$$T > \frac{\mu N M_\infty}{3k}$$

befindet sich die durch Scherung entstehende $\frac{M}{M_\infty}$, γH-Kurve vollständig im ersten Quadranten (vgl. Fig. 4), ist also im ganzen Verlauf stabil, und der Zustand des Kristalls ist in diesem Falle als paramagnetisch zu bezeichnen.

Ist dagegen $\alpha > \beta$ oder

$$T < \frac{\mu N M_\infty}{3k},$$

so erhält man einen Verlauf der Magnetisierungskurve, wie er in Fig. 5 resp. 5a dargestellt ist, und die auf Grund der in § 8 angestellten Stabilitätsbetrachtungen in den ausgezogenen Teil der Fig. 6 übergeht. Dieser Zustand des Kristalls ist somit ferromagnetisch.

Die Temperatur

(94) $$\Theta = \frac{\mu N M_\infty}{3k}$$

ist nach den soeben angestellten Betrachtungen die Temperatur, oberhalb deren der Kristall paramagnetisch, unterhalb deren er ferromagnetisch ist.

Die Remanenz als Funktion der Temperatur.

Der ferromagnetische Zustand ist dadurch gekennzeichnet, daß auch ohne äußeres Feld H eine Magnetisierung M bestehen kann, wie aus Fig. 6 ohne weiteres hervorgeht. Diese Magnetisierung M_R, die für $H = 0$ sich ergibt, wollen wir, wie üblich, als Remanenz bezeichnen.

Aus Gleichung (91), die für $H = 0$ und $M = M_R$

(95) $$\gamma K = \operatorname{tg}\alpha \frac{M_R}{M_\infty}$$

oder

$$x = \operatorname{tg}\alpha \; y_R$$

lautet, wenn wir $\gamma K = x$, $\frac{M}{M_\infty} = y$ setzen, ergibt sich, daß der Schnittpunkt P der Scherungslinie OS mit der Kurve $\frac{M}{M_\infty} = L(\gamma K)$ eine Ordinate hat, die gleich $\frac{M_R}{M_\infty}$ ist. Nach (92) und (94) ist

(96) $$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{T}{3\Theta}.$$

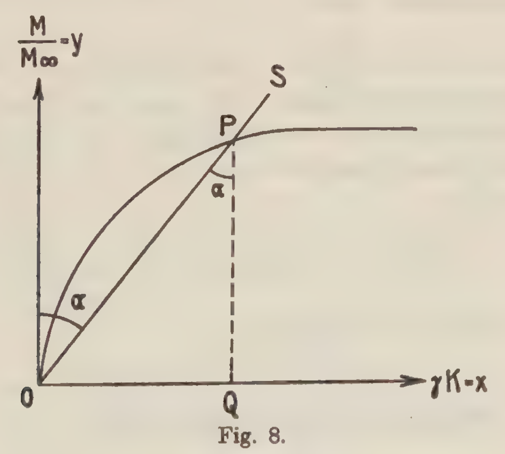


Fig. 8.

Tragen wir also in einem Diagramm als Abszisse $3\frac{y}{x} = 3\frac{L(x)}{x}$, als Ordinate $L(x)$ auf, so erhalten wir eine Kurve, die $\frac{M_R}{M_\infty}$ als Funktion von $\frac{T}{\Theta}$ darstellt (vgl. Fig. 9).

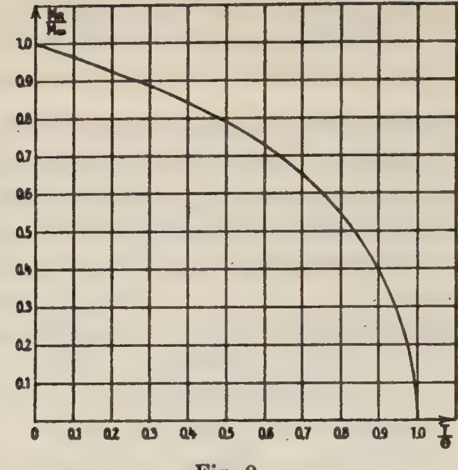


Fig. 9.

Zu diesem Zwecke ist in Kolonne 3 der Funktionentabelle neben $L(x)$ auch $\frac{L(x)}{x}$ als Funktion von x berechnet.

Weiß[1]) hat diese Rechnungen zuerst angestellt und mit der Erfahrung an Magnetit zwischen $T = 273^0 - 79^0$ und $T = 273^0 + 587^0$ verglichen. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist hervorragend gut, während die Abweichungen für Nickel[2]) beträchtlicher sind.

Die Koerzitivkraft als Funktion der Temperatur.

Als Koerzitivkraft haben wir, wie aus Fig. 6 hervorgeht, diejenige Feldstärke $-H_c$ zu bezeichnen, bei der die gescherte Kurve eine vertikale Tangente hat.

Setzen wir

$$\gamma H = x', \ \gamma K = x, \ \frac{M}{M_\infty} = y, \tag{97}$$

so folgt aus (89), (90) und (92)

$$y = L(x) = L(x' + y \operatorname{tg} \alpha). \tag{98}$$

Durch Differentiation ergibt sich aus (98)

$$\frac{dy}{dx' + \operatorname{tg} \alpha . dy} = L'$$

1) P. Weiß, Bull. des séances de la soç. Franç. de Phys. 1907. Separat-Abdruck pag. 7.

2) P. Weiß und H. Kamerlingh Onnes, Journ. de phys. 1910. Separat-Abdruck S. 4.

oder

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{L'}{1 - L' \operatorname{tg} \alpha} \tag{99}$$

Dieser Ausdruck, und somit nach (97) $\frac{dM}{dH}$, wird aber unendlich wenn

$$L' = \frac{dL}{dx} = \operatorname{ctg} \alpha. \tag{100}$$

Die Abszisse x' dieses Kurvenpunktes ergibt sich nach (91) mit den Bezeichnungen (97) zu

$$x' = x - y \operatorname{tg} \alpha$$

oder nach (98) und (100) zu

$$x' = x - \frac{L}{\frac{dL}{dx}}. \tag{101}$$

Da nun $x' = -\gamma H_c = -\gamma N M_\infty \cdot \frac{H_c}{N M_\infty}$ und nach (92) u. (100)

$$\gamma N M_\infty = \frac{1}{\frac{dL}{dx}}$$

ist, so kann man (101) auch

$$\frac{H_c}{N M_\infty} = L - x \frac{dL}{dx} \tag{102}$$

schreiben.

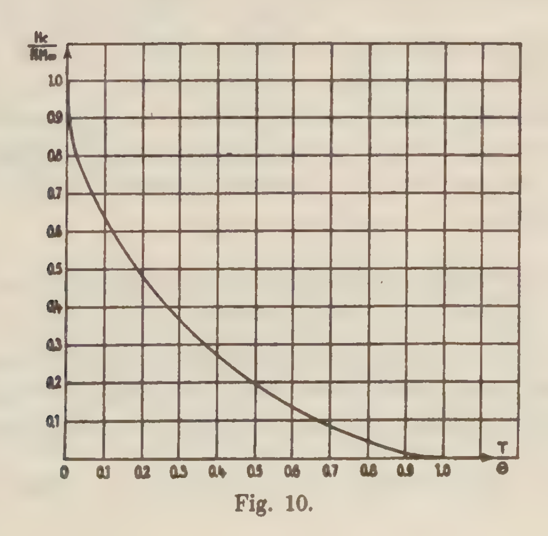


Fig. 10.

Die Gleichung (102) ergibt also $\frac{H_c}{NM_\infty}$, aus (100) und (92) folgt $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{kT}{\mu NM_\infty} = \frac{T}{3\Theta} = \frac{dL}{dx}$. Tragen wir also als Abszisse $3\frac{dL}{dx}$, als Ordinate $L - x\frac{dL}{dx}$ auf (Fig. 10), so erhalten wir $\frac{H_c}{NM_\infty}$ als Funktion von $\frac{T}{\Theta}$. Die hier in Betracht kommende Funktion $L - x\frac{dL}{dx}$ ist in der Funktionentabelle Kolonne 5 berechnet.

Geometrisch ergibt sich der Punkt der Magnetisierungskurve, in welchem der plötzliche senkrechte Abfall stattfindet, durch Scherung des Punktes der Kurve $y = L(x)$, in welchem die Tangente parallel der Scherungslinie ist (vgl. Gl. (100)).

Die Beziehung zwischen H_c und T ist noch nicht experimentell an Kristallen festgelegt worden.

Bemerkung: Durch die Scherung der Kurve Fig. 7, die man etwa so einrichten kann, daß die relative Remanenz $\frac{M_s}{M_\infty}$ den richtigen Wert einer beobachteten Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Kristalls erhält, bekommt man $\frac{M}{M_\infty}$ als Funktion von $\gamma H = \frac{\mu}{kT}H$. Die Beobachtung ergibt direkt M als Funktion von H. Die Verhältnisse, in denen man sämtliche beobachteten Ordinaten resp. Abscissen vergrößern muß, um die beobachtete Kurve mit der theoretischen zur Deckung zu bringen, ergeben also $\frac{1}{M_\infty}$ und $\frac{\mu}{kT}$. Da nun k (vgl. S. 130) und T bekannt sind, so folgt hieraus das Moment μ des einzelnen Elementarmagneten, und da $M_\infty = N\mu$ ist [1]), so folgt ferner die Anzahl N der in der Volumeinheit befindlichen Magnetonen. Diese molekulartheoretisch wichtigen Größen müßten sich also aus den Weißschen Beobachtungen am Pyrrhotin bestimmen lassen.

2. Berücksichtigung des molekularen Feldes in erster Näherung.

Ist γA nicht mehr so klein, daß man es vollkommen vernachlässigen kann, aber doch noch nicht so groß, daß seine vierten Potenzen berücksichtigt werden müßten, so erhält man aus den

1) Dieses N darf nicht mit dem in Formel (90)ff. benutzten verwechselt werden.

ersten beiden Gliedern der unendlichen Reihe (81) für $K < A$

(103) $$\frac{M}{M_\infty} = [2\,L(\gamma A) + L'(\gamma A) \,.\, \gamma A]\,\frac{K}{3A}$$
$$+ [4\,L''(\gamma A)(\gamma A)^2 + L'''(\gamma A)(\gamma A)^3]\,\frac{K^3}{30\,A^3}$$

oder mit Beachtung der für L und seine Ableitungen gültigen Reihenentwickelungen

(104) $$\begin{aligned} L(x) &= \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} \\ L'(x) &= \frac{1}{3} - \frac{x^2}{15} \\ L''(x) &= -\frac{2x}{15} \\ L'''(x) &= -\frac{2}{15} \end{aligned}$$

(105) $$\frac{M}{M_\infty} = \frac{\gamma K}{3}\left(1 - \frac{\gamma^2 A^2}{9}\right) - \frac{\gamma^3 K^3}{45} = L(\gamma K)\left(1 - \frac{\gamma^2 A^2}{9}\right).$$

Für $K > A$ hatten wir bereits durch Abbrechen der Reihe (82 nach dem zweiten Gliede (vgl. Gl. (88)) gefunden

(106) $$\frac{M}{M_\infty} = L(\gamma K)\left[1 - \frac{\gamma^2 A^2}{3} L'(\gamma K)\right].$$

Will man aus diesen Gleichungen die Remanenz als Funktion der Temperatur berechnen, so hat man aus (105) zunächst den Winkel β zu bilden, den die Tangente im Nullpunkte mit der Ordinatenaxe einschließt. Es folgt

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{d\frac{M}{M_\infty}}{d\gamma K} = L'(0)\left(1 - \frac{\gamma^2 A^2}{9}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\gamma^2 A^2}{9}\right).$$

Ferner ist (vgl. 92)

(107) $$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{kT}{\mu N M_\infty}.$$

Die Übergangstemperatur Θ vom ferromagnetischen zum paramagnetischen Zustande ergibt sich also aus der Beziehung $\alpha = \beta$ zu

$$\Theta = \frac{\mu N M_\infty}{3k}\left(1 - \frac{\gamma^2 A^2}{9}\right) = \frac{\mu N M_\infty}{3k}\left(1 - \frac{\mu^2 A^2}{9\,k^2\,\Theta^2}\right)$$

oder wenn man für das Θ in der Klammer den Näherungswert $\frac{\mu N M_\infty}{3k}$ einsetzt,

$$\Theta = \frac{\mu N M_\infty}{3k}\left(1 - \frac{A^2}{N^2 M_\infty^2}\right). \tag{108}$$

So folgt aus (106) und (107) mit Benutzung von (108) für $K > A$

$$\frac{T}{3\Theta}\left(1 - \frac{A^2}{N^2 M_\infty^2}\right) = \frac{L(x)}{x}\left[1 - \frac{\gamma^2 A^2}{3} L'(x)\right]$$

oder wenn man $\gamma = \frac{\mu}{kT}$ und genähert nach (107) $\frac{\mu}{kT} = \frac{x}{L(x) N M_\infty}$ setzt,

$$\frac{T}{\Theta} = \frac{3L(x)}{x}\left[1 + \frac{A^2}{N^2 M_\infty^2}\left(1 - \frac{x^2 L'(x)}{3L^2(x)}\right)\right], \tag{109}$$

während nach (106)

$$\frac{M_z}{M_\infty} = L(x)\left[1 - \frac{A^2}{N^2 M_\infty^2} \frac{x^2 L'(x)}{3L^2(x)}\right] \tag{110}$$

wird.

Berechnet man, wie Weiß das tut, $\frac{T}{\Theta}$ und $\frac{M_z}{M_\infty}$ nach den Formeln $\frac{T}{\Theta} = \frac{3L(x)}{x}$ resp. $\frac{M_z}{M_\infty} = L(x)$ anstatt nach (109) und (110), so wird für niedrige Temperaturen, d. h. große x, für die $\frac{x^2 L'(x)}{L^2(x)}$ sich der Einheit nähert, die Ordinate für eine bestimmte Abszisse zu groß. In diesem Sinne liegen die Abweichungen der beobachteten Kurve von der berechneten, wir wollen es aber dahingestellt sein lassen, ob die Nichtberücksichtigung des molekularen Feldes der Grund der Differenzen ist.

3. Die Magnetisierungskurve in der Nähe des absoluten Nullpunkts.

Schließlich soll noch in unmittelbarer Nähe des absoluten Nullpunkts die Magnetisierungskurve berechnet werden, weil die so gefundenen Formeln den direkten Anschluß an die für $T = 0$ gültigen Formeln der ersten Abhandlung bilden.

Es sei also γA eine sehr große Zahl.

Dann ist für $K > A$ $\gamma K = x$ a fortiori groß, und es gilt genähert

$$L(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$L'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$L''(x) = -\frac{2}{x^3},$$

allgemein (außer für $n = 0$): $L^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Demnach wird aus der Formel (82), wenn wir $\frac{A}{K} = \zeta$ setzen,

(111) $$\frac{M}{M_\infty} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\zeta^2 + \frac{1}{x}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2\nu}}{(2\nu-1)(2\nu+1)}.$$

Nun läßt sich die Reihe

(112) $$U = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2\nu}}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$$

leicht folgendermaßen in geschlossener Form darstellen:

Nach (112) ist

$$\frac{1}{\zeta}\frac{d(U\zeta)}{d\zeta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2\nu-1}}{2\nu-1} = \frac{1}{2}\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta},$$

also

$$U\zeta = \int_0^{\zeta} \frac{\zeta}{2}\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\,d\zeta.$$

Die untere Grenze ist Null, da $U\zeta$ für $\zeta = 0$ verschwinden muß.

Die Ausführung der Quadratur ergibt

(113) $$U = -\frac{1}{4}\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \frac{1}{2},$$

sodaß nach (111) für $K > A$

(114) $$\frac{M}{M_\infty} = 1 - \frac{1}{3}\zeta^2 - \frac{1}{2x}\left\{1 + \frac{1-\zeta^2}{2\zeta}\lg\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right\}$$

wird, wo $\zeta = \frac{A}{K}$ ist und $x = \gamma K$ einen großen Wert hat. (Die Zahl 4 ist bereits als groß anzusehen.)

Unter derselben Bedingung, daß γA groß ist, folgt für $K < A$ aus (81), wenn $\xi = \frac{K}{A}$ gesetzt wird,

(115) $$\frac{M}{M_\infty} = \frac{2}{3}\xi - \frac{1}{\gamma A}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\xi^{2\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+3)}.$$

Setzen wir, um (115) in geschlossene Form zu bringen,

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\xi^{2\nu+1}}{(2\nu+1)(2\nu+3)}, \tag{116}$$

sodaß

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}(\xi^2 W) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\xi^{2\nu+1}}{2\nu+1} = \frac{1}{2}\lg\frac{1+\xi}{1-\xi}$$

ist, so wird

$$W = \frac{1}{2\xi}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1-\xi^2}{\xi}\lg\frac{1+\xi}{1-\xi}\right),$$

also nach (115) für $K < A$

$$\frac{M}{M_\infty} = \frac{2}{3}\xi - \frac{1}{2\gamma A\xi}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1-\xi^2}{\xi}\lg\frac{1+\xi}{1-\xi}\right), \tag{117}$$

wo $\xi = \frac{K}{A}$ ist und γA einen großen Wert hat.

Die Formeln (114) und (117), gehen für $T = 0$, d. h. $\gamma = \infty$ in die Formeln I (159) und (160)

$$\frac{M}{M_\infty} = 1 - \frac{1}{3}\frac{A^2}{K^2} \text{ resp. } \frac{M}{M_\infty} = \frac{2}{3}\frac{K}{A}$$

über.

§ 10. Der paramagnetische Zustand ferromagnetischer Stoffe.

Um Formeln für den paramagnetischen Zustand zu erhalten, darf man sich in der Reihe (81) auf das erste Glied beschränken, welches eine lineare Abhängigkeit der Magnetisierung von K und nach (71) auch von H ergibt, denn es sind keine Beobachtungen bis jetzt bekannt, die auf eine Abhängigkeit des Susceptibilität von der Feldstärke bei paramagnetischen Stoffen schließen lassen. (Das wird eventuell daran liegen, daß wir nur in der Lage sind, Felder bis zur Höhe von ungefähr 40000 Gauß herzustellen.)

In dieser Näherung lautet (81)

$$M = \frac{M_\infty}{3A} F(\gamma A) K, \tag{118}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$2L(\gamma A) + \gamma A L'(\gamma A) = F(\gamma A) \tag{119}$$

setzen.

Da aber nach (71)

$$K = H + NM \tag{120}$$

ist, so folgt

(121) $$M = \frac{\frac{M_\infty}{3A} F(\gamma A) H}{1 - \frac{N M_\infty}{3A} F(\gamma A)}$$

Hat die Temperatur solche Werte, daß

$$\frac{N M_\infty}{3A} F(\gamma A) < 1$$

ist, so ist $\varkappa = \frac{dM}{dH} > 0$, also der Zustand für $H = 0$ stabil, und zwar ist

(122) $$\varkappa = \frac{\frac{M_\infty}{3A} F(\gamma A)}{1 - \frac{N M_\infty}{3A} F(\gamma A)}$$

als Susceptibilität des Mediums anzusprechen.

Ist dagegen

$$\frac{N M_\infty}{3A} F(\gamma A) > 1,$$

so ist nach den Betrachtungen des § 8 der Zustand für $H = 0$, $M = 0$ labil, der Körper also ferromagnetisch.

Aus der Gleichung

(123) $$\frac{N M_\infty}{3A} F(\gamma_0 A) = 1$$

ergibt sich ein Wert γ_0 und somit eine Temperatur Θ, die als Übergangstemperatur aus dem ferromagnetischen in den paramagnetischen Zustand anzusehen ist.

Durch Einführung von (123) in (122) schreibt sich diese Gleichung

(124) $$\varkappa = \frac{1}{N F(\gamma_0 A)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{F(\gamma A)} - \frac{1}{F(\gamma_0 A)}}.$$

Sind γA und $\gamma_0 A$ sehr kleine Größen, sodaß wir uns in (119) auf die erste Potenz beschränken können, so wird (vgl. (104))

(125) $$F(\gamma A) = \gamma A = \frac{\mu A}{kT}, \qquad F(\gamma_0 A) = \frac{\mu A}{k\Theta},$$

sodaß (124) in

(126) $$\varkappa = \frac{\Theta}{N(T-\Theta)}$$

übergeht.

Ist Θ klein gegen T, so ist

(127) $$\varkappa = \frac{\Theta}{NT}$$

eine Näherungsformel für (126), die also Gültigkeit beansprucht, solange $\frac{\mu A}{k\Theta}$ und $\frac{\Theta}{T}$ kleine Zahlen sind.

Die Formel (127) ist der Ausdruck eines von Curie aufgestellten Gesetzes, nach dem die Susceptibilität paramagnetischer Stoffe der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist.

In der Funktionentafel Kolonne 6 und 7 ist $\frac{1}{F(x)}$ als Funktion von $\frac{1}{x}$ berechnet und in Fig. 11 graphisch dargestellt; die Abscissen dieser Kurve sind somit der absoluten Temperatur proportional.

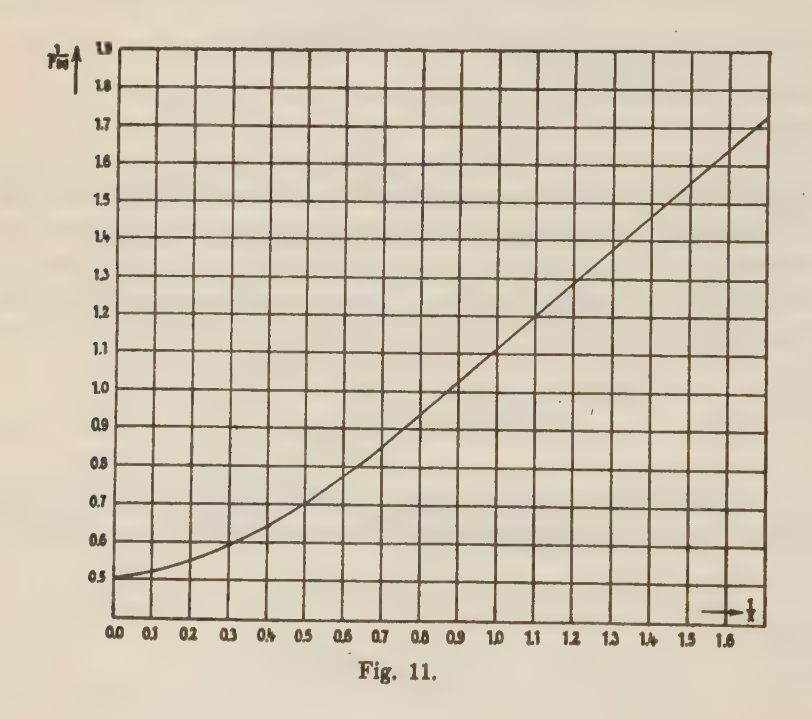


Fig. 11.

Die Formel (126) ist bereits von Weiß[1]) aufgestellt und mit den Curieschen Experimenten verglichen worden.

§ 11. Die Energie ferromagnetischer Kristalle.

Die magnetische Energie der Volumeinheit eines Elementarkomplexes können wir auf Grund der Formel (23′)

(128) $$w = -\tfrac{1}{2}\sum(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$$

berechnen, wenn $\mathfrak{m}$ das magnetische Moment eines Magnetons bedeutet, $\mathfrak{h}$ das von den übrigen Magnetonen am Orte des betrachteten hervorgerufene Feld (erregende Kraft) und die Summe über sämtliche Magnetonen der Volumeinheit erstreckt wird.

Wir greifen von allen Magnetonen der Volumeinheit eine ausgezeichnete Gruppe (vgl. § 2) heraus. Für diese hat die erregende Kraft $\mathfrak{h}$, die sich aus K und A zusammensetzt, einen festen Wert, sowohl was Größe als auch was Richtung anbetrifft. Projizieren wir die Momente sämtlicher Magnetonen der Gruppe auf die Richtung von $\mathfrak{h}$ und summieren, so erhalten wir einen Wert, den wir in § 5 (49) mit dM bezeichnet haben. Es war

(129) $$dM = \frac{N\mu}{4\pi} L(a)\, d\omega,$$

also ist der Beitrag dieser ausgezeichneten Gruppe zur Energiedichte

(130) $$dw = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{h} \,.\, dM = -\frac{M_\infty}{8\pi}\mathfrak{h}\, L(a) \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

und somit durch Integration über ϑ' und φ' die Energiedichte selbst

(131) $$w = -\frac{M_\infty}{4}\int_0^\pi \mathfrak{h} L(a) \sin\vartheta'\, d\vartheta'.$$

Nach I (156) ist aber

(132) $$\mathfrak{h}\, d\mathfrak{h} = -AK \sin\vartheta'\, d\vartheta',$$

also

(133 a) $$w = -\frac{M_\infty}{4AK}\int_{A-K}^{A+K} L(a)\, \mathfrak{h}^2 d\mathfrak{h} \quad \text{für } K < A$$

und

(133 b) $$w = -\frac{M_\infty}{4AK}\int_{K-A}^{K+A} L(a)\, \mathfrak{h}^2 d\mathfrak{h} \quad \text{für } K > A.$$

---

1) P. Weiß, Bull. des séances de la Soc. Franç. d. Phys. 1907, Separatabdruck, pag. 24.

Um die in (133a) angedeutete Integration auszuführen, entwickeln wir, wie in § 9 (80) $L(a)$ nach Potenzen von $\mathfrak{h} - A$ und führen $u = \mathfrak{h} - A$ als neue Integrationsvariable ein.

Dadurch erhalten wir für $K < A$

$$(134) \qquad w = -\frac{M_\infty}{4AK} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{(n)}(\gamma A)\gamma^n}{n!} \int_{-K}^{+K} u^n (u^2 + 2Au + A^2)\, du$$

und durch Ausführung der Quadratur

$$(135) \qquad w = -\frac{AM_\infty}{2} \Big\{ L(\gamma A) + \sum_{\nu=0}^{\infty} [L^{(2\nu)}(\gamma A)(2\nu+1)(2\nu+2)$$

$$+ 2L^{(2\nu+1)}(\gamma A)\gamma A . (2\nu+2) + L^{(2\nu+2)}(\gamma A)(\gamma A^2)] \left(\frac{K}{A}\right)^{2\nu+2} \frac{(\gamma A)^{2\nu}}{(2\nu+3)!} \Big\}.$$

In analoger Weise ergibt sich aus (133b), wenn wir, wie in § 9 pag 28 $L(a)$ nach Potenzen von $(\mathfrak{h} - K)$ entwickeln und sodann $\mathfrak{h} - K = u$ substituieren, für $K > A$

$$(136) \qquad w = -\frac{M_\infty}{4AK} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{(n)}(\gamma K)}{n!} \gamma^n \int_{-A}^{+A} u^n (u^2 + 2uK + K^2)\, du$$

und durch Ausführung der Quadratur

$$(137) \qquad w = -\frac{M_\infty K}{2} \Big\{ L(\gamma K) + \sum_{\nu=0}^{\infty} [L^{(2\nu)}(\gamma K)(2\nu+1)(2\nu+2)$$

$$+ 2L^{(2\nu+1)}(\gamma K)\gamma K . (2\nu+2) + L^{(2\nu+2)}(\gamma K)(\gamma K)^2] \left(\frac{A}{K}\right)^{2\nu+2} \frac{(\gamma A)^{2\nu}}{(2\nu+3)!} \Big\}.$$

Ist A so klein, daß es vernachlässigt werden kann, so folgt aus (137)

$$(138) \qquad w = -\frac{M_\infty K L(\gamma K)}{2}$$

und mit Benutzung von (89)

$$(139) \qquad w = -\frac{MK}{2}.$$

Ist im ferromagnetischen Zustande kein äußeres Feld vorhanden, so ist nach (71)

$$(140) \qquad K = NM,$$

sodaß aus (139)

$$(141) \qquad w = -\frac{NM^2}{2}$$

sich ergibt.

Diese Formel hat Weiß[1]) mit großem Erfolge auf die Erklärung des anomalen Verhaltens der spezifischen Wärme ferromagnetischer Materialien bei verschiedenen Temperaturen angewandt.

Nicht nur durch Berechnung der magnetischen Energie, sondern auch durch Ermittlung der Entropie läßt sich die Wärmeaufnahme bei Änderung der Temperatur und der Magnetisierung bestimmen.

Um die Entropie zu finden, greifen wir auf die Verteilungsfunktion (vgl. (42))

$$f = C e^{-\frac{1}{2}\frac{m}{kT}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} e^{a\cos\varepsilon} \tag{142}$$

zurück.

Indem wir das molekulare Feld A vernachlässigen, sehen wir aus (46), daß $a = \frac{\mu K}{kT}$ ist.

C ergibt sich dabei aus der Gleichung

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^\pi f\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \sin\varepsilon\, d\varepsilon = N$$

zu

$$C = \frac{Na}{2\,\mathfrak{Sin}\, a}\sqrt{\frac{m}{2\pi k T}}^{3} \tag{143}$$

Setzen wir den so gefundenen Wert von f in den Ausdruck (32) für die Entropie ein und berechnen die Entropie des Volumens V, indem wir die Gesamtzahl der Magnetonen

$$\mathfrak{N} = NV \tag{144}$$

einführen, so erhalten wir

$$S = \mathfrak{N}k\left[\frac{3}{2}\lg T + \lg V - \lg\frac{a}{\mathfrak{Sin}\, a} - a\,\mathfrak{Ctg}\, a\right] + \text{Const.} \tag{145}$$

Die Wärmemenge, deren man bedarf, um die Temperatur um dT, die Größe a um da zu erhöhen, ist unter der Annahme, daß der Elementarkomplex sein Volumen V unverändert beibehält,

$$dQ = TdS = \frac{3}{2}\mathfrak{N}k\,dT - \mathfrak{N}kTa\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 a}\right)da. \tag{146}$$

Substituieren wir im letzten Term für a seinen Wert $\frac{\mu K}{kT}$

1) P. Weiß u. Paul-N. Beck, Journ. de phys. 1908.

und für $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 a}\right)da$ nach (87) $dL(a) = d\frac{M}{M_\infty} = \frac{dM}{N\mu}$, so erhalten wir mit Berücksichtigung von (144)

$$dQ = \tfrac{3}{2}\mathfrak{R}k\,dT - VKdM. \tag{147}$$

Der erste Term ist der normalen spezifischen Wärme, der zweite der anomalen spezifischen Wärme infolge der magnetischen Energieumsetzungen proportional.

Wirkt kein äußeres Feld, so ist nach (71)

$$K = NM,$$

sodaß der zweite Term in (147)

$$-VNMdM = -\frac{VN}{2}\frac{dM^2}{dT}dT$$

wird. Hier ist M, da $\mathfrak{H} = 0$ ist, durch die Remanenz M_s zu ersetzen, deren Temperaturabhängigkeit in Figur 9 dargestellt ist.

Das ist aber gerade die von Weiß abgeleitete Beziehung.

§ 12. Funktionentafel.

1	2	3	4	5	6	7
x	$L(x)$	$\frac{L(x)}{x}$	$\frac{dL(x)}{dx}$	$L(x)-x\frac{dL(x)}{dx}$	$\frac{1}{F(x)}$	$\frac{1}{x}$
0.0	0.00000	0.3333	0.3333	0.0000	∞	∞
0.1	0.03331	0.3331	0.3327	0.0000	10.03	10.0000
0.2	0.06650	0.3325	0.3307	0.0004	5.022	5.0000
0.3	0.09942	0.3314	0.3276	0.0011	3.366	3.3333
0.4	0.13188	0.3297	0.3229	0.0027	2.546	3.5000
0.5	0.16395	0.3279	0.3173	0.0053	2.056	2.000
0.6	0.19537	0.3256	0.3106	0.0090	1.733	1.667
0.7	0.22605	0.3229	0.3030	0.0139	1.505	1.429
0.8	0.25596	0.3199	0.2946	0.0203	1.338	1.250
0.9	0.28495	0.3166	0.2855	0.0280	1.210	1.111
1.0	0.31306	0.3131	0.2759	0.0371	1.109	1.000
1.1	0.34064	0.3097	0.2659	0.0481	1.027	0.909
1.2	0.36620	0.3052	0.2555	0.0596	0.9625	0.833
1.3	0.39123	0.3009	0.2450	0.0727	0.9082	0.769
1.4	0.41520	0.2966	0.2344	0.0871	0.8636	0.714
1.5	0.43812	0.2921	0.2239	0.1023	0.8250	0.667
1.6	0.46000	0.2875	0.2134	0.1186	0.7930	0.625
1.7	0.48081	0.2828	0.2031	0.1356	0.7651	0.588
1.8	0.50064	0.2781	0.1932	0.1529	0.7413	0.556
1.9	0.51944	0.2733	0.1834	0.1709	0.7211	0.526
2.0	0.53731	0.2687	0.1740	0.1893	0.7028	0.500
2.1	0.55426	0.2639	0.1650	0.2078	0.6873	0.476
2.2	0.57025	0.2592	0.1563	0.2264	0.6738	0.454
2.3	0.58552	0.2546	0.1480	0.2451	0.6617	0.435
2.4	0.59993	0.2499	0.1401	0.2637	0.6510	0.417

1	2	3	4	5	6	7
x	$L(x)$	$\frac{L(x)}{x}$	$\frac{dL(x)}{dx}$	$L(x)-x\frac{dL(x)}{dx}$	$\frac{1}{F(x)}$	$\frac{1}{x}$
2.5	0.61356	0.2455	0.1328	0.2816	0.6415	0.400
2.6	0.62648	0.2409	0.1256	0.2999	0.6328	0.385
2.7	0.63870	0.2365	0.1190	0.3174	0.6255	0.370
2.8	0.65028	0.2322	0.1127	0.3347	0.6188	0.357
2.9	0.66124	0.2279	0.1067	0.3518	0.6128	0.345
3.0	0.67162	0.2239	0.1011	0.3682	0.6075	0.333
3.2	0.69083	0.2159	0.0910	0.3996	0.5977	0.312
3.4	0.70811	0.2083	0.0820	0.4293	0.5899	0.294
3.6	0.72372	0.2010	0.0742	0.4566	0.5834	0.278
3.8	0.73786	0.1942	0.0673	0.4821	0.5778	0.263
4.0	0.75067	0.1876	0.0612	0.5060	0.5728	0.250
4.2	0.76238	0.1816	0.0558	0.5281	0.5685	0.238
4.4	0.77303	0.1757	0.0511	0.5482	0.5646	0.227
4.6	0.78282	0.1702	0.0469	0.5670	0.5615	0.217
4.8	0.79181	0.1650	0.0431	0.5849	0.5586	0.208
5.0	0.80010	0.1601	0.0398	0.6010	0.5558	0.200
5.2	0.80776	0.1553	0.0369	0.6159	0.5534	0.192
5.4	0.81486	0.1509	0.0342	0.6302	0.5513	0.185
5.6	0.82145	0.1467	0.0319	0.6428	0.5491	0.179
5.8	0.82761	0.1427	0.0297	0.6553	0.5473	0.172
6.0	0.83335	0.1389	0.0278	0.6665	0.5455	0.167
6.2	0.83871	0.1353	0.0259	0.6781	0.5441	0.161
6.4	0.84375	0.1318	0.0244	0.6875	0.5424	0.156
6.6	0.84848	0.1286	0.0229	0.6974	0.5412	0.151
6.8	0.85294	0.1254	0.0216	0.7060	0.5396	0.147
7.0	0.85714	0.1224	0.0204	0.7143	0.5386	0.143
7.2	0.86111	0.1196	0.0193	0.7222	0.5374	0.139
7.4	0.86487	0.1169	0.0183	0.7297	0.5362	0.135
7.6	0.86842	0.1143	0.0173	0.7368	0.5354	0.132
7.8	0.87180	0.1118	0.0164	0.7436	0.5342	0.128
8.0	0.87500	0.1094	0.0156	0.7500	0.5333	0.125
8.2	0.87805	0.1071	0.0149	0.7561	0.5325	0.122
8.4	0.88095	0.1049	0.0142	0.7619	0.5316	0.119
8.6	0.88372	0.1028	0.0135	0.7674	0.5308	0.116
8.8	0.88636	0.1007	0.0129	0.7727	0.5302	0.114
9.0	0.88889	0.0988	0.0123	0.7778	0.5293	0.111
9.2	0.89130	0.0969	0.0118	0.7826	0.5288	0.109
9.4	0.89362	0.0951	0.0113	0.7872	0.5279	0.106
9.6	0.89583	0.0933	0.0108	0.7917	0.5273	0.104
9.8	0.89796	0.0916	0.0104	0.7959	0.5267	0.102
10	0.90000	0.0900	0.0100	0.8000	0.5262	0.100
11	0.90909	0.0826	0.0083	0.8182	0.5238	0.091
12	0.91667	0.0764	0.0069	0.8333	0.5217	0.083
13	0.92308	0.0710	0.0059	0.8461	0.5200	0.077
14	0.92857	0.0663	0.0051	0.8571	0.5183	0.071
15	0.93333	0.0622	0.0044	0.8667	0.5172	0.067
16	0.93750	0.0586	0.0039	0.8750	0.5163	0.062
17	0.94118	0.0554	0.0035	0.8824	0.5152	0.059
18	0.94444	0.0525	0.0031	0.8889	0.5144	0.056
19	0.94737	0.0498	0.0028	0.8947	0.5136	0.053

1	2	3	4	5	6	7
x	$L(x)$	$\frac{L(x)}{x}$	$\frac{dL(x)}{dx}$	$L(x)-x\frac{dL(x)}{dx}$	$\frac{1}{F(x)}$	$\frac{1}{x}$
20	0.95000	0.0475	0.0025	0.9000	0.5129	0.050
21	0.95238	0.0453	0.0023	0.9048	0.5124	0.048
22	0.95454	0.0434	0.0021	0.9091	0.5118	0.045
23	0.95652	0.0416	0.0019	0.9130	0.5112	0.043
24	0.95833	0.0399	0.0017	0.9167	0.5106	0.042
25	0.96000	0.0384	0.0016	0.9200	0.5101	0.040
26	0.96154	0.0370	0.0015	0.9231	0.5099	0.038
27	0.96296	0.0357	0.0014	0.9259	0.5093	0.037
28	0.96429	0.0344	0.0013	0.9286	0.5091	0.036
29	0.96552	0.0333	0.0012	0.9310	0.5088	0.034
30	0.96667	0.0322	0.0011	0.9333	0.5084	0.033
40	0.97500	0.0244	0.0006	0.9500	0.5063	0.025
50	0.98000	0.0196	0.0004	0.9600	0.5051	0.020
60	0.98333	0.0164	0.0003	0.9667	0.5042	0.017
70	0.98571	0.0141	0.0002	0.9714	0.5035	0.014
80	0.98750	0.0123	0.0002	0.9750	0.5033	0.012
90	0.98889	0 0110	0.0001	0.9778	0.5027	0.011
100	0.99000	0.0099	0.0001	0.9800	0.5024	0.010

Tübingen, Physikalisches Institut. 24. Febr. 1911.

Meteorologische Beobachtungen in der Südsee, gesammelt vom Samoa-Observatorium.

Von

G. Angenheister und **C. Rohloff.**

Vorgelegt von E. Wiechert in der Sitzung vom 25. Februar 1911.

Seit einigen Jahren bemüht sich das Samoa-Observatorium auch von anderen Plätzen der Südsee meteorologische Daten zu erhalten. Dr. F. Linke hat in der meteorologischen Zeitschrift Juni 1910 einen genauen Bericht hierüber veröffentlicht. Dem Bericht ist auch eine Karte beigegeben, aus der die Lage der Stationen zu ersehen ist.

In derselben Zeitschrift Dezember 1909 hat Dr. K. Wegener die Bedeutung eines solchen Netzes erörtert.

Im folgenden soll nun das, was von dem bis Ende 1908 gesammelten Material brauchbar erschien, veröffentlicht werden.

Hoffentlich tragen diese Daten mit dazu bei, die Lücken unserer Kenntnis von den meteorologischen Verhältnissen der Südsee auszufüllen.

Fanning-Insel 3°51′23″ N.Br. 159°21′50″ W.L.

Von dem mittleren inselarmen Teil des aequatorialen Gebietes des stillen Ozeans liegen fast gar keine Beobachtungen vor.

Von den Fanning-Inseln, die zu den niedrigsten Inseln dieses Gebietes gehören, sind, soviel uns bekannt, bisher noch keine Beobachtungen veröffentlicht worden. Die Beobachtungen wurden ausgeführt von den Beamten der englischen Kabelstation.

Die Luftdruckbeobachtungen von Fanning erstrecken sich bisher leider nur auf 2 Jahre. Sie zeigen einen Gang der sehr überrascht und sich vielleicht aus der aequatornahen Lage

der kleinen Insel erklären läßt. Es weisen nämlich die Monatsmittel im Lauf des Jahres zwei Maxima und zwei Minima auf, wie Figur 1 zeigt. Der Ort hat nämlich zwei Sommer, wenn die

Jahreszeitlicher Gang des Luftdrucks auf den Fanning-Inseln.

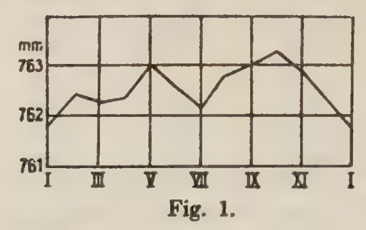


Fig. 1.

Sonne im Zenit steht, und zwei Winter, wenn sie auf den Wendekreisen steht. Die Schwankungen sind recht gering, jedoch gut ausgeprägt. Im einzelnen ist der Verlauf vielleicht folgendermaßen zu erklären.

Im Mai steht die Insel im Bereich des nordpazifischen Barometermaximums. Dieses verlagert sich im nördlichen Sommer nordwärts, was auf Fanning eine Abnahme des Druckes zur Folge hat. Gleichzeitig aber dringt das südostpazifische Maximum weiter nordwärts vor, und veranlaßt schon im August von neuem den Anstieg des Druckes. Das Maximum wird im Oktober erreicht, und nun beginnt das südostpazifische Maximum wieder südwärts zu wandern; eine Abnahme des Luftdruckes in Fanning ist die Folge, die noch durch das westwärts Dringen des australischen Minimums um diese Zeit unterstützt wird; der niedrigste Barometerstand wird im Januar erreicht. Inzwischen kommt wieder das nordpazifische Maximum näher, was wieder einen Anstieg bis zum Mai veranlaßt.

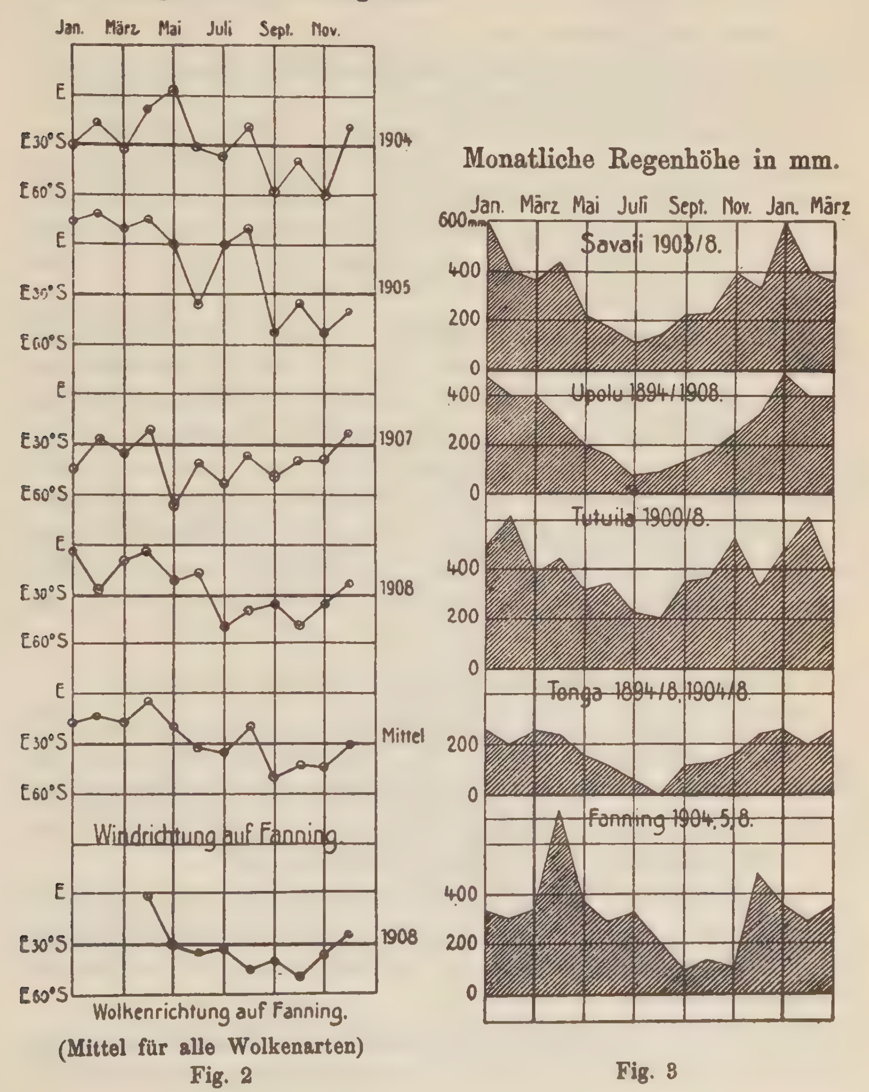
Die Windbeobachtungen von Fanning zeigen, daß die Insel fast das ganze Jahr hindurch im Gebiete der S.E.-Passatwinde liegt. Die fast 4° nördlicher Breite gelegene Insel gehört also meteorologisch noch zur südlichen Halbkugel. Der S.E.-Passat greift dort über den Aequator hinaus, der meteorologische Aequator verläuft nördlich von Fanning.

Figur 2 zeigt die jahreszeitliche Drehung des Windes, die recht gering ist und nur selten nördliche Komponenten aufweist. Die mittlere Windrichtung im Lauf der 4 Jahre ist fast genau ESE.

Nach den Schätzungen der Windstärke in den letzten 9 Monaten von 1908 ändert sich das Monatsmittel wenig mit der Jahrezeit und beträgt etwa 4.3 der zehnteiligen Skala.

Die Temperaturverhältnisse sind so, wie sie bei einer so kleinen Insel in Aequatornähe erwartet werden können. Die mittlere tägliche Amplitude im Mittel zweier Jahre beträgt nur 3°. Die für die aequatoriale Lage bekannte Tendenz Maxima zu den Aequinoxien zu zeigen, ist wohl wegen der geringen Zahl der Jahre noch unscharf ausgeprägt.

Jahreszeitliche Verteilung der Regenmenge auf d. Fanning-Inseln.



(Mittel für alle Wolkenarten)
Fig. 2

Fig. 3

Die Regenmenge ist beträgtlich, ihre Summe beträgt etwa im Mittel der vorliegenden Beobachtungsjahre 3700 mm. Fanning unterscheidet sich hier erheblich von der 4° S., 155° W. gelegenen regenarmen Nachbarinsel Malden.

Figur 3 zeigt die jahreszeitliche Verteilung der Regenmengen, eine doppelte Regenzeit ist angedeutet.

Seit April 1907 wurden auf Veranlassung des Samoa-Observatoriums auf den Fanning-Inseln auch Wolkenbeobachtungen angestellt, um dadurch vor allem etwas über die Winddrehung mit der Höhe zu ermitteln.

Gerade für Fanning ist die Drehung des Windes mit der Höhe von besonderem Interesse. Bidlingmaier hat am Aequator im Atlantik Ci. aus ENE beobachtet.

Die Beobachtung auf Fanning ergibt nun für die verschiedenen Wolkentypen eine mittlere Richtung, die fast genau mit der Windrichtung für dieselbe Zeit übereinstimmt, wie Figur 2 zeigt. Hierbei ist allerdings möglich, daß die verhältnismäßig recht oft verzeichneten Cirren, falsche Cirren gewesen sind, die in erheblich niedrigeren Höhen fliegen.

Die Richtung der Wolkenbewegung ist gegen die untere Windrichtung nur sehr wenig gedreht. Im April und Juli scheint eine kleine nördliche Drehung mit der Höhe hervorzutreten. Offenbar liegt die Insel sehr nahe am meteorologischen Aequator, wo das ganze Jahr hindurch die östlichen Winde auch bis in größere Höhen hinaufreichen. Da Wolkenobeobachtungen aus dem mittleren Gebiet des stillen Ozeans (mit Ausnahme der Beobachtungen am Samoa-Observatorium) noch nicht veröffentlicht wurden, sollen diese Beobachtungen hier ausführlich mitgeteilt werden. (cf. S. 10).

Gilbert- und Ellis-Inseln. (Gilbert 174° E 1° S).

Hiervon liegen nur die Beobachtungen von Januar—Mai 1907 vor. Die Insel hat zu dieser Zeit ENEWinde und trotz des südlichen Sommers äußerst wenig Regen. Die Temperatur um 9ª ist im Mittel dieser Monate 29°.4, was ein sehr hohes Tagesmittel der Temperatur von etwa 28° vermuten läßt.

Von den übrigen Inselgruppen von denen hier meteorologische Beobachtungen mitgeteilt werden, liegen schon Veröffentlichungen vor, die sich aber zum Teil auf andere Jahre und auf andere Stationen beziehen.

Von Suva, Fiji 178° 26′ E, 18° 8′ S, an der Küste gelegen, liegt ein Jahr 1908 vor; von Rarotonga Avarua 159.°5 W

21° S 20 Monate; von Nukualofa auf Tongatabu 175° W 21°.5 S 16 Monate; leider hat hier die Beobachtungszeit gewechselt; von der Insel Vauvau (Tonga-Inseln) 174° W 19° S liegen Regenbeobachtungen von 4 Stationen vor, und zwar Neafu (10 Jahre), Vaimalo 4 Jahre, Haalaufuli (2 Jahre), Leimatua (1 Jahr).

Sodann liegen noch einige Orkanbeobachtungen vor. Besonders interessant ist die Beobachtung des Orkans vom 2. April 1900 auf Tonga durch den Leiter der dortigen Handelsstationen der deutschen Handels- und Plantagengesellschaft der Südsee, Herrn Schultz in Neafu, Vauvau. Siehe Fig. 4.

Luftdruck- und Windänderung während des Orkans am 2. IV. 1900 zu Tonga.

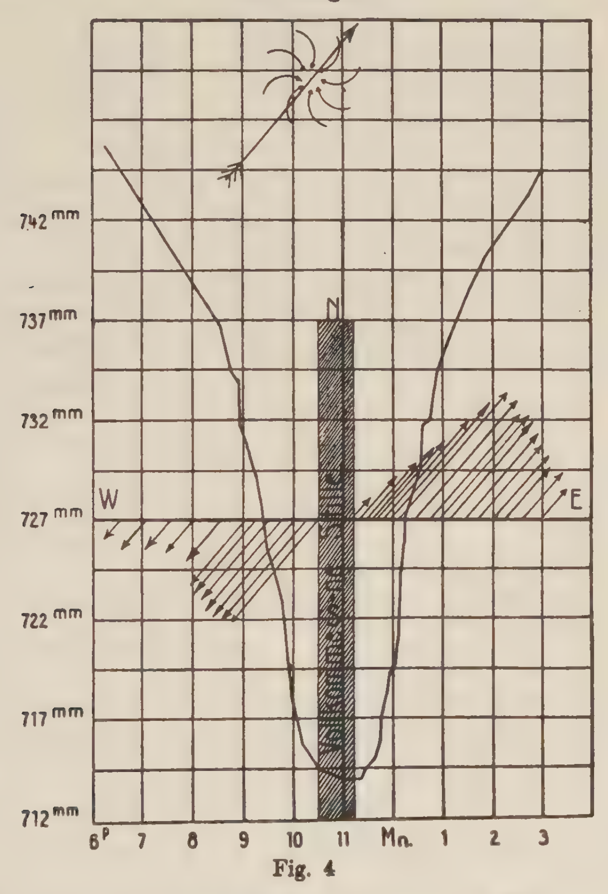
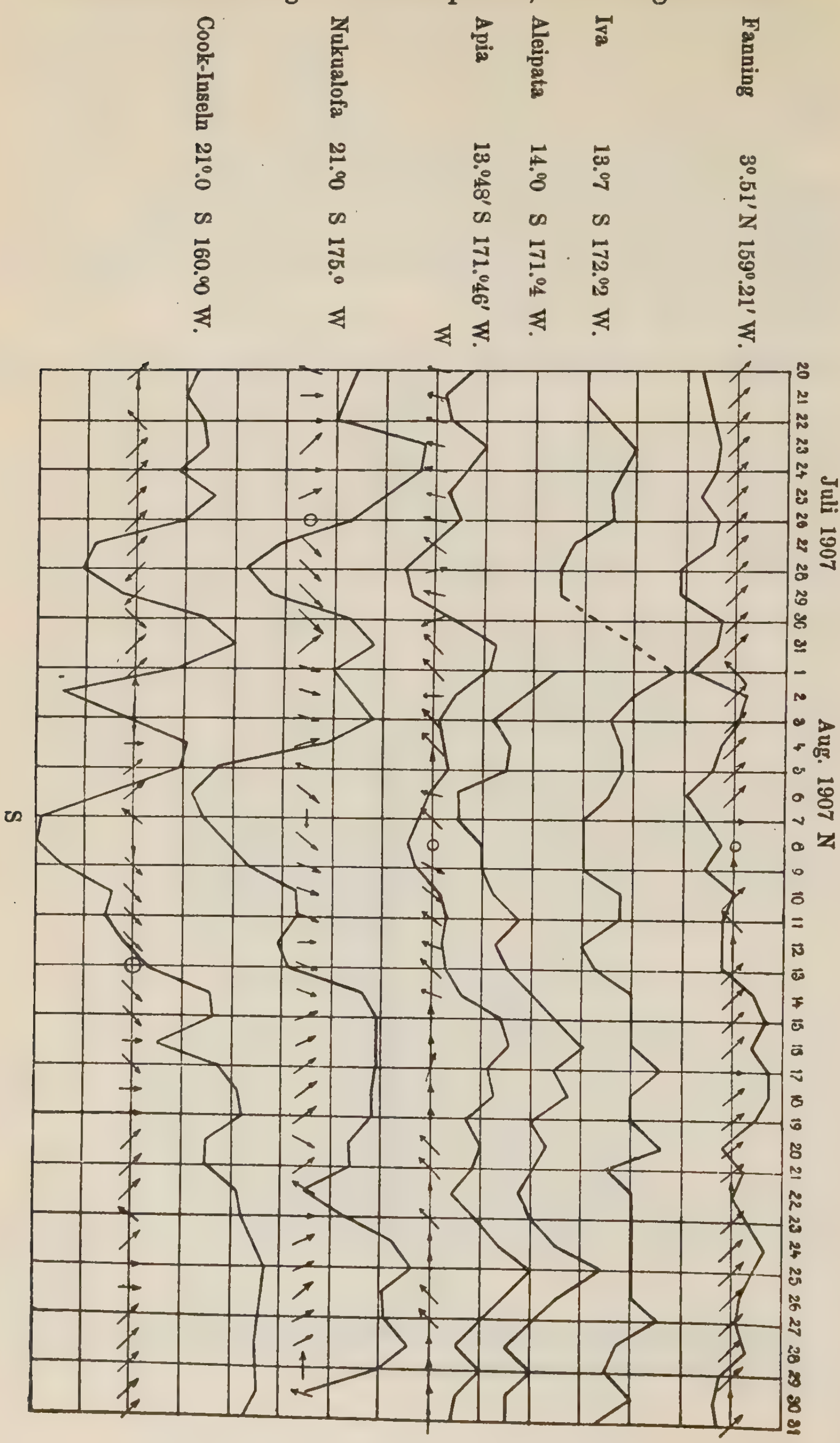


Fig. 4

Ferner die Beschreibung eines Orkans in Fiji vom 13. III. 1901, die im Original beigefügt wird.

Luftdruckänderung im Centralpazific, Juli-August 1907.



In Fig. 5 ist der Verlauf einer großen Luftdruckstörung des Centralpacific dargestellt. Die Stationen sind ihrer Breite entsprechend geordnet, Fanning-Island, Iva (E. Savaii), Alcipata (E. Upoln), Apia, Nukualofu (Tongatabu) und Cook-Island.

1901: March 13th & 14th.

Levuka. 16. 52 S: 177. 25 E Yasawa: N. W. by W. 3/4 West; distance 100 miles from Levuka.

At 4 p.m. on the 13th at Yasawa ira. Houses were blown down and cocoanut trees destroyed but in what direction the wind was I do not know.

In Levuka at 4 p.m. on the 13th, the wind was N.E. thick and rainy and heavy squalls. Bar. 29.85 (Fahrenheit) no fall of the bar occurred below 29.85 till after 10 p.m. At 11 p.m. the wind was S.E. and the bar 29.60, the bar then fell rapidly and at 1.30 a.m. the 14th was 28.40, the wind was S.W. an it was calm at 2.30 a.m. The peculiarity of this hurricane was that there was continual lightning from midnight till 2. a.m. and that when the bar reached 28,40 it jumped from 28.40 to 29.20; that is 8/10 of an inch rising and falling from 28.40 to 29.20 in about 3 or 4 seconds, but each time rising a little till it stood at 29.20 and gradually rose to about 29.90.

This Cyclone travelled S. E. by E 3/4 E. at the rate of about 11 miles (sea) per hour.

Fanning Island. 1904—1908. (3°51′23″ N.Br. 159°21′50″ W.L.).

Monat	1904 (Mittelwerte) Temperatur Tagesmittel	1904 Temperatur Mittlere tägl. Amplitude	1904 Temperatur Max.	1904 Temperatur Min.	1904 Regen Regensumme m/m	1904 Regen Zahl der Regentage	1904 Wind Mittlere Richtung	1905 (Mittelwerte) Temperatur Tagesmittel	1905 Temperatur Mittlere tägl. Amplitude	1905 Temperatur Max.	1905 Temperatur Min.	1905 Regen Regensumme m/m	1905 Regen Zahl der Regentage	1905 Wind Mittlere Richtung
Januar	26.6°	2.2°	29.0°	23.8°	216.0	12	E 32° S	28.3	2.7°	29.6°	26.8°	482.5	14	N 76° E
Februar	27.0	2.1	28.7	24.8	19.1	8	E 18 S	28.4	2.7	29.8	27.1	558.5	14	N 72 E
März	27.4	2.4	30.1	24.8	120.6	10	E 32 S	28.6	2.7	30.0	27.2	577.5	13	N 81 E
April	27.3	2.5	30.3	24.8	708.7	19	E 9 S	27.8	2.5	29.2	26.8	1346.2	23	N 76 E
Mai	28.0	2.5	31.4	25.7	279.1	8	N 76 E	27.6	1.8	28.5	26.7	736.6	16	E
Juni	28.2	2.4	31.1	25.7	323.5	13	E 32 S	27.3	3.3	29.0	25.8	393.8	15	E 36 S
Juli	27.8	2.8	30.9	25.1	609.6	16	E 36 S	27.5	3.3	29.2	25.7	330.0	13	E
August	28 3	2.5	31.1	25.7	241.3	10	E 27 S	27.6	3.8	29.6	25.6	152.4	6	N 81 E
September	28.5	2.8	31.1	24.8	101.6	5	E 58 S	27.4	4.5	29.6	24.8	120.7	5	E 54 S
Oktober	28.8	2.7	31.9	25.9	209.7	11	E 40 S	27.3	4.3	29.5	25.1	216.0	5	E 36 S
November	29 1	2.9	33.0	26.2	171.4	7	E 58 S	27.7	4.7	30.1	25.2	108.0	4	E 54 S
Dezember	28.5	3.0	31.9	25.4	914.4	17	E 22 S	26.9	4.4	29.2	24.8	255.0	8	E 40 S
	Mittel				Summe		Mittel	Mittel				Summe		Mittel
Jahr	27.9°	2.6°	30 9°	25.2°	3915.1	136	E 29° S	27.7°	3.4°	29.5°	26.0°	5257.2	186	E 14° S
südl. Sommer	27.6	2.6	30.5	25.0	2150.2	73	E 28 S	27.9	3.3	29.8	26.3	3307.7	76	E 7 S
„ Winter	28.3	2.6	31.2	25.5	1764.8	63	E 29 S	27.5	3.5	29.2	25.6	1949.5	60	E 20 S

Fanning Island. 1906—1908.

Monat	Zeit 8. a. m. 1906		Zeit 9. a. m. 1907		Zeit 9. a. m. 1908					Temperatur im Mittel d. Jahre 1904, 5, 8	
	Luftdruck	Mittlere Windrichtg	Luftdruck	Mittlere Windrichtg	Luftdruck	Mittlere Windrichtg	Temperatur Max.	Temperatur Min.	Tages-Mittel	Tages-Mittel	Differenz zwischen Max. u. Min.
Januar			761.8	E 45° S	761.7	E 4° S				27.4	4.0
Februar			762.6	E 27 S	762.1	E 27 S				27.7	3.3
März			762.2	E 36 S	762.4	E 9 S				28.0	4.0
April			762.8	E 22 S	761.9	E 4 S				27.6	4.0
Mai			763.0	E 68 S	763.1	E 22 S				27.8	3.8
Juni			762.3	E 40 S	762.8	E 18 S				27.8	4.3
Juli			762.0	E 54 S	762.5	E 50 S	29.7	24.6	27.2	27.6	4.8
August			762.7	E 36 S	762.8	E 40 S	29.8	25.0	27.4	27.8	4.7
September			762.7	E 50 S	763.2	E 36 S	29.8	24.7	27.2	27.7	5.4
Oktober	765.3	E 50° S	763.2	E 40 S	763.4	E 50 S	29.7	24.7	27.2	27.8	5.1
November	763.5	E 36 S	762.4	E 40 S	762.7	E 36 S	30.0	24.3	27.2	28.0	5.8
Dezember	763.0	E 36 S	761.3	E 22 S	762.7	E 27 S	29 8	24.1	27.0	27.5	5,5
			Mittel	Mittel							
Jahr			762.4	E 40 S	763.6	E 18 S				27.8	4.6
südl. Sommer			762.2	E 33 S	762.2	E 36 S				27.7	4.5
südl. Winter			762.6	E 48 S	763.0	E 27 S				27.9	4.7

Wolkenbeobachtungen in Fanning-Island 1908.

Monat	Zeit	Windrichtung	Cumul.-Strat.	Cumulus	Cirro-Strat.	Cirrus	Mittel	Bewölkungsgrad
April	9a	E 4° S	E 14° S	N 72° E	E	E 4° S	E	5.1
	5p		„ 9 „	E 4 S	N 86° E	N 81 E	E 4° S	6.4
	Mitt.		„ 14 „	N 81 E	N 86 E	E	„ 2 „	
Mai	9a	„ 22 „	„ 22 „	E 36 S	E 32 S	E 32 S	„ 32 „	5.5
	5p		„ 36 „	„ 18 „	„ 22 „	„ 45 „	„ 27 „	6.5
	Mitt.		„ 27 „	„ 27 „	„ 27 „	„ 36 „	„ 30 „	
Juni	9a	„ 18 „	„ 36 „	„ 45 „	„ 32 „	„ 45 „	„ 40 „	5.1
	5p		„ 27 „	„ 36 „	„ 45 „	0	„ 32 „	7.0
	Mitt.		„ 27 „	„ 40 „	„ 32 „	„ 45 „	„ 36 „	
Juli	9a	„ 50 „	„ 18 „	„ 27 „	„ 58 „	„ 36 „	„ 36 „	4.4
	5p		„ 27 „	„ 27 „	„ 54 „	0	„ 32 „	6.3
	Mitt.		„ 22 „	„ 27 „	„ 54 „	„ 36 „	„ 34 „	
August	9a	„ 40 „	„ 45 „	„ 40 „	„ 45 „	„ 45 „	„ 45 „	5.2
	5p		„ 45 „	„ 45 „	„ 45 „	„ 45 „	„ 45 „	6.3
	Mitt.		„ 45 „	„ 45 „	„ 45 „	„ 45 „	„ 45 „	
September	9a	„ 36 „	„ 36 „	„ 45 „	„ 32 „	„ 32 „	„ 36 „	4.8
	5p		„ 40 „	„ 36 „	„ 22 „	„ 45 „	„ 40 „	5.8
	Mitt.		„ 36 „	„ 45 „	„ 27 „	„ 36 „	„ 39 „	
Oktober	9a	„ 50 „	„ 45 „	„ 54 „	„ 36 „	„ 40 „	„ 45 „	4 5
	5p		„ 45 „	„ 54 „	„ 68 „	„ 63 „	„ 54 „	5.5
	Mitt.		„ 45 „	„ 54 „	„ 50 „	„ 50 „	„ 50 „	
November	9p	„ 36 „	„ 36 „	„ 40 „	„ 36 „	„ 36 „	„ 36 „	4.7
	5a		„ 36 „	„ 36 „	„ 40 „	„ 36 „	„ 36 „	5.3
	Mitt.		„ 36 „	„ 36 „	„ 36 „	„ 36 „	„ 36 „	
Dezember	9a	„ 27 „	„ 32 „	„ 22 „	„ 9 „	„ 40 „	„ 27 „	5.1
	5p		„ 45 „	„ 18 „	„ 18 „	„ 14 „	„ 22 „	5.2
	Mitt.		„ 36 „	„ 18 „	„ 14 „	„ 36 „	„ 25 „	

Gilbert- und Ellis-Island 1907 (Gilbert 174° E 1° S)
Beobachtungszeit 9 a. m.

	Temperatur	Luftdruck	Regen		Mittl. Windrichtung
			Menge	Zahl der Tage	
Januar	29.°8	761.9	—	—	N 68° E
Februar	28. 7	761.9	—	—	N 81 E
März	29. 2	761.3	—	—	N 68 E
April	30. 3		29	1	E 9 S
Mai	29. 2	762.0	34	2	N 72 E

Station Suva 1908. 178° 26′ E 18° 8′ S.
Zeit der Beobachtung 9 a. m.

	Barometer	Temperatur			Feuchtigk.		Windstärke	Bewölkungsgrad	Summe des Reg. in mm	Zahl der Regentage
		9a	Max.	Min.	Dampfspann. 9a	in % 9a				
Januar	756.3	27.°0	29.2	23.1	20.9	78	7.95	7.0	127.8	20
Februar	58.1	28. 1	29.8	23.1	23.7	78	4.20	5.7	317.1	23
März	58.4	27. 8	29.8	22 9	23.5	79	4.60	6.6	304.8	22
April	61.0	26. 5	28.4	22.8	20.3	78	6.45	7.0	349.7	22
Mai	62.6	25. 4	27.4	21.8	20.7	82	7.35	6.0	516.6	22
Juni	63.4	23. 6	25.9	20.4	16.2	75	4.95	7.0	84.3	15
Juli	64.1	22. 7	25.6	19.3	16.4	80	2.02	7.5	170.4	14
August	63.4	23. 6	25.6	20.2	17.6	80				
September	64.5	24. 3	25.9	17.9	16.4	72				
Oktober	63.4	24. 7	26.2	19.4	17.0	72	2.25	7.3	125.0	13
November	61.7	26. 1	27.6	22.0	19.2	75	5.25	8.1	133.0	20
Dezember	58.7	28. 4	30.2	22.1	20.5	71	9.90	6.6	218.9	15
Jahr.-Mittel	761.4	25. 7	27.7	21.2	19.4	77				
südl. Sommer	59.1	27. 3	29.2	22.3	21.4	76				
südl. Winter	63.6	24. 2	26.1	20.0	17.4	77				

Avarua, Rarotonga (Cook Island). 159°.5 W 21° S.

	1907 Zeit 9 a. m.						
	Regen		Temperatur		Luftdruck	Feuchtigkeit	Mittlere Windricht.
	Menge	Zahl d. Tage	Max.	Min.			
Januar							
Februar							
März							
April							
Mai	276.9	18	26.0	20.1	763.3	74 %	E 32° S
Juni	92.4	15	23.4	20.1	764.2	72 „	E 50 S
Juli	83.1	11	24.5	18.2	764.5	71 „	E 54 S
August	88.4	18	23.9	17.5	763.5	70 „	E 76 S
September	98.7	11	24.8	18.9	764.4	72 „	E 36 S
Oktober	23.9	10	25.9	20.1	765.3	74 „	E 45 S
November	114.0	13	25.0	20.2	763.7	74 „	E 54 S
Dezember	253.2	19	25.4	21.3	762.9	75 „	E 40 S
Jahr							
südl. Sommer							
„ Winter	658.4	83	24.8	19.6	764.4	72 „	E 50 S

	1908 Zeit 9 a. m.						
	Regen		Temperatur		Luftdruck	Feuchtigkeit	Mittlere Windricht.
	Menge	Zahl d. Tage	Max.	Min.			
Januar	122.4	20	27.9	22.6	761.4	79 %	E 9 S
Februar	391.3	25	28.2	22.7	762.6	80 „	E 32 S
März	820.0	18	27.6	22.9	761.7	79 „	E 14 S
April	144.8	15	27.6	22.9	761.4	79 „	E 14 S
Mai	231.1	21	25.5	20.1	765.3	75 „	E 32 S
Juni	172.5	16	24.8	18.7	764.1	73 „	E 54 S
Juli	119.6	19	24.9	18.2	765.4	73 „	E 50 S
August	174.2	18	25.6	21.1	766.9	75 „	E
September	163.8	18	25.1	19.6	765.9	78 „	E 32 S
Oktober	184.9	17	26.0	21.5	764.7	77 „	E 9 S
November	293.8	19	25.5	20.7	763.6	76 „	E 45 S
Dezember	299.0	18	27.6	22.3	761.6	79 „	E 18 S
Jahr	3217.4	224	26.4	21.1	763.7	76 „	E 26 S
südl. Sommer	2071.3	115	27.4	22.4	762.0	79 „	E 22 S
„ Winter	1046.1	109	25.3	19.9	765.4	74 „	E 29 S

Nukualofa, Tonga. 175° W 21.5 S.

1907	Temperatur				Relative		Regen			Luftdruck		Wind			
	Max.	Min.	Wirkl. Temp.		Feuchtigkeit		Menge		Zahl d. Fälle			Mittlere Richtung		Mittl. Stärke	
	6p	6p	6a	6p	6a	6p	6a	6p	6a	6a	6p	6a	6p	6a	6p
Januar					86 %			246.1	10	758.9		N 58° E		2.5	
Februar					78			448.8	15	759.4		E 22 S		3.5	
März															
April															
Mai	23.°2				78 „			217.9	11	765.3		E 45 S		1.3	
Juni	22. 6				77 „			212.7	9	766.6		E 63 S		2.8	
Juli	22. 1				67 „			95.7	6	765.6		E 58 S		2.5	
August	22. 1			22.°9				78.2	9		764.7		E 63° S		2.0
September	24. 8	17.°0		22. 8				65.1	14		764.5		E 27 S		1.8
Oktober	28. 1	18. 7		25. 2				25.9	3		765.7		E 32 S		2.7
November	27	20	21.°8	24. 1				86.7	10	765.2	765.1	E 45 S	E 40 S	2.1	2.5
Dezember	31	23	24. 0	25. 7			48.3	91.5	11	763.8	763.4	E	E 9 S	2.0	2.5
1908															
Januar	35	22	23. 7	28. 5				462.9	9	762.9	762.9	*E 54 S*[1])	E 58 S	0.0	2.0
Februar	31	22	24. 7	26. 9				909.3	19	745.5	745.1	*N 76 E*[1])	E 14 S	0.8	2.2
März	30	21	23. 1	26. 4				613.3	14	745.4	745 0	*E 22 S*[1])	E 81 S	1.0	2.1
April	30	22	23. 1	25. 3	90 „	87 %		259.3	13	747.9	747.8	E 18 S	E 58 S	1.3	2.4

1) Diese Werte sind aus sehr wenigen Beobachtungen gewonnen, da fast täglich Windstille war.

Tutuila (Samoa-Inseln).
Monatl. Regenmengen in mm 1900/1908.

	Tutuila Pago Pago										Tutuila Leone			
	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	Mittel	1906	1907	1908	Mittel
Januar	416.6	546.0	327.7	538.4	538.4	553.7	134.6	487.7	828.0	485.7	224.0	351.8	776.0	450.6
Februar	464.8	736.6	939.8	632.5	436.9	307.3	252.7	538.5	1226.8	615.1	198.8	478.8	770.9	449.5
März	1048.9	434.3	132.0	322.6	266.7	393.7	457.0	287.0	100.3	381.9	299.8	632.5	815.3	582.5
April	332.4	239.3	411.5	660.4	541.0	406.4	358.1	662.9	348.0	440.0	364.0	496.6	303.5	388.0
Mai	287.0	383.5	160.0	307.3	210.8	87.6	472.4	287.0	604.5	311.1	591.8	666.8	535.9	598.2
Juni	3.0	88.6	640.0	317.5	279.4	264.2	373.4	812.8	236.2	335.0	337.8	754.4	282.2	458.1
Juli	118.5	264.2	76.2	421.6	266.7	190.5	154.9	317.5	208.3	223.7	154.9	222.2	157.5	178.2
August	76.7	156.7	111.8	284.4	332.7	269.2	188.0	127.0	264.2	201.2	231.1	36.8	174.0	147.3
September	150.6	546.1	127.0	261.6	276.9	431.8	322.6	181.9	863.6	351.4	294.6	261.9	670.6	409.0
Oktober	248.4	538.5	219.7	505.5	236.2	221.0	335.3	602.0	401.3	367.5	232.4	571.5	391.2	398.4
November	497.8	467.4	279.4	518.2	556.3	312.4	360.7	736.6	1059.2	532.0	360.7	1036.3	903.0	766.6
Dezember	612.1	98.0	365.8	274.3	276.9	256.5	330.2	454.7	312.4	331.2	289.6	354.3	288.3	310.7
Jährl. Menge	4246.8	4499.2	3790.9	5044.3	4218.9	3694.3	3739.9	5495.0	6452.4		3579.5	5864.4	6069.6	

Tonga-Inseln.

Monatl. Regenmengen in mm 1894/1898, 1904/1908.

	Neafu (Vavau)										
	1894	1895	1896	1897	1898	1904	1905	1906	1907	1908	Mittel
Januar	309.9	292.1	229.1	28.9	341.6	234.1	337.8	210.3	307.8	437.2	272.9
Februar	233.4	307.3	204.2	45.2	241.0	345.4	350.6	16.0	150.5	229.6	212.3
März	150.8	337.8	244.6	88.4	419.1	158.0	150.6	214.4	359.9	431.4	255.5
April	513.1	247.9	159.8	192.0	208.5	337.8	145.5	190.8	172.8	109.3	227.8
Mai	169.9	281.8	65.0	46.2	105.9	426.7	126.7	210.3	103.6	73.2	160.9
Juni	13.7	127.5	29.7	38.6	446.5	119.1	79.5	87.4	147.7	103.3	119.3
Juli	249.4	46.0	34.0	63.2	101.1	21.6	91.7	86.1	42.9	31.2	76.7
August	70.8	24.4	21.1	46.2	79.5	50.3	127.5	125.0	28.6	137.8	71.1
September	?	135.3	35.3	61.0	37.8	222.5	74.7	210.8	226.8	105.4	123.3
Oktober	167.1	236.7	80.8	174.7	180.0	66.8	96.5	149.4	102.3	48.5	130.3
November	355.6	131.6	24.4	161.0	122.7	17.2	79.8	373.4	107.1	361.7	173.4
Dezember	153.4	264.2	80.0	327.7	161.5	304.8	222.5	561.3	176.7	147.9	240.0
Jahresmenge		2612.6	1208.0	1273.1	2445.2	2304.3	1883.4	243.5,2	1927.2	2216.5	

Zahl der Regentage

	1894	1895	1896	1897	1898	1904	1905	1906	1907	1908	Mittel
Januar	27	21	12	11	20				10	12	
Februar	21	24	16	9	17				11	19	
März	18	20	17	14	15				15	18	
April	23	18	14	20	19				13	8	
Mai	18	19	18	11	13				6	9	
Juni	6	14	15	10	24				7	4	
Juli	13	7	8	8	17				6	4	
August	11	9	8	6	8				6	10	
September	?	13	8	8	12				12	6	
Oktober	18	15	6	9	10				5	5	
November	18	9	13	8	16				8	8	
Dezember	14	19	7	22	18				12	13	

Tonga-Inseln.

Monatl. Regenmengen in mm 1905/1908.

	Vaimalo (Vauvau)					Leimatua Vauvau 85 m. h.		Haalaufuli Vauvau		Nukualofa Tongatuba	
	1905	1906	1907	1908	Mittel	1907	1908	1907	1908	1907	1908
Januar	337.8	195.1	345.7	414.5	323.3		449.0	387.6	441.0	246.1	462.9
Februar	350.5	27.9	124.2	318.5	205.3		250.4	174.2	196.3	448.8	909.3
März	150.6	214.6	229.6	311.2	226.5		367.5	211.5	215.0		613.3
April	145.5	210.3	166.9		174.2		156.3	161.4	89.9		259.3
Mai	101.3	205.7	138.7		148.6		107.1	85.7	147.0	217.9	
Juni	79.5	68.8	145.0		97.8		59.2	187.5	53.0	212.7	
Juli	91.7	82.0	54.7	55,7	71.0		84.1	54.1	69.9	95.7	
August	132.1	91.4	26.9	149.2	99.9		193.0	21.0	99.2	78.2	
September	74.7	210.3	198.6	100.2	145.9		142.0	165.3	137.8	65.1	
Oktober	101.1	191.3	130.8	54.0	119.3		41.2	41.7	42.2	25.9	
November	70.1	406.4	80.8	359.9	229.3		389.9	105.8	368.5	86.7	
Dezember	188.2	57.6	145.0	175.2	141.5		138.9	172.4	168.0	91.5	
Jahresmenge	1823.1	1961.4	1886.4				2390.4	1768.8	2028.0		
Zahl der Regentage											
Januar	6	16	13					11			9
Februar	10	12	17					13			19
März	11	17	20					17			14
April	11	16	17					15			13
Mai	12	13	9					9		11	
Juni	9	14								9	
Juli	12	10								6	
August	7	8								9	
September	3	8								14	
Oktober	4	14							8	3	
November	5	17					9		10	10	
Dezember	18	22					11		13	11	

Über die Änderung der Eigenschaften der Metalle durch ihre Bearbeitung.

Von

G. Tammann.

Mit 2 Figuren im Text.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. März 1911.

Seit langer Zeit ist bekannt, daß manche Metalle durch ihre Bearbeitung in auffallender Weise fester werden, und daß beim Ausglühen die durch Bearbeitung erzielte Verfestigung wieder verschwindet. Man braucht nur einen Kupferdraht an einer Stelle auszuglühen, um sich sofort von dem enormen Unterschiede in der Biegungsfestigkeit der geglühten und der ungeglühten Teile beim Biegen mit freier Hand überzeugen zu können. Führt man diesen Versuch aus, so kann man sich leicht davon überzeugen, daß die Stelle, an welcher der Draht mehrmals hin und her gebogen wird, fester wird, daß die Kraft, welche zur Biegung erforderlich ist, mit jeder neuen Biegung zunimmt.

Man sagt, das Kupfer wird durch die Bearbeitung „hart", im Verein mit Dr. O. Faust[1]) konnte aber gezeigt werden, daß die mit dem Sklerometer gemessene Härte des Kupfers bei seiner Bearbeitung nicht zunimmt.

Ähnlich wie das Kupfer verhalten sich viele Metalle: Eisen, Nickel, Silber und Gold und auch eine Reihe von Legierungen werden bei der Bearbeitung stark verfestigt. Ja man darf behaupten, daß diese Erscheinung allen Metallen eigentümlich

1) Zeitschr. f. phys. Chemie 75, S. 108, 1910.

ist, daß sie aber bei verschiedenen Metallen in verschiedenem Maße auftritt.

Über die Ursache der Verfestigung sind zwei etwas verschiedene Hypothesen geäußert worden. Man hat angenommen, daß es sich bei der Verfestigung um eine Umwandlung in eine andere Krystallform, welche thermisch von der ursprünglichen etwas verschieden ist, oder sogar um die Überführung des Metalles in den amorphen Zustand handelt. Nun lehrt die mikroskopische Beobachtung einer an der zu beanspruchenden Stelle angeschliffenen und polierten Ebene, daß sich die Krystallite des Materials gegen einander verschieben, und daß hierbei in den Krystalliten Gleitflächen auftreten. Durch die Gleitflächen werden die einzelnen Krystallite in sehr viel kleinere Elementar-Krystalle zerteilt, da die Gleitebenen als Scharen von in verschiedenen Richtungen orientierten Ebenen auftreten.

Die Ansicht, daß das Metall bei der Überanspruchung in den amorphen Zustand übergeführt wird, kann also gegenüber dieser Tatsache nicht verteidigt werden, und die Ansicht, daß eine neue thermisch differente Krystallform gebildet wird, ist ebenfalls durch jene Beobachtung als widerlegt zu betrachten, denn eine neue Form tritt immer in einzelnen Punkten auf, von denen aus sie dann wächst. Davon ist aber bei der Verfestigung nichts zu beobachten.

Die Änderung der Eigenschaften der Metalle bei der Verfestigung ist eine ganz eigentümliche. Während sich die elastischen Eigenschaften des Materials nicht selten ganz außerordentlich ändern, nimmt der elektrische Widerstand fast immer zu und zwar von 2—27 % bei 0 ° [1]), dagegen ändert sich die Dichte nicht merklich, und auch betreffs der elektromotorischen Kraft von verfestigtem und ausgeglühtem Material scheint ein Unterschied nicht zu existieren. Wir stehen also der merkwürdigen Tatsache gegenüber, daß sich bei der mechanischen Bearbeitung der Metalle ein Teil der Eigenschaften des Metalles sehr stark, ein anderer Teil wenig

---

1) In den Tabellen von Landolt-Börnstein findet man die Leitfähigkeit für Drähte hart und weich. Berechnet man aus diesen Angaben den Quotienten Leitfähigkeit des weichen Drahts minus der Leitfähigkeit des harten Drahts dividiert durch die Leitfähigheit des weichen Drahtes und multipliziert diesen Quotienten mit 100, so erhält man die prozentische Erhöhung der Leitfähigkeit beim Weichwerden des Drahtes, dieselbe beträgt beim Kupfer je nach dem Ausgangsmaterial 2.5, 3.2 und 5.76 %, beim Ag 6.2 und 10.4 %, beim Au 1.7 %; beim Messing mit 29.8 % Zn 15.3 %, bei der Aluminiumbronze mit 90 % Cu 7.6 % und beim Aluminium-Zink mit 65.6 % Al 27 %.

und schließlich ein dritter Teil nicht merklich ändert. Die Lösung dieses Rätsels ist sehr einfach. Das nicht bearbeitete Material und das nach der Bearbeitung ausgeglühte Material haben die kleineren Elastizitätsgrenzen und der gezogene Draht hat ausgeglüht den kleineren elektrischen Widerstand als vor dem Ausglühen. Durch die Bildung der Gleitflächen beim Ziehen des Drahtes werden die Krystallite, aus denen er besteht, in Lamellen zerteilt, die sich parallel der Zugrichtung bei der Streckung allmählich verschieben, und so einen Zylinder, bestehend aus feinen übereinander gelagerten Lamellen, bilden. Die Elastizitätsgrenze für Biegung wird dadurch, daß sich die wirkende Kraft im gezogenen „harten" Draht über eine sehr viel größere Anzahl von einzelnen Elementen verteilt als im ausgeglühten Draht, stark erhöht werden, denn der Widerstand gegen die Kraft, die innere Reibung bei der Verschiebung der Elemente gegeneinander, bleibt konstant. Andererseits sind durch das Ziehen die Krystallite im Draht geordnet worden, und wenn der elektrische Widerstand von der Richtung im Krystall abhängt und zwar in der Weise, daß er in der Richtung parallel der Gleitfläche, auf welcher die Verschiebung die geringste Kraft erfordert, am größten oder doch größer ist als der Mittelwert des elektrischen Widerstandes in einer großen Anzahl verschiedener Richtungen, so muß durch das Ziehen des Metalls sein Widerstand wachsen und nach dem Ausglühen, bei dem sich durch die Rekrystallisation ungeordnete größere Krystallite bilden, wieder abnehmen. Da sich aber der Stoff, aus dem der Draht besteht, sonst nicht ändert, so werden auch alle nicht vektorielle Eigenschaften des Stoffes sich nicht ändern.

Durch das Ziehen zu Draht dürfen sich also nur die vektoriellen Eigenschaften des Drahtes ändern[1]). Für den elektrischen Widerstand ist das nachgewiesen, für das Vermögen Wärme zu leiten scheint dieser Nachweis wie für die optischen Konstanten zu fehlen. Bei den elastischen Eigenschaften ist es aber nicht nur die Umorientierung der Krystallite, welche ihre so sehr in die Augen fallenden Änderungen bedingt, sondern vor allem die Zerteilung des Materials in sehr viel kleinere Elementarkrystalle. An der Zugfestigkeit und der eingehender studierten Druckfestig-

---

1) Die Änderung der vektoriellen Eigenschaften ist aber nur dann zu erwarten, wenn die Verfestigung mit einer Orientierung der Lamellen verbunden ist. Es dürfte sich durch Verfestigung, wobei nur Gleitflächen auftreten, die Krystallite aber nicht umorientiert werden, der elektrische Widerstand nicht ändern. Die Operation des Ziehens ist der Umorientierung der Lamellen viel günstiger, als die des Schmiedens oder Pressens.

keit ist besonders deutlich der Zusammenhang der Anzahl der Gleitflächen und ihrer Systeme mit der Erhöhung der unteren Elastizitätsgrenze bei Beanspruchung auf Druck zu erkennen. Überträgt man die Erfahrung, daß die Reibung zweier fester Körper, die sich in einer Ebene berühren, unabhängig von der Größe der Berührungsebene und proportional der wirkenden Last ist, auf die Reibung an den Gleitflächen, so ist einzusehen, daß das durch Gleitflächen in viele Elementarkrystalle zerteilte Konglomerat druckfester sein wird, als das Konglomerat, in dem diese Zerteilung nicht eingetreten ist, weil bei gleicher Belastung desselben Querschnittes von verfestigtem und nicht verfestigtem Material die Last auf jeden Elementarkrystall des verfestigten Materials sehr viel kleiner sein wird, als die auf jedem unveränderten, durch Gleitflächen nicht zerteilten Krystalliten des nicht verfestigten Materials.

An den Zug-Dehnungsdiagrammen, wie sie die Materialprüfungsmaschinen bei Beanspruchung eines Flußeisenstabes auf Zug liefern, lassen sich die einzelnen Gebiete der Dehnung mit der inneren Strukturänderung in Zusammenhang bringen. Im Diagramm (Fig. 1) bedeutet p den momentan wirkenden Zug, σ die Dehnung des Stabes.

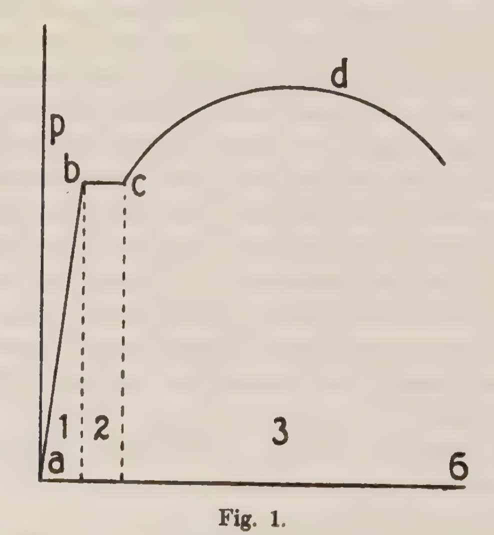


Fig. 1.

Auf der fast geraden Linie $a\,b$ im Gebiete der Dehnungen 1 ändert sich die Länge mit dem Zuge in reversibeler Weise. Bei b wird die untere Elastizitätsgrenze des Stabes überschritten und es tritt eine Verlängerung bei fast konstantem Zuge ein, zuweilen

nimmt derselbe je nach der Geschwindigkeit seiner Steigerung auch ab, in diesem Dehnungsgebiete 2 beginnen aller Wahrscheinlichkeit nach die Krystallite des Stabes sich gegeneinander etwas zu verschieben, wobei aber Gleitflächen in den Krystalliten noch nicht auftreten, das Material also auch nicht verfestigt wird. Erst wenn der Punkt *c* überschritten wird, gelangt man in das Gebiet 3, das der Verfestigung, in dem, obwohl der Querschnitt des fließenden Stabes abnimmt, der Zug doch noch bis zum Maximum *d* wächst, bis er schließlich wegen abnehmenden Querschnittes zu sinken beginnt, bis schließlich das Zerreißen erfolgt. In diesem Gebiete 3 bilden sich die Gleitflächen in den einzelnen Krystalliten des Materials aus, wodurch sehr erhebliche Verfestigungseffekte erzielt werden können.

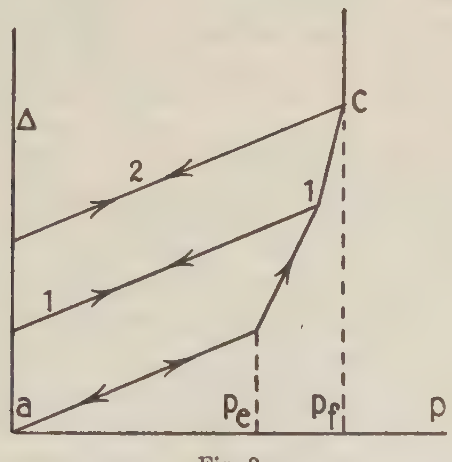


Fig. 2.

Bei Beanspruchung durch Druck könnte die Verkürzung Δ eines Würfels in Abhängigkeit vom Druck durch das Diagramm Fig. 2 dargestellt werden, wobei der Druck immer auf die Einheit des Querschnitts bezogen ist. Wird das Probestück, frisch gegossen oder ausgeglüht, gepreßt, indem der Druck auf 2 parallele Ebenen des Probestückes wirkt, so stellt die Kurve *abc* die Abhängigkeit der Verkürzungen Δ vom Druck *p* dar. Das Stück *ab* entspricht elastischen reversibeln Deformationen, bei *b* ist die Elastizitätsgrenze erreicht, und es beginnt im Material die Ausbildung von Gleitflächen, die von einer Verfestigung desselben begleitet wird. In *C* ist der Fließdruck, *pf*, und damit das Maximum der Verfestigung erreicht. Steigert man den Druck nur bis zum Punkt 1, und läßt dann den Druck sinken, so nehmen die Verkürzungen auf der Kurve 11 ab, bei der nun folgenden Druckstei-

gerung gelangt man wieder in den Punkt 1 der Kurve *abc*. Der Quotient $\frac{\varDelta}{p}$ wird sich von dem bei der ersten Belastung nicht zu unterscheiden brauchen; das verfestigte Material hat aber, wie man sieht, eine viel höhere Elastizitätsgrenze. Die beim ursprünglichen Material beim Druck p_e liegende untere Elastizitätsgrenze kann also sehr erheblich und zwar bis zum Fließdruck p_f erhöht werden. Bei der Bearbeitung der Metalle durch Schmieden, Walzen, Ziehen etc. wird der Fließdruck immer überschritten, wodurch das Metall von seiner unteren Elastizitätsgrenze bis auf die obere, den Fließdruck, gebracht wird. Das Verhältnis der Drucke $\frac{p_f}{p_e}$ ist für jedes Metall charakteristisch, für das Kupfer, bei dem der Verfestigungseffekt groß ist, beträgt es $\frac{2780\ \mathrm{kg/qcm}}{203\ \mathrm{kg/qcm}}$; außerdem sind p_f und p_e zwei von einander unabhängige Funktionen der Temperatur.

Läßt man einen krystallinischen Körper, wie Eis, Phosphor oder verschiedene weiche Metalle unter konstantem Druck aus einer ringförmigen Öffnung mittels einer früher[1]) von mir angegebenen Anordnung ausfließen, so kann man bei Überschreitung des Druckes der oberen Elastizitätsgrenze stationäre Ausflußgeschwindigkeiten erzielen. Diese Geschwindigkeiten wachsen sehr viel schneller als proportional der Drucksteigerung an. Auch diese Art von Fließen krystalliner Körper geht in der Weise vor sich, daß an der Ausflußöffnung jeder Krystallit durch Gleitflächen in Elementarkrystalle zerlegt wird, wodurch dann die krystalline Masse frei beweglich wird. Mit der Temperatur wächst die Ausflußgeschwindigkeit in der Weise an, daß für Metalle dieselbe sich bei der Erhöhung der Temperatur um 10° verdoppelt[2]). Man darf aber wahrscheinlich nicht behaupten, daß diese Regel die Temperaturabhängigkeit der Reibung auf den Gleitflächen genau wiedergibt, denn die Reibung auf verschieden orientierten Gleitflächen kann recht verschieden sein und ebenso die Abhängigkeit von der Temperatur der Gleitflächen verschiedener Orientierung, außerdem aber könnte sich auch die Zahl der Systeme von Gleitflächen verschiedener Richtung und die Anzahl der Gleitflächen jedes Systems,

---

1) Über die Ausflußgeschwindigkeit krystallisierter Stoffe. Annalen der Physik 157, S. 198, 1902.

2) Werigin, Lewkojeff und Tammann, Über die Ausflußgeschwindigkeit einiger Metalle. Annalen der Physik Bd. 10, S. 647, 1903.

die bei derselben Beanspruchung entstehen, mit der Temperatur ändern. Man steht hier vor einem sehr komplizierten Vorgange, dessen nähere Analyse zu komplizierten Ausdrücken führen muß. Dasselbe gilt für die Duktilität. Nur auf einige Umstände sei hier hingewiesen, die ein Material besonders duktil machen. Wenn nämlich die Gleitflächen in den Krystalliten bei einem kleineren Druck auftreten als der, bei dem die Krystallite sich gegen einander zu verschieben beginnen, so wird dieser Umstand, wie leicht einzusehen ist, die Ziehbarkeit des Materials sehr begünstigen. In der Tat treten beim Cu und Au die Gleitflächen in den Krystalliten bei Drucken unterhalb der Konglomeratfestigkeit auf, beim Silber treten die Gleitflächen und der Beginn der Krystallitenverschiebung bei demselben Druck auf, bei anderen Metallen wie Eisen, Nickel, Sn, Cd und Zn treten die Gleitflächen deutlich erst nach Überschreitung der Konglomeratfestigkeit auf. Je größer die Differenz zwischen dem Druck, bei dem Gleitflächen auftreten, und der Konglomeratfestigkeit ist, um so leichter werden beim Ziehen und Schmieden Brüche auftreten können. Damit ein Material besonders duktil ist, muß aber auch die Anzahl der Gleitflächen, die bei einer bestimmten Überanstrengung der Krystalliten entstehen, groß sein, und dieselben müssen sich in mindestens 3 Richtungen leicht bilden können. Auch in dieser Hinsicht sind die so duktilen Metalle Cu, Au und Ag den anderen überlegen. Von O. Mügge[1]) ist auf die Leichtigkeit der Bildung zahlreicher Gleitflächen beim Cu, Au und Ag aufmerksam gemacht worden, und die Lage derselben genauer bestimmt. Im Folgenden wird dann gezeigt werden, daß beim Au zuerst die Gleitflächen und daß beim Ag die Gleitflächen und die Verschiebung der Krystalliten ziemlich gleichzeitig eintreten.

Außerdem wird im Folgenden gezeigt werden, daß die viel feinkörnigere Struktur der Legierungen, die aus den Krystalliten der reinen Komponenten bestehen oder aus den Krystalliten von gesättigten Mischkrystallen, welche nur geringe Mengen des fremden Metalls enthalten, eine Erhöhung der Festigkeit der Legierung gegenüber der ihrer Komponenten bedingt. Schließlich wird auch der Fall, daß die Legierungsreihe aus einer lückenlosen Reihe von Mischkrystallen besteht, an einem Beispiel näher untersucht werden.

Gold.

Das Gold wurde in Form eines Würfels von W. C. Heraeus

1) O. Mügge, Neues Jahrbuch für Mineralogie 1899, B. 2, S. 55.

als reines Gold mit einer Oberfläche von 2,20 qcm bezogen. Auf der polierten Fläche dieses Gold-Würfels traten bei 250 kg/qcm noch keine Gleitlinien hervor; das Material war also, wie zu erwarten war, bei seiner Bearbeitung stark überanstrengt worden. Erhitzte man darauf den Gold-Würfel während drei Stunden auf 1000°, so traten Gleitlinien auf der Schliffläche an der einen Seite des Würfels bei 51 kg/qcm auf, welche bei geringer weiterer Drucksteigerung sich über die ganze Schliffläche hinzogen. Die ersten Gleitlinien, die zu bemerken sind, sind senkrecht zur Druckrichtung orientiert; mit steigendem Druck wächst die Neigung der neu auftretenden Gleitlinien zu den erst aufgetretenen; die Polyeder-Begrenzung tritt auf der Schliffläche des Goldes nie als eine polygonale Zeichnung wie bei manchen anderen Metallen hervor; nur aus den Gleitflächen-Systemen war die Begrenzung der einzelnen Krystallite zu erraten. Nachdem der Druck von 51 kg/qcm erreicht war, die untere Druckgrenze für das Gold festgestellt war, wurde der Versuch wiederholt; vorher war der Gold-Würfel nochmals zwei Stunden auf 900° erhitzt worden. Die hierauf folgende Bestimmung der unteren Elastizitätsgrenze zu 49 kg/qcm stimmt mit der ersten Bestimmung gut überein. Nun wurde der Goldwürfel durch Drucksteigerung auf 200 kg pro qcm überanstrengt, wobei die Oberfläche deformiert wurde, und dann 2 Stunden bei 800° geglüht, wonach sich eine untere Elastizität von 47 kg/qcm ergab. Die Temperatur von 800° reicht also noch aus, das überanstrengte Gold wieder weich zu machen. Zur genaueren Bestimmung der Rekrystallisationstemperatur wurde dann der Gold-Würfel drei Stunden auf 600° erwärmt und gepreßt; nun traten die ersten Gleitlinien erst bei 71 kg/qcm auf, das Gold ist mithin durch dreistündiges Erwärmen auf 600° noch nicht vollständig weich geworden. Nach zweistündigem Erhitzen auf 700° sank die untere Druckgrenze auf 62 kg/qcm, während ein zweistündiges Erhitzen auf 750° die untere Elastizitätsgrenze auf 55 kg/qcm herabdrückte. Die Rekrystallisationstemperatur des Goldes liegt also zwischen 750 und 800°.

Die Legierungen des Cu und Ag.

Die Bestimmung der Werte der unteren Elastizitätsgrenze der beiden reinen Metalle wurde in folgender Weise ausgeführt.

Um die aus einem käuflichen Kupferstabe hergestellten Würfel mit den beiden parallel gefeilten gegenüberstehenden Flächen in einen bestimmten Zustand, bestimmt durch eine gewisse Größe

des Korns der einzelnen Kupferkrystallite überzuführen, wurden fünf Würfel 3 Stunden lang auf 1000°—1050° erhitzt. Auf der polierten Würfelfläche, senkrecht zu den beiden parallel gefeilten Würfelflächen, traten zwischen 201 und 203 kg pro 1 qcm bei den 5 Würfeln die ersten Gleitflächen, wie früher beschrieben, deutlich hervor. Die früheren Bestimmungen hatten für die untere Elastizitätsgrenze des Kupfers die Werte 201,7—210 kg/qcm ergeben.

Beim Silber machte sich die Schwierigkeit geltend, ein blasenfreies Material herzustellen. Schmolz man 20—30 gr, Spuren von Fe enthaltendes Ag, im Porzellanprobierrohr, so enthielt der Regulus immer größere oder kleinere Vakuolen. Bessere Resultate wurden beim Gießen des Ag in Formen aus Formsand, welche auf 800° erhitzt waren, erhalten. Gleichzeitig mit dem ersten Auftreten von Gleitlinien auf der polierten Fläche traten nicht selten vereinzelte Polyederkanten auf. Die Konglomeratfestigkeit ist im Ag also der Krystallitenfestigkeit sehr nahe gleich. Die ersten Gleitflächen wurden bei 85,5 kg/qcm sichtbar und zwar traten sie zuerst fast senkrecht zur Druckrichtung auf, die bei weiterer Drucksteigerung folgenden Gleitflächen waren dann in der Regel um so stärker zur Druckrichtung geneigt, je mehr die untere Elastizitätsgrenze überschritten wurde. Nachdem der Druck bis 300 kg/qcm gesteigert war, wurde die untere Elastizitätsgrenze nochmals bestimmt und bei 85,0 kg/qcm gefunden. Bei einem zweiten Ag-Würfel lag die untere Elastizitätsgrenze bei 89 kg/qcm. Man darf also den Wert von 86 kg/qcm als die untere Elastizitätsgrenze des Silbers annehmen.

Aus den Schmelzen von Cu und Ag scheidet sich nach den Untersuchungen von W. v. Lepkowski[1]) sowohl das Cu als Mischkrystall mit 2% Ag als auch das Ag als Mischkrystall mit 5% Cu aus. Die untere Elastizitätsgrenze dieser gesättigten Mischkrystalle mag etwas höher liegen als die des reinen Cu und Ag, jedenfalls dürfte der Unterschied nicht erheblich sein. Die untere Elastizitätsgrenze der Legierung mit 72% Ag und der mit 25% Ag liegt sehr viel höher als die des Ag und Cu. Bei der Legierung mit 72% Ag, die dem feinlammellosen Eutektikum entspricht, war bei 700 kg/qcm eine Veränderung der polierten Oberfläche bei 100facher Vergrößerung nicht festzustellen, obwohl bei 550 kg/qcm das Manometer regelmäßig um 7 kg in der Minute fiel, ein Fließen der Legierung also eingetreten war. Erst nach der Überanstren-

---

1) Zeitsch. f. anorg. Chem. Bd. 59, S. 290, 1908.

gung der Legierung bei etwa 1500 kg waren auf der polierten Fläche verästelte krummlinige Trennungslinien aufgetreten.

Die Legierung mit 25 % Ag enthält primäre gebildete kupferreiche Mischkrystalle in dendritischer Ausbildung, umgeben vom Eutektikum. Auch an diesen Cu-Krystalliten war bis 600 kg/qcm eine Veränderung nicht wahrzunehmen. Bei 340 kg/qcm begann das Manometer langsam nach einer Drucksteigerung zurückzufallen, es trat also hier Fließen aber ohne merkliche Verschiebung der Krystallite gegeneinander und in ihnen ein. Erst bei etwa 1000 kg/qcm bildeten sich Gleitflächen in den primär ausgeschiedenen Kupferkrystallen.

Obwohl die Legierungen nicht reines Cu und Ag enthalten, so ist doch nicht anzunehmen, daß der geringe Gehalt der Cu-Kryställiten an Ag und der der Ag-Krystalliten an Cu die untere Elastizitätsgrenze in der beobachteten Weise erhöht. Wäre die große Differenz in der Druckfestigkeit der Legierungen und der reinen Metalle auf eine erhöhte Druckfestigkeit der Mischkrystalle allein zurückzuführen, so hätte man doch erwarten sollen, daß die Konglomeratfestigkeit der Legierung sich nicht erheblich von der der beiden reinen Metalle unterscheiden würde. Aber die Konglomeratfestigkeit der Legierungen liegt, wie hier erwiesen wurde, sehr viel höher als die der reinen Metalle. Der Grund dieser Erscheinung kann nur in dem sehr viel kleineren Korn der Legierung gesucht werden. Da beim Kupfer und Silber das Eutektikum von besonders feinem lamellaren Gefüge ist, so wird auch hier eine besonders hohe Verfestigung der die Legierungen bildenden Metalle zu beobachten sein, was auch in der Tat zutrifft. Außerdem wird von allen Legierungen, deren Komponenten ungefähr dieselbe Druckfestigkeit haben, die druck- und zugfesteste diejenige von der eutektischen Zusammensetzung sein, weil in ihr sich größere Krystallite nicht vorfinden.

Die Cd-Zn-Legierungen.

Die zu pressenden Würfel wurden auf folgende Weise hergestellt: Die flüssigen Metalle, resp. Legierungen wurden in aus Formsand hergestellte Formen gegossen, in denen sie langsam während 1—2 Stunden abkühlten; die so hergestellten Stäbe wurden zersägt und die beiden Schnittflächen genau parallel gefeilt, während eine dritte Fläche gut poliert wurde. Diese polierte Fläche wurde dann bei den Legierungen während der Preßversuche mikroskopisch bei 70-facher Vergrößerung nach jeder Drucksteigerung um ca. 25 kg pro qcm nach Veränderungen abgesucht.

Für die untere Elastizitätsgrenze des reinen Zinks, bei der das Hervortreten der polyedrischen Krystallite auf der polierten Fläche merkbar war, wurden die folgenden Werte gefunden: 157 kg/qcm, 127 kg/qcm, 117 kg/qcm, 117 kg/qcm, 116 kg/qcm, während früher[1]) die Konglomeratfestigkeit für Zink zu 124,5 kg/qcm gefunden wurde. Für reines Cadmium wurde für die Konglomeratfestigkeit der Wert 26,7 kg/qcm gefunden, während die früheren Untersuchungen 27,7 kg/qcm ergaben.

Betreffs der Legierungen ist folgendes zu bemerken:

Durch das Polieren trat die Struktur der Legierungen deutlich hervor, da sich das viel weichere Cadmium leichter abschliff, als das härtere Zink. Man konnte infolgedessen nicht nur die primär ausgeschiedenen Zink-Krystallite deutlich vom Eutektikum unterscheiden, sondern auch im fein-lamellaren Eutektikum die Zink- und auch die Cd-Krystallite deutlich erkennen.

Steigert man den Druck auf den in der folgenden Tabelle aufgeführten Legierungen um je 25 kg/qcm, wobei man nach jeder Drucksteigerung die ganze polierte Fläche mikroskopisch untersucht, so bemerkt man bis zu den angegebenen unteren Grenzen keinerlei Veränderungen auf derselben. Zwischen den beiden in der Tabelle angegebenen Druckgrenzen schien aber das weiche Eutektikum zwischen den primären Zink-Krystallen hervorzuquellen und innerhalb der angegebenen Grenzen das Niveau der Zink-Krystallite zu erreichen. Dieses Druckintervall läßt sich ziemlich schwierig feststellen. Leichter ist es, den Druck des Beginns des Fließens in der Weise zu bestimmen, daß man nach jeder Drucksteigerung die Änderung des Druckes am Manometer in Abhängigkeit von der Zeit beobachtet. Man findet hierbei, daß nach einer Drucksteigerung unterhalb der unteren Elastizitätsgrenze des Materials der Druck konstant bleibt, während, wenn die Fließgrenze erreicht ist, ein langsames Abnehmen desselben mit der Zeit stattfindet. Dieses Fallen des Druckes nimmt mit wachsender Zeit sehr schnell ab, worauf der Druck wieder einen konstanten Wert annimmt. In der Tabelle ist in der Rubrik „Beginn des langsamen Fallens“ die untere Grenze, bei der nach einer Drucksteigerung der Druck konstant blieb, und der Druck, bei dem zuerst ein Fallen beobachtet wurde, angegeben.

Außerdem wurden noch diejenigen Drucke bestimmt, bei denen in 20—30 Sekunden der Druck um 10—20 kg bei den Legierungen

1) O. Faust u. G. Tammann, l. c.

verschiedener Zusammensetzung fiel. Diese Drucke sind in der Tabelle mit p_f bezeichnet.

Konzentration	Oberfläche in qcm	Beginn des Hervorquellens Druck pro 1 qcm	Beginn des langsamen Fließens Druck pro 1 qcm	Beginn des schnellen Fließens Druck p_f pro 1 qcm	Bemerkungen
20 % Cd	1,18	127—144	—	—	Bis 500 kg keine Gleitlinien.
40 % Cd	1,01	110—155	120—115	225	Bis 400 kg keine Gleitlinien.
60 % Cd	1,08	—	103—99	260	
82,6 % Cd	1,20	102—125	102—96	230	Eutektikum, aber noch einige hell leuchtende primäre Zn-Krystalle.

Die Druckgrenzen, bei denen das weiche Eutektikum in Bewegung kommt, also hervorzuquellen beginnt, stimmten mit den am Manometer bestimmten Drucken der Fließerscheinung überein. Sichere Werte für den ersten Beginn des Fließens lassen sich nicht gut feststellen, wohl aber sieht man, daß der mikroskopisch bemerkbare Beginn des Fließens mit dem am Manometer bestimmten ziemlich übereinstimmt. Mit Sicherheit geht aus diesen Messungen hervor, daß die fast eutektische Legierung mit 82,6 % Cd, welche nur sehr wenig primäre Zn-Krystalle enthielt, obwohl sie so Cd-reich ist, doch sich betreffs ihrer unteren Elastizitätsgrenze und des Fließdruckes von der unteren Elastizitätsgrenze des Zn und der Zn-reichen Legierungen wenig unterscheidet.

Die untere Elastizitätsgrenze des Zn beträgt, wie wir sahen, 117 kg/qcm, die des Cd 27 kg/qcm. Der Beginn des Fließens tritt bei den Legierungen, wie aus der Tabelle zu ersehen ist, ein, wenn der Druck die untere Elastizitätsgrenze des Zn erreicht, und das trifft sogar für die Legierung mit $^1/_5$ Zn fast ein. Ein Gerüst von Zn-Krystallen gibt also den Cd-reichen Legierungen ihre Festigkeit, und dieses Gerüst ist trotz seiner geringen Masse doch so fest wie die kompakte Masse des Zn.

Die beiden Metalle Zn und Cd scheiden sich nach der Untersuchung von Hindrichs[1]) ohne merkliche Beimischung des anderen Metalles aus ihren Schmelzen ab, jedenfalls nimmt das aus den Zn-Cd-Schmelzen ausgeschiedene Zn weniger als 1 % Cd in sich auf, und dasselbe gilt für die sich ausscheidenden Cd-Krystallite.

1) Zeitsch. f. anorg. Chemie 55, S. 415, 1908.

G. Bruni[1]) und seine Schüler haben neuerdings sich für die Existenz einer Reihe von Cd-reichen Mischkrystallen, von 100—97% Cd ausgesprochen, weil sie auch bei größeren Mengen der Schmelzen in diesem Konzentrationsintervall einen eutektischen Haltepunkt nicht finden konnten. Die mikroskopische Untersuchung der Legierungen mit 99 und 98% Cd und mit sogar 99,5% Cd ergibt aber deutlich die Anwesenheit von Eutektikum. Es kann also der Zn-Gehalt der Cd-Krystallite in normal gekühlten Legierungen nicht 0,5% überschreiten. Es wäre vielleicht möglich, daß Cd bei sehr langer Exposition einer Legierung bei 260° etwas mehr Zn aufnehmen könnte, doch können die bei normaler Kühlung hergestellten Legierungen nur Mischkrystalle enthalten, deren Gehalt unter 0,5% Cd resp. 0,5% Zn beträgt.

Man hat also keinen Grund, die höhere Elastizitätsgrenze der Cd-Zn-Legierungen, welche bis zum Cd-reichen Eutektikum an die Elastizitätsgrenze des Zn heranreicht, auf das Vorhandensein eines, merkliche Zn-Mengen enthaltenden, druckfesten Mischkrystalls zurückzuführen. Der Grund der Verfestigung ist hier offenbar in der Verkleinerung der Korngröße der einzelnen Krystallite, besonders der im Eutektikum, zu suchen.

Kupfer-Mangan.

Kupfer-Mangan sind nach R. Sahmen[2]) im geschmolzenen Zustande in allen Verhältnissen mischbar und bilden eine lückenlose Reihe von Mischkrystallen mit einem Schmelzpunktsminimum; es war daher von Interesse, festzustellen, ob die unteren Elastizitätsgrenzen sich kontinuierlich mit der Zusammensetzung änderten. Aus den Reguli von Kupfer-Mangan wurden Preßstücke, meistens in Form von geraden Prismen, gesägt; eine geeignete Seite wurde poliert und während der Drucksteigerung mikroskopisch nach Veränderungen, nach Gleitlinien und Polyederkanten abgesucht. Meistens wurde an ein und demselben Preßstück die untere Elastizitätsgrenze mehrere Male hintereinander bestimmt, indem das gepreßte Stück durch Glühen bei 700—800° wieder weich gemacht wurde. Die beim Pressen der Legierungen auftretenden Gleitlinien ähnelten denen des Kupfers, auch traten häufig bei Steigerung des Druckes, ähnlich wie beim Kupfer, mehrere Systeme von Gleitlinien in den Krystalliten hervor. Besonders bei den Mangan-

---

1) Zeitsch. f. anorg. Chemie 68, S. 76, 1910.
2) Zeitschr. f. anorg. Chem. 57, S. 20, 1908.

reichen Preßstücken waren neben Gleitlinien auch Polyederkanten zu bemerken; die untere Elastizitätsgrenze des reinen Mangans selbst konnte nicht festgestellt werden, da das Metall so spröde ist, daß man kein geeignetes Preßstück herstellen kann.

In der Tabelle ist in der ersten Rubrik die Konzentration der Legierung in Gewichtsprozenten angegeben, in der zweiten die unteren Elastizitätsgrenzen selbst, d. h. der Druck in kg pro qcm, bei dem Gleitlinien (Gl.) oder Polyeder (Pol.) zuerst auftraten; in der dritten Rubrik sind die Drucke verzeichnet, bei denen noch keine Veränderungen und dann diejenigen, bei denen die ersten Veränderungen auf der Schliffläche zu bemerken waren. In der vierten Rubrik ist die Größe der Druckflächen in qmm angegeben.

Konzentration		Untere Elastizitätsgrenze	keine Veränderung	Oberfläche
% Cu	% Mn	kg/qcm	kg/qcm	in qmm
100	—	203	200—203	
95	5	260 (Gl.)	238—260	67,2
80	20	243 (Gl.)	200—243	38,6
65	35	317 (Gl.)	262—317	21,1
60	40	330 (Gl.)	286—330	71,0
50	50	342 (Gl. + Pol.)	260—342	29,2
30	70	720 (Gl.)	661—720	31,5
20	80	992 (Gl.)	852—992	35,2
10	90	1250 (Gl. + Pol.)	1224—1250	38,3

In dieser Legierungsreihe war die Größe der Krystallite nicht sehr verschieden, die Größe der Polyeder in den Legierungen von 0—90% Mn schwankte um denselben Mittelwert.

Das Ansteigen der unteren Elastizitätsgrenze mit wachsendem Mn-Gehalt ist also nicht durch Änderung des Kornes sondern durch die Bildung von Mischkrystallen bedingt. Bis zu 90% Mn inklusive ist nach den Gleitflächen zu urteilen der Aufbau des Cu-Krystalles erhalten. Nun zeigt aber Mn selbst gar keine Gleitflächen, sondern verhält sich bei der Beanspruchung wie ein sprödes Glas. Da aber Mn seines Isomorphismus mit Cu wegen dieselben Gleitflächen haben sollte wie Kupfer, so ist wohl anzunehmen, daß die Fähigkeit, Gleitflächen zu bilden, beim Mn erst bei höherer Temperatur auftritt.

Fassen wir die Resultate zusammen, so können wir dieselben nach folgenden Hauptpunkten ordnen:

a) Zu den 4 früher[1]) festgestellten Tatsachen, welche die neue Auffassung von der Ursache der Verfestigung der Metalle bei ihrer Bearbeitung durch Schmieden, Ziehen oder Walzen stützen, und welche folgende waren:

1) Bei der Verfestigung des Metalles werden die Krystallite derselben durch Gleitflächen in Elementarkrystalle zerlegt.

2) Ein hoher hydrostatischer Druck bewirkt nicht die Bildung von Gleitflächen und deshalb auch keine Verfestigung.

3) Die mit dem Sklerometer bestimmte Härte ändert sich bei der Verfestigung nicht.

4) Durch schnelle Abkühlung bei der Krystallisation läßt sich die Größe der Krystallite verkleinern und dadurch die Druckfestigkeit erhöhen,

kommt als weitere Tatsache die hinzu, daß

5) Die Legierungen zweier Metalle von fast derselben Druckfestigkeit eine sehr viel höhere Druckfestigkeit zeigen als die Komponenten der Legierung, weil die Legierungen, welche aus den reinen Komponenten bestehen, aus viel kleineren Krystalliten aufgebaut sind, als die reinen Metalle. Besonders das Eutektikum hat durch seine feinkörnige Struktur eine viel größere Druckfestigkeit als das in ihm enthaltene Metall mit der kleinsten Druckfestigkeit.

b) Während die elastischen Eigenschaften bei der Bearbeitung der Metalle z. B. bei der Formung zu Draht, wie die Zug- und Druckfestigkeit stark durch Verkleinerung des Kornes anwachsen, ändern sich andere vektorielle Eigenschaften in Folge der Orientierung der Krystallite relativ wenig, beim elektrischen Widerstand ist diese Änderung recht merklich und geht, wenn die Orientierung der Gleitlamellen durch Ausglühen aufgehoben wird, wieder zurück. Schließlich ändern sich die skalaren Eigenschaften wie Dichte und Energieinhalt bei der Bearbeitung der Metalle nur unerheblich, hauptsächlich in Folge sekundärer Ursachen. Die Zerteilung durch Gleitflächen erklärt die große Änderung der elastischen Eigenschaften bei der Bearbeitung der Metalle, die Orien-

1) Zeitschrift f. phys. Chem. 75, S. 126, 1910.

tierung der Lamellen beim Drahtziehen die Änderung des elektrischen Widerstandes, und läßt auch für andere vektorielle Eigenschaften Änderungen in Folge der Orientierung voraussehen. Dagegen werden die skalaren Eigenschaften weder durch die Zerteilung noch durch die Orientierung verändert.

Über die Helligkeitsverteilung im Schweif des Halley'schen Kometen.

Von

K. Schwarzschild und **E. Kron.**

Mit 1 Figur im Text.

Eingereicht am 4. April 1911.

Die Expedition des Potsdamer astrophysikalischen Observatoriums, welche im Frühjahr 1910 unter Leitung von Geheimrat Müller nach Teneriffa ging, nahm zur Photographie des Halley'schen Kometen nur eine kleine Stereoskopkamera mit, in die zwei Zeißaplanate von 23.3 mm Öffnung und 110 mm Brennweite oder ein Goerzanastigmat von 20 mm Öffnung und 180 mm Brennweite eingesetzt werden konnten. Die Kamera wurde auf einem von einem kräftigen Uhrwerk getriebenen parallaktischen Stativ montiert; indessen besaß das Stativ keine Feinbewegungen, um der Bewegung des Kometen genauer zu folgen; auch waren die Fokussierungseinrichtungen der Kamera unvollkommen. Was man in Deutschland vom Halley'schen Kometen in den ersten Monaten des Jahres zu sehen bekommen hatte, war so wenig verheißungsvoll, daß es keinen Zweck zu haben schien, die Expedition hierfür reicher auszurüsten, und ihr Schwerpunkt auf andre Aufgaben gelegt wurde.

Die Aufnahmen des Halley'schen Kometen, welche die Expedition erhielt, waren eine Überraschung für jeden, der die Enttäuschung über die Erscheinung des Kometen in Deutschland miterlebt hatte; mit den Aufnahmen, welche besonders auf amerikanischen Sternwarten erhalten wurden, sind sie freilich nicht vergleichbar. Jedenfalls aber ließ sich aus ihnen ein — wie uns scheint — interessantes Resultat ableiten, weil für die nötigen photometrischen Vergleichsdaten gesorgt worden war, um aus den Schwär-

zungen der Bilder auf der photographischen Platte auf die Helligkeitsverhältnisse im Schweif des Kometen zurückschließen zu können. Mit den beiden ganz gleichen Zeißaplanaten wurden immer gleichzeitig auf derselben Platte zwei Aufnahmen des Kometen gemacht, wobei nur das eine Objektiv einem Helligkeitsverlust von $0.^m4$ entsprechend abgeblendet war[1]). Zu den Aufnahmen mit dem Goerzanastigmaten wurden mit einem von Prof. Eberhard konstruierten Röhrenphotometer Vergleichsskalen hergestellt auf Platten derselben Emulsion, die auch gleichzeitig mit den Kometen aufnahmen entwickelt wurden.

Bei der Unschärfe der Aufnahmen hätte es keinen Zweck gehabt, die Helligkeit an jeder Stelle des Schweifes aus ihnen ableiten zu wollen. Auch ist es fraglich, ob aus einer derartigen Ausmessung auch bei den besten Aufnahmen bei der verwickelten Struktur des Schweifes eine Erkenntnis hervorginge.

Hingegen ergab sich folgende mehr summarische Fragestellung:

Die Helligkeit des Schweifes nimmt, von Unregelmäßigkeiten abgesehen, vom Kopf des Kometen aus ständig ab. Das liegt notwendig zum Teil daran, daß die Dichte im Schweif abnimmt. Die Abnahme der Dichte geschieht erstens dadurch, daß die vom Kopf ausströmende Materie sich über einen immer größeren Querschnitt verteilt, und zweitens dadurch, daß gleichzeitig die Geschwindigkeit, mit der die Schweifteilchen den Querschnitt durchsetzen, infolge der Repulsivkraft, welche die Sonne auf sie ausübt, zunimmt. Die Frage ist nun, ob diese beiden Umstände die Abnahme der Schweifhelligkeit bereits quantitativ vollständig erklären, woraus dann folgen würde, daß die Leuchtkraft pro Masseneinheit der Schweifmaterie während der Wanderung durch den Raum ungeschwächt bleibt — oder aber, ob die Abnahme der Schweifhelligkeit eine viel schnellere ist als die der Dichte, was man a priori bei einem wesentlich Gasspektrum zeigenden, also sog. selbstleuchtenden Schweif für wahrscheinlicher halten möchte.

Daß man übrigens an jeder Stelle des Schweifes einfach die Summe der Intensitäten der in dem betreffenden Visionskegel liegenden Teilchen beobachtet, daß von Verdeckung und Absorption keine Rede sein kann, ist bei der enormen Verdünnung der Schweifmaterie (s. unten) offenbar und wird im folgenden stets vorausgesetzt. Auch sei gleich darauf hingewiesen, daß die Än-

---

1) Infolge eines Versehens wurde diese Abblendung benutzt statt der beabsichtigten von 1^m.

derung des Abstandes von der Sonne und damit der Beleuchtung durch die Sonne für das relativ kurze der Messung zugängliche Schweifstück wenig ausmacht.

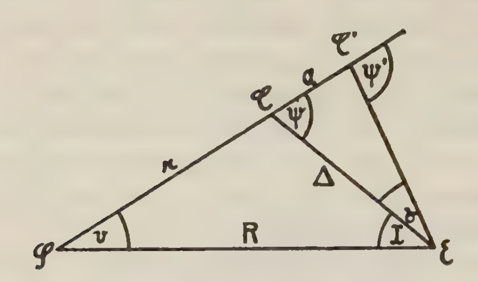
Zur Entscheidung der obigen Frage genügt es, „Querschnittsintensitäten" des Schweifes festzustellen, den Schweif an einigen Stellen auf einer Linie senkrecht zur Schweifaxe durchzuphotometrieren und die Summe oder das Integral der längs jeder solchen Linie gefundenen Intensitäten zu bilden. Die seitliche Ausbreitung des Schweifes beeinflußt solche Querschnittsintensitäten nicht mehr, sie sind nur noch von der Strömungsgeschwindigkeit im Schweif abhängig, und über letztere hat man anderweitig genügende Angaben.

Die folgende Tabelle (1) enthält nun eine Anzahl von Querschnittsintensitäten, die aus den Aufnahmen der Teneriffa-Expedition abgeleitet wurden. Die Einheit ist eine willkürliche, von Tag zu Tag wechselnde. Der Abstand a jedes Querschnitts vom Kopf, wie er auf der Platte gemessen wurde, ist in Graden angegeben. Etwas unscharfe Aufnahmen sind für die Bestimmung der Querschnittsintensitäten eher von Vorteil, da sie die Integration über kleinere Unregelmäßigkeiten der Schweifstruktur gleich von selbst ausführen.

An die Zahlen sind bereits folgende Korrekturen angebracht: Die Intensität des Himmelsgrundes wurde aus der Schwärzung der Platte außerhalb des Kometen, für jeden Querschnitt mit abgeleitet und von der ganzen gemessenen Intensität subtrahiert. Die Extinktion in der Erdatmosphäre wurde für die Wellenlänge 430 $\mu\mu$ den Beobachtungen der Sonne entnommen, welche die Herren Müller und Kron an denselben Tagen auf der betreffenden Station angestellt haben. Nur am 14. Mai war das Wetter unsicher, die Extinktion war anormal groß und es ist leicht möglich, daß der tief stehende Kometenkopf an diesem Tag durch Dunst noch stärker geschwächt war, als aus der Tagesextinktion folgt, so daß die Intensitäten für die höher befindlichen Schweifpartien trotz der Extinktionskorrektion noch zu groß sind. Die Resultate vom 14. Mai haben daher später nur halbes Gewicht erhalten.

Es wurde weiter beachtet, daß die Distanz Δ' der verschiedenen Schweifteile von der Erde nicht die gleiche ist, und daß der Querschnitt, welcher von der Erde aus gesehen senkrecht zur scheinbaren Schweifaxe gelegt wird, in Wirklichkeit wechselnde Winkel mit der Schweifaxe bildet. Eine Änderung der Distanz Δ' bewirkt nun zwar keine Änderung der Flächenhelligkeit, aber der Schweifquerschnitt ändert sich umgekehrt proportional zu Δ'

Es sind daher die Querschnittsintensitäten mit Δ' zu multiplizieren, um sie alle auf dieselbe Entfernung zu reduzieren. Ist ferner der Winkel der Schweifaxe mit dem Visionsradius ψ', so wird der Querschnitt gegenüber normaler Durchsicht vergrößert im Ver-



hältnis $1/\sin\psi'$, wenn man den Schweif auf eine kurze Strecke als zylindrisch ansieht. Es sind also die Querschnittsintensitäten mit $\sin\psi'$ zu multiplizieren, um sie auf Querschnitte senkrecht zur Schweifaxe zu reduzieren. Die Krümmung des Schweifes beträgt auf die hier vorkommenden Distanzen nur wenige Grade, sodaß die Schweifaxe CC' als mit der Verlängerung des Radiusvektors Sonne-Komet (SC) zusammenfallend angesehen werden darf. Aus dem Dreieck Sonne-Erde-Schweifteilchen SEC' ergibt sich aber: $\Delta' \sin\psi' = R \sin v$. Für jede Aufnahme ist R und v und damit auch die Größe $\Delta' \sin\psi'$ konstant, wenn man an dem Schweif entlang geht. Daraus folgt, daß die beiden eben betrachteten Einflüsse zusammen die Verhältnisse der Querschnittsintensitäten nicht ändern, sich, soweit sie hier zunächst in Betracht kommen, gegenseitig aufheben.

Schließlich wurde noch untersucht (durch direkte Aufnahme einer Fläche konstanter Helligkeit), wie die Flächenhelligkeit der Abbildung bei den verwandten Objektiven vom Abstand von der Axe abhängt, und hierfür eine kleine Korrektion angebracht.

Die Zahlen der Tabelle 1 geben hiernach die wirklichen Verhältnisse der Querschnittsintensitäten für die Zeit jeder Aufnahme.

Nunmehr ist zu untersuchen, wie weit die in Tabelle 1 enthaltenen Querschnittsintensitäten durch die wachsende Geschwindigkeit der Strömung im Schweif beeinflußt werden. Ist I die Querschnittsintensität und v die durchschnittliche Geschwindigkeit, mit der der Querschnitt durchströmt wird, so muß:

$$I \cdot v = \text{const.} \tag{1}$$

sein, falls die Strömung stationär ist und jedes Massenteilchen des

Tabelle 1.

Datum	Mai 1.	Mai 3.	Mai 7.	Mai 8.	Mai 9.	Mai 9.	Mai 10.	Mai 12.	Mai 14.
Objektiv	Zeiß	Zeiß	Zeiß	Zeiß	Zeiß	Goerz	Goerz	Zeiß	Zeiß
Kopfabstand a	Querschnittsintensität I								
0°.26		1.57							
0.42	1.06								
0.52		1.11	2.33	2.78	2.52	2.89	2.65	2.23	(2.82)
0.68	1.27								
0.78		0.76	1.87	1.71	2.00	2.30	2.05	1.69	(2.56)
1.04		0.72	1.38	1.29	1.42	1.93	1.64	1.47	
1.20	0.75								
1.30		0.70	1.30	1.30	1.32	1.64	1.41	1.31	(2.23)
1.56			1.24	1.06	1.04	1.38	1.25	1.21	
1.72	0.61								
1.82		0.58							
2.08			1.01	1.07	0.81	0.97	1.03	1.02	(2.35)
2.34		0.44							
3.13			1.00	0.88	0.69	0.48	0.77	0.77	(2.05)
4.17			0.80	0.70	0.53	0.30	0.61	0.74	(2.09)
5.21			0.74	0.55	0.41	0.26	0.50	0.64	(1.60)
6.25			0.74	0.45	0.32	0.28	0.45	0.56	(1.70)
7.29			0.68						(2.01)
8.34								0.49	

Schweifes seine Leuchtkraft unverändert beibehält[1]). Was die Geschindigkeit v angeht, so kann man für das kurze hier in Betracht kommende Schweifstück die abstoßende Kraft der Sonne als konstant und in unveränderlicher Richtung wirkend annehmen, sodaß die Bewegung der Schweifteilchen relativ zum Kometenkopf einfach die freie Fallbewegung — nur in der Richtung von der Sonne weg — wird. Für dieselbe gilt dann, wenn man die Ausgangsgeschwindigkeit gleich Null setzt:

$$v = \text{const.} \cdot \sqrt{a}$$

1) Die Gleichung gilt auch noch, wenn sich mehrere Ströme verschiedener Geschwindigkeit überlagern, falls die Geschwindigkeit mit wachsendem Abstand vom Kopfe bei ihnen allen in demselben Verhältnis ansteigt.

Herr H. D. Curtis hat in den Publications of the Astronomical Society of the Pacific 1910 pag. 125 die in Tabelle 2 folgende Zusammenstellung beobachteter Geschwindigkeiten v einzelner Schweifknoten mitgeteilt. (Die als unsicher bezeichneten Werte sind ausgelassen.)

Tabelle 2.

Datum	a	v km/sec	$\frac{v}{\sqrt{a}}$
Mai 2.—3.	0	0.9	—
Mai 13.—14.	0.0032	4.9	87
Mai 27.—28.	0.0042	12.8	198
Mai 25.—26.	0.0100	19.3	193
Juni 2.—3.	0.0147	31.8	263
Mai 28.—29.	0.0186	36.8	270
Mai 31.—Juni 1.	0.0191	33.3	241
Juni 6.	0.0237	43.8	285
Mai 26.—27.	0.0270	38.4	234
Juni 6.—7.	0.0438	70.1	331
Mai 30.—31.	0.0712	72.4	271
Juni 7.—8.	0.0905	91.2	303

Bildet man die Quotienten $\frac{v}{\sqrt{a}}$, so sieht man, daß man für Distanzen vom Kopf > 0.01 angenähert eine Konstante erhält, und daß man aus den Beobachtungen höchstens auf eine Neigung zu stärkerem Anwachsen der Geschwindigkeit mit der Entfernung vom Kopf, verglichen mit der parabolischen Formel, schließen kann.

Nimmt man die parabolische Formel an und bildet dementsprechend die Produkte $I . \sqrt{a}$, so erhält man die Zahlen der Tabelle 3 (siehe folgende Seite), wobei zur Erhöhung der Übersicht der Wert des Produktes im Abstand $0^0.52$ (1 mm auf den Zeißaplanataufnahmen) vom Kopf stets gleich 1 gesetzt ist. In der letzten Spalte steht das geometrische Mittel aus den Ergebnissen der einzelnen Aufnahmen, wobei die wenigen Zahlen vom 1. Mai weggelassen wurden und die vom 14. Mai nur halbes Gewicht erhielten.

Wider unsere Erwartung folgt aus diesen Zahlen, daß die Helligkeitsabnahme des Kometenschweifes zum größten Teil durch die Dichteabnahme erklärt wird. Eine genaue Konstanz der Zahlen ist nicht zu fordern. Dazu sind die wirklichen Verhältnisse im Kometenschweif zu ver-

Tabelle 3.

Datum	Mai 1.	Mai 3.	Mai 7.	Mai 8.	Mai 9.	Mai 9.	Mai 10.	Mai 12.	Mai 14.	Mai 3.—14.
Objektiv	Zeiß	Zeiß	Zeiß	Zeiß	Zeiß	Goerz	Goerz	Zeiß	Zeiß	Geometr. Mittel
Kopfabstand a	$I\sqrt{a}$									
0°.26		0.63								
0.42	0.84									
0.52		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	(1.00)	1.00
0.68	1.29									
0.78		0.83	0.98	0.75	0.97	0.97	0.95	0.93	(1.11)	0.92
1.04		0.91	0.84	0.65	0.79	0.94	0.88	0.93		0.84
1.20	1.20									
1.30		0.99	0.88	0.74	0.83	0.90	0.84	0.93	(1.25)	0.89
1.56			0.92	0.66	0.71	0.83	0.82	0.93		0.81
1.72	1.16									
1.82		0.98								
2.08			0.95	0.77	0.64	0.67	0.78	0.91	(1.66)	0.84
2.34		0.85								
3.13			1.05	0.78	0.67	0.41	0.71	0.84	(1.77)	0.77
4.17			0.97	0.71	0.60	0.30	0.65	0.93	(2.09)	0.71
5.21			1.10	0.56	0.44	0.34	0.59	0.87	(2.08)	0.66
6.25			1.00	0.63	0.51	0.29	0.60	0.91	(1.79)	0.66
7.29			1.09						(2.66)	
8.34								0.88		

wickelt und zu ungeklärt, die Strömung ist vor allem nicht stationär, wie bei Ableitung der Gleichung (1) vorausgesetzt wurde. Bei zunehmender Tätigkeit des Kometen werden vermutlich zunächst die dem Kopf benachbarten Schweifpartien heller, bei abnehmender wird das Schweifende relativ größere Helligkeit festhalten. Auch läßt sich die mögliche Größe der systematischen Messungsfehler schwer abschätzen.

Die Konstanz der Zahlen würde übrigens im Mittel noch besser werden, wenn man die Zunahme der Geschwindigkeit gemäß den Daten von Herrn Curtis stärker als beim freien Fall, ansetzen würde.

Wenn man aber auch die am stärksten abnehmende Zahlenreihe, die vom 9. Mai, herausgreift, so folgt daraus immer noch,

daß die Leuchtkraft des Massenteilchens des Kometen in einer Zeit von 3 Tagen — so lange braucht das Teilchen nach Herrn Curtis' Geschwindigkeiten etwa bis zu einer Entfernung von 6° vom Kometenkopf — nur auf ein Drittel ihres Wertes abgenommen hätte. Es scheint wenig wahrscheinlich, daß ein derartiges Dauerleuchten aus der Energie der Schweifmassen selbst bestritten werden kann. Hingegen erklärt sich unser Ergebnis ohne weiteres, wenn man annimmt, daß es sich bei den Kometenschweifen um Fluoreszenz- oder Resonanzstrahlung handelt, die durch die Sonnenstrahlung hervorgebracht wird. Herr Wright (Lick Observatory Bulletin Nr. 174) hat im Schweifspektrum des Kometen 1910 a sehr wahrscheinlich bereits die Resonanzstrahlung des Natriums beobachtet. Einen analogen Ursprung würde man für das *CO*- und *CH*-Bandenspektrum des Schweifes des Halleyschen Kometen vorauszusetzen haben. Die Intensität der Fluoreszenz pro Masseneinheit wird dann übrigens längs des Schweifes nicht konstant sein, sondern mit dem Quadrat der Entfernung von der Sonne abnehmen. Dies gibt im Durchschnitt für die obigen Beobachtungstage etwa eine Abnahme von 15 % bei 6° scheinbarem Abstand vom Kopf, macht also quantitativ nicht viel aus, liegt aber im Sinne der beobachteten Zahlen.

Während im Vorstehenden nur die relativen Helligkeiten der verschiedenen Teile des Schweifes untersucht wurden, ermöglichen die Aufnahmen der Teneriffaexpedition auch noch absolute Helligkeiten abzuleiten infolge des Umstandes, daß auf den meisten Bildern bei der ungenauen Fokussierung die Sterne Scheibchen von hinreichender Größe sind, um sowohl den Scheibendurchmesser (0,1 bis 0,3 mm) als auch die Schwärzung der Scheibe messen zu können. Die folgende Tabelle (4) gibt für jedes Datum den benutzten Vergleichstern und dessen Größe nach der Göttinger Aktinometrie (aber auf Harvard-System reduziert) an. Als Einheit der Flächenhelligkeit wurde die mittlere Flächenhelligkeit der Sonne gewählt und als photographische Sterngröße der Sonne im Harvard-System nach O. Birck (Dissertation, Göttingen 1908) der Betrag $-25^{m}.8$ angenommen. Damit ergab sich die in Tabelle 4 in der 3. Spalte stehende Flächenhelligkeit des Kometenschweifs an der hellsten Stelle des Querschnitts in $0^{0}.52$ Abstand vom Kopf. Die Querschnittsintensitäten ließen sich natürlich durch Anbringen derselben Faktoren auf die Flächenhelligkeit der Sonne reduzieren.

Unter α findet man angegeben, welchen scheinbaren Abstand vom Kometenkopf ein Punkt auf dem Radiusvektor des Kometen in 0.015 Astron. Einheiten wirklichem Abstand von demselben hat. Unter I findet man die Querschnittsintensitäten aus Tabelle (1) für diesen Abstand vom Kopf interpoliert und auf die Flächenhelligkeit der Sonne bezogen.

Tabelle 4.

Datum	Vergleichstern	Größe	i	α	I	E_0
Mai 1.	10 Piscium	$4.^m38$	$0.84 . 10^{-11}$	$1.^\circ 0$	$1.8 . 10^{-11}$	$1.2 . 10^{10}$
Mai 3.	"	"	0.70	1.2	1.4	1.7
Mai 7.	35 Piscium	5.93	1.14	1.5	1.8	1.9
Mai 8.	"	"	0.89	1.6	1.1	1.1
Mai 9.	"	"	1.43	1.7	1.7	1.7
Mai 12.	x Piscium	6.28	1.41	2.0	2.1	1.5
Mai 14.	"	"	0.75	2.2	2.3	1.2

Sobald man das Leuchten des Schweifs auf Reflexion oder Resonanz der Sonnenstrahlung zurückführt, gibt die absolute Flächenhelligkeit des Schweifs einen Anhaltspunkt für die Dichte der Schweifmaterie, und die absoluten Querschnittsintensitäten lassen sich in Verbindung mit den Geschwindigkeitsbestimmungen verwerten, um einen gewissen Aufschluß über die in der Zeiteinheit vom Kometen zur Schweifbildung abgegebene Masse, über die „Ergiebigkeit“ des Kometen, zu erhalten.

Man stelle sich zunächst einmal vor, daß der Schweif aus lauter kugelförmigen Partikeln vom Radius ϱ bestehe, die das Sonnenlicht ohne Absorptionsverlust gleichförmig nach allen Seiten[1]) diffundieren. Die Anzahl der Partikel auf der Flächeneinheit, von der Erde aus gesehen, sei n. Der Sonnenradius sei A, der Abstand des anvisierten Raumteiles von der Sonne sei, wie oben, r. Dann ist die Flächenhelligkeit verglichen mit der Flächenhelligkeit der Sonne:

$$i = n\pi\varrho^2 \frac{A^2}{2r^2}. \tag{2}$$

Ist q die senkrecht zum Radiusvektor und zur Gesichtslinie gezogene Koordinate, so wird die Querschnittsintensität:

---

1) Und zwar vorwärts sowohl, als auch rückwärts nach der Art von Teilchen, deren Durchmesser unter der Wellenlänge des Lichts liegt.

$$I = \int i dq = \pi \varrho^2 \frac{A^2}{2r^2} \int n dq. \tag{3}$$

Faßt man nun die wirklichen Teilchen ins Auge, welche den Kometenschweif bilden und welche einen Radius ϱ_0 und ein spezifisches Gewicht s haben mögen, so kann man jedem Teilchen doch immer einen „effektiven“ Radius ϱ zuschreiben, sodaß die obigen Formeln gelten. Die Größe $\frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}$ stellt dann eine Art Albedo dar. Die Gesamtmasse des Kometenschweifs, welche sich auf die Flächeneinheit von der Erde aus gesehen projiziert, wird:

$$\frac{4}{3} \pi \varrho_0^3 s n = \frac{8}{3} \varrho_0 \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2 s \frac{i r^2}{A^2}.$$

Denkt man den Schweif längs des Visionsradius so komprimiert, daß er durchweg die in seinen mittleren Teilen herrschende maximale Dichte annimmt, und nennt die dann entstehende Dicke des Schweifs in Richtung des Visionsradius p, so erhält man für diese maximale Dichte:

$$\delta = \frac{4}{3} \frac{\pi \varrho_0^3 s n}{p} = \frac{8}{3} \frac{\varrho_0}{p} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2 s \frac{i r^2}{A^2}. \tag{4}$$

Die Gesamtmasse, welche sich in der Zeiteinheit durch den Schweifquerschnitt bewegt, die Ergiebigkeit, wird:

$$E = \frac{4\pi}{3} \varrho_0^3 s \,.\, v \int n dq = \frac{8}{3} \varrho_0 \left(\frac{\varrho^0}{\varrho}\right)^2 s v \frac{I r^2}{A^2}.$$

Die Längeneinheit, die oben bei der Berechnung der Querschnittsintensität verwandt wurde, war 0.2 mm auf den Aufnahmen mit dem Zeißaplanaten entsprechend 6′.2. Die wirkliche Größe dieser Längeneinheit ist $\Delta \sin 6'.2$, wenn Δ der Abstand des Kometen ist. Hiermit sind also die obigen Größen I noch zu multiplizieren. Fügt man schließlich noch den Faktor $\sin \psi$ hinzu, der, wie erwähnt, auf normale Durchsicht reduziert, so lautet die vollständige Formel zur Berechnung der Ergiebigkeit aus den Querschnittsintensitäten I der Tabelle:

$$E = \varrho_0 \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2 s E_0, \qquad E_0 = I v \frac{r^2}{A^2} \Delta \sin \psi \,.\, \sin 6'.2. \tag{5}$$

Für die Strömungsgeschwindigkeit in der Entfernung 0.015 Astr. Einheiten vom Kopf ergibt sich aus Herrn Curtis' Zahlen etwa $v = 32$ km/sec. Mit diesen Daten sind die Werte E_0 der

Tabelle (4) und zwar gleich in Einheiten des *c. g. s.*-Systems gerechnet. Im Durchschnitt hat man also etwa:

$$E = 1.5 \,.\, 10^{10}\, \varrho_0^{-} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2 s.$$

Nimmt man den räumlichen Schweifquerschnitt von angenähert zylindrischer Form an, so ergibt sich aus der Seitenansicht des Schweifes in $0^{\circ}.5$ Abstand vom Kopf eine Dicke des Schweifes p — im oben erläuterten Sinne — von etwa 300000 km (3.10^{10} cm). Damit folgt unter Verwendung des Durchschnittswertes $i = 1.0 \,.\, 10^{-11}$ aus Tabelle (4):

$$\delta = 2.10^{-17}\, \varrho_0 \left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^2 s$$

Für die Beschaffenheit der Teilchen wollen wir nun zwei Annahmen verfolgen:

1. Entsprechend der Arrhenius'schen Theorie des Strahlungsdrucks seien die Teilchen von der Größenordnung $\varrho_0 = 10^{-4}$ cm, das spezifische Gewicht sei 1. Der effektive Radius wird bei solchen Teilchen der Größenordnung nach gleich dem wirklichen und es sei hier einfach $\varrho = \varrho_0$ gesetzt. Wir sehen dabei darüber hinweg, daß derartige Teilchen wesentlich das Sonnenspektrum reflektieren müßten, statt ein Bandenspektrum zu geben, und für sie im Grunde nur der Bruchteil des Schweiflichtes, der aus reflektiertem Sonnenlicht besteht, in Rechnung gesetzt werden darf.

2. Wir sehen die einzelnen Teilchen als fluoreszierende Moleküle an, deren Radius ϱ_0 dann von der Größenordnung 10^{-8} cm ist. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß der effektive Radius eines solchen Moleküls ebenfalls von der Größenordnung seines wirklichen Radius ist[1]), wir wollen daher auch hier $\varrho = \varrho_0$ setzen und für das Molekulargewicht s den Betrag 20 nehmen.

Man erhält in beiden Fällen:

Hypothese I.

$E = 1500$ kg/sec $= 130000$ Tonnen/Tag
$\delta = 2 \,.\, 10^{-21}$

Hypothese II.

$E = 150$ gr/sec $= 13$ Tonnen/Tag
$\delta = 4 \,.\, 10^{-24}$

---

1) Dies gilt wenigstens, wenn die Fluoreszenz darauf beruht, daß einige wenige Elektronen im Molekül — nur durch Ausstrahlung gedämpft — mit Lichtfrequenzen um ihre Ruhelagen schwingen.

Die freie Weglänge der Moleküle wäre bei letzterer Dichte von der Größenordnung 10^{19} cm entsprechend der Distanz der nächsten Fixsterne, Zusammenstöße würden also nicht mehr vorkommen.

Setzt man die Erde einen Tag lang einem Strom der Dichte 10^{-22} von der Geschwindigkeit 100 km/sec aus — diese Zahlen müßten nach Herrn Curtis' Geschwindigkeiten und nach Hypothese I. beim Durchgang der Erde durch den Kometenschweif etwa gegolten haben — so trifft auf jeden Quadratzentimeter der Erde eine Masse von 10^{-10} gr, welche eine Energie von 1/10000 Grammkalorie mitbringt. Die gesamte von der Erde abgefangene Masse beträgt dann 250 Tonnen. Da diese Zahlen obere Grenzwerte bilden dürften, so sieht man, wie wenig materielle Einwirkung von dem Durchgang durch den Kometenschweif zu erwarten war.

Die Albedo der Wolken und der Erde.

(Messungen auf 6 Ballonfahrten).

Von

K. Stuchtey und A. Wegener.

Vorgelegt in der Sitzung vom 24. März 1911 durch Herrn Wiechert.

Mit vier Figuren im Text.

I. Beobachtungsmethode.

Vorbemerkung. Die im folgenden zu beschreibenden Versuche sind mit Unterstützung der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen bei Gelegenheit von Ballonfahrten des Kurhessischen Vereins für Luftschiffahrt zu Marburg ausgeführt worden. Die Kosten für die Beschaffung des dabei benutzten Instruments übernahm in dankenswertester Weise Herr Professor F. Richarz, so daß die von der genannten Gesellschaft zur Verfügung gestellte Summe von 500 M. ganz für die Bestreitung der Fahrtkosten verwendet werden konnte, welche von Seiten des Vereins mit Hinblick auf den wissenschaftlichen Zweck zum Teil noch besonders ermäßigt wurden.

Obwohl beabsichtigt wird, die Messungen fortzusetzen, erscheint doch der gegenwärtige, durch die Erschöpfung der Mittel gegebene Zeitpunkt auch sachlich aus mehreren Gründen zu einer ersten Zusammenfassung der Resultate geeignet; denn einmal reichen diese bereits aus, um die Brauchbarkeit des „Albedometers" zu beweisen, welches in den optisch-mechanischen Werkstätten von Schmidt und Haensch in Berlin für den vorliegenden Zweck nach den Angaben der Verfasser konstruiert worden ist, und zweitens dürften auch die vorläufigen Beobachtungsergebnisse bereits eine gewisse Beachtung verdienen, weil über diesen Gegenstand bisher erst außerordentlich wenig bekannt war.

Im Jahre 1906 wurde durch die Smithsonian Expedition[1]) auf dem Mount Wilson der erste — und soweit bekannt, bisher einzige — Versuch gemacht, die Albedo eines unterhalb des Berggipfels liegenden Wolkenmeeres exakt zu bestimmen. Man fand als Mittelwert eine Albedo von 0.65, und dies Resultat hat deswegen eine besondere Beachtung gefunden, weil man bis dahin erheblich höhere Werte, mit Hinblick auf die bekannte Albedo des offenbar ganz mit Wolken bedeckten Planeten Venus meist etwa 0.75, angenommen hatte. Leider scheint das darauf folgende Zirkular, das die beiden genannten Forscher sich nachträglich zu versenden genötigt sahen, wenigstens in Deutschland wenig beachtet worden zu sein[2]). Es wird darin auf einen Fehler in der Reduktion hingewiesen und das Resultat ausdrücklich zurückgenommen, ohne daß aber zunächst ein richtigeres gegeben wird; für ein solches wollte man erst noch mehr Beobachtungen sammeln. Da von einer Fortsetzung dieser Versuche bisher nichts bekannt geworden ist, besitzen wir also gegenwärtig tatsächlich keinerlei exakte Beobachtungswerte über diese für den Energiehaushalt der Erde so überaus wichtige Größe.

Bevor auf den Bau des von uns benutzten Albedometers eingegangen wird, soll das Verfahren von Abbot und Fowle ganz kurz besprochen werden.

Die Methode von Abbot und Fowle. Der Beobachtungsplatz auf dem Mount Wilson lag in dem Winkel an der Vereinigung zweier Täler, so daß die Instrumente nach 3 Seiten hin bis zu einem Depressionswinkel von 70° abwärts auf die Wolkenoberfläche gerichtet werden konnten. An dieser Stelle stand ein 50 Fuß hoher Turm, auf welchem das zur Messung dienende Bolometer Aufstellung fand. Man ging darauf aus, die absolute Albedo der Wolkenoberfläche durch direkte Vergleichung mit dem zugestrahlten Sonnenlicht zu bestimmen, wodurch ein ziemlich komplizierter Aufbau nötig wurde (vergl. Fig. 1). Wie die gestrichelte Linie in der Figur zeigt, gelangt das Licht von der Wolke zunächst zu dem ebenen Spiegel *a* und wird von diesem auf den ebenen Spiegel *b* reflektiert, welcher senkrecht unter dem ersteren liegt. Von hier gelangt es nach dem Konkavspiegel *c*

---

1) C. G. Abbot and F. E. Fowle, Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution, Volume II, Washington 1908, Part II, Chapter II (S. 136): The reflecting power of clouds.

2) Note on the reflecting power of clouds (Addenda to Annals of the Astrophysical Observatory, Smithsonian Institution, Vol. II), by C. G. Abbot and F. E. Fowle (datiert: 27. Mai 1908).

von 1 m Brennweite, welcher in Bezug auf ein Diaphragma *d* focussiert ist. Hinter dem letzteren sind 4 keilförmige Silberspiegel *f* angebracht (von denen in der Figur nur 2 angedeutet sind), die sämtliche durch das Diaphragma kommenden Strahlen mit Ausnahme der durch eine Glasplatte *g* absorbierten langwelligen Wärmestrahlen sammeln, so daß dieselben auf den am Ende befindlichen Bolometerstreifen *e* fallen. Der Zweck dieser Einrichtung war der, einmal eine genügende Strahlungsintensität zu

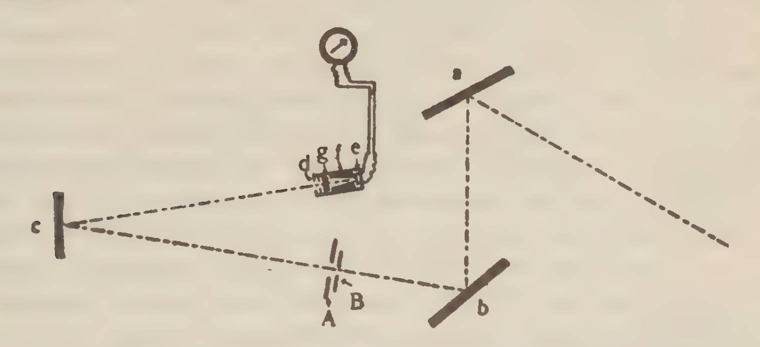


Fig. 1. Versuchsanordnung von Abbot und Fowle.

sammeln, dann aber auch einen solchen Raumwinkel aus dem Gesichtsfelde herauszuschneiden, der gerade gleich der Sonnenscheibe ist. Es sollte also auf das Bolometer abwechselnd das Sonnenbild und das Bild eines möglichst gleichen Ausschnittes der Wolke projiziert werden, um auf diese Weise die direkte mit der diffus reflektierten Strahlung zu vergleichen. Wegen des bedeutenden Unterschiedes, den diese beiden Werte auch der Größenordnung nach besitzen, war es mit besonderer Schwierigkeit verbunden, die Sonnenstrahlung in genau bekannter Weise soweit abzuschwächen, daß sie bei ungefähr gleicher Beanspruchung des Bolometers und Galvanometers mit der Strahlung der Wolke vergleichbar wurde. Zu diesem Zweck wurden die Blenden *A* und *B* in den Strahlengang eingeschaltet, deren Einrichtung wir hier übergehen.

Es liegt in der Natur der Aufgabe, daß absolute Bestimmungen dieser Art mit einer Reihe von schwierig zu bestimmenden Korrektionen und Reduktionen verbunden sind, welche leicht zu Irrtümern Anlaß geben können. Diese Schwierigkeiten haben sich auch, wie erwähnt, bei den Messungen von Abbot und Fowle herausgestellt, so daß eine einwandfreie Durcharbeitung dieser Methode gegenwärtig noch aussteht. Da sie indessen von den genannten Autoren in Aussicht gestellt wird, kann hier von einem weiteren

Eingehen und einer Kritik der Versuchsanordnung abgesehen werden.

Dagegen ist es für das folgende nicht ohne Interesse, den äußeren Verlauf dieser Experimente kennen zu lernen, weil sich aus ihm mancherlei praktische Fingerzeige ergeben. Nur an 2 Tagen, nämlich am 22. August und am 13. September 1906, waren Messungen möglich; am letztgenannten Termin gelangen nur wenige Einstellungen. Die Beobachtungen umfassen ein nicht unbeträchtliches Intervall von Sonnenhöhen; aber von dem Wolkenmeer wird hauptsächlich nur die Zone berücksichtigt, welche vom Horizont bis zu einem Depressionswinkel von 9° herabreicht, während nur sehr wenige Messungen mit größeren Depressionswinkeln bis zu dem oben genannten Maximum von 70° ausgeführt werden konnten. Dies ist besonders aus dem Grunde ein großer Übelstand, weil aus den Beobachtungen selbst hervorgeht, daß an der Wolkenoberfläche keineswegs eine ideal diffuse Reflexion herrscht. Namentlich bei tiefstehender Sonne wurde eine sehr markante Abhängigkeit der Wolkenalbedo vom Azimut gefunden. Je größer der benutzte Depressionswinkel, und andererseits je größer die Sonnenhöhe war, desto mehr verschwanden diese Unterschiede. Die hieraus entspringenden Reduktionen, die wahrscheinlich je nach der Natur der Wolkenoberfläche verschieden ausfallen, dürften unter allen Umständen eine große Schwierigkeit bei der Anwendung dieser Methode bilden.

Grundgedanken der neuen Methode. Da sich der Einfluß der störenden regelmäßigen Reflexion hauptsächlich bei kleinen Depressionswinkeln bemerkbar macht, so ist einleuchtend, daß eine Methode, bei der die Wolke senkrecht von oben betrachtet wird, der vorigen weit überlegen sein muß, da man hier praktisch von einer Reduktion der Beobachtungen auf ideal diffuse Reflexion gänzlich absehen kann. Wir werden also von vornherein darauf hingewiesen, daß derartige Messungen vom Ballon, nicht von einem Berggipfel aus anzustellen sind.

Bei den großen Schwierigkeiten, mit welchen absolute Messungen auch im Laboratorium gegenwärtig verbunden sind, ist die Ausführung derselben im Freien, wo weitere Schwierigkeiten hinzukommen, unseres Erachtens nicht zweckmäßig; hier dürfte eine relative Bestimmung, welche später durch Laboratoriumsversuche auf absolute Werte zurückzuführen ist, wegen ihrer größeren Bequemlichkeit nicht nur eine größere Ausbeute gewährleisten, sondern auch genauere Resultate liefern. Wenn nun gar die ungünstigen Beobachtungsverhältnisse im Ballonkorbe in Be-

tracht gezogen werden, so ist von vornherein einleuchtend, daß nur eine solche Methode zum Ziele führen kann, die mit einem Minimum von instrumentellem Aufwand und von anzuwendender Zeit die Messung auszuführen gestattet. Das im folgenden zu beschreibende Albedometer dürfte diesen Anforderungen genügen.

Das Albedometer. Das Prinzip des für die relative Albedomessung benutzten Ballon-Instruments besteht darin, daß man die horizontal angenommene Wolkenoberfläche mit einer gleichfalls horizontal liegenden Gipsplatte vergleicht. Da beide von den Sonnenstrahlen unter demselben Winkel getroffen werden, also dieselben Lichtmengen erhalten, so gibt das Verhältnis ihrer Helligkeiten unmittelbar das Verhältnis ihrer Albedo an. Wird also diejenige des Gips als bekannt und konstant angenommen, was für die vorliegenden Zwecke durchaus zulässig erscheint, so ist damit auch die Wolkenalbedo bekannt.

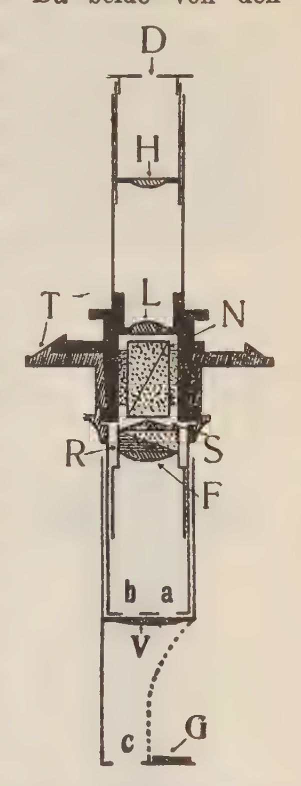


Fig. 2. Das Martenssche Polarisationsphotometer, montiert als Albedometer für Ballonbeobachtungen.

Die Vergleichung der beiden Flächen geschieht in der Weise, daß man das von der helleren von beiden ausgehende Licht in der üblichen Weise mit Hilfe von Polarisationsvorrichtungen soweit abschwächt, bis Gleichheit der Helligkeit erreicht ist, wobei der leicht bestimmbare Grad der Abschwächung ein Maß für das Helligkeitsverhältnis gibt.

Ein sehr glücklicher Umstand war es, daß die Hauptteile dieses Instruments ungeändert von einer anderen Konstruktion übernommen werden konnten, nämlich von dem Polarisationsphotometer von Martens[1]). Figur 2 zeigt einen Querschnitt des Instruments. Die beiden miteinander zu vergleichenden Lichtbündel treten durch zwei Öffnungen *a* und *b* in das Photometer ein und durchlaufen der Reihe nach eine Objektivlinse *F*, ein doppelbrechendes Kalkspathprisma nach Wollaston *R*, ein Zwillingsprisma *S*, ein Analysatornicol *N* und die beiden Linsen *L* und *H* eines Ramsdenschen Okulars. Das letztere ist auf die Trennungslinie der beiden Hälften des Zwillingsprismas eingestellt. Das oberhalb *D* befindliche Auge sieht dann die

1) Über ein neues Polarisationsphotometer, Phys. Zeitschr. 1, 299, 1900.

beiden Hälften des Gesichtsfeldes beleuchtet von den Lichtstrahlen, die durch die beiden Öffnungen *a* und *b* eingetreten sind, und zwar sind diese beiden Lichtbündel in zwei zu einander senkrechten Richtungen polarisiert. Durch Drehen des Analysatornicols *N* kann der Beobachter die Helligkeit des einen Feldes schwächen, während die des anderen wächst, und kann auf diese Weise auf gleiche Helligkeit einstellen. Die Drehung wird an dem Teilkreise *T* abgelesen.

Die bisher besprochenen Teile wurden unverändert vom Martensschen Polarisationsphotometer übernommen. Für den vorliegenden Zweck wurde nun unterhalb der Öffnungen *a* und *b* an einer Verlängerung des Rohres die zum Vergleich dienende Gipsplatte *G* angebracht, während durch eine Öffnung *c* dafür gesorgt wurde, daß das von der Wolke kommende Licht nach *b* gelangen konnte. Zwischen *c* und *G* einerseits und *b* und *a* andererseits mußte dann noch eine neue Objektivlinse *V* eingeschaltet werden.



Fig. 3. Albedometer für Ballonbeobachtungen; Länge 20 cm.[1])

Der Ausschnitt des Röhrenansatzes, der dem Sonnenlicht Zutritt zur Gipsplatte gewährt (vergl. Fig. 3), wurde so groß gewählt, daß auch bei Sonnenhöhen von 60° noch kein Schatten von den oberen Teilen des Instruments auf die Gipsplatte fallen konnte. Größere Sonnenhöhen kommen bekanntlich bei Ballonfahrten nicht in Betracht, da dann die Sonne durch den Ballonkörper verdeckt wird.

Das Instrument ist für den freihändigen Gebrauch bestimmt und wird nach Augenmaß vertikal nach unten gerichtet. Über die hieraus entspringende Ungenauigkeit werden weiter unten zahlenmäßige Angaben gemacht werden.

Die Einstellung auf gleiche Helligkeit kann in jedem der 4 Quadranten erfolgen. Hat das Objekt dieselbe Albedo wie die Gipsplatte, so erhält man gleiche Helligkeit bei den 4 Einstellungen auf 45°, 135°, 225°, 315°. Bezeichnen wir die Ablesungen mit $a_1 \ldots a_4$, so werden die zugehörigen Winkel des ersten Quadranten:

1) Das Instrument ist zum Preise von 150 Mark bei den Optisch-Mechanischen Werkstätten von Schmidt und Haensch, Berlin, erhältlich.

$$\alpha_1 = a_1$$
$$\alpha_2 = 180 - a_2$$
$$\alpha_3 = a_3 - 180$$
$$\alpha_4 = 360 - a_4.$$

Die Berechnung gestaltet sich dann außerordentlich einfach. Wenn wir nämlich, was weiter unten begründet werden soll, die Albedo der Gipsplatte gleich 1,00 setzen, so ist die der Wolken gegeben durch

$$A = tg^2 \alpha.$$

Einfluß des freihändigen Gebrauchs. Durch den freihändigen Gebrauch wird natürlich die Genauigkeit der einzelnen Einstellungen nicht unerheblich vermindert gegenüber einer festen, womöglich mit Hilfe einer Libelle justierten Aufstellung. Die folgenden 40 freihändigen Einstellungen auf eine horizontale, der Sonne exponierte Gipsplatte geben ein Bild davon:

α_1	Abweichung vom Mittel	α_2	Abweichung vom Mittel	α_3	Abweichung vom Mittel	α_4	Abweichung vom Mittel
45.0	0.1	45.0	0.2	45.3	0.4	45.0	0.2
45.6	0.5	45.9	0.7	45.3	0.4	45.6	0.4
45.1	0.0	45.8	0.6	45.0	0.1	45.5	0.3
45.0	0.1	45.8	0.6	44.7	0.2	45.4	0.2
44.8	0.3	44.9	0.3	44.9	0.0	45.2	0.0
44.6	0.5	44.7	0.5	44.9	0.0	44.5	0.7
46.0	0.9	45.0	0.2	44.9	0.0	45.3	0.1
45.5	0.4	45.0	0.2	45.0	0.1	45.5	0.3
44.6	0.5	45.0	0.2	44.8	0.1	44.9	0.3
45.0	0.1	45.1	0.1	44.5	0.4	45.0	0.2
Mittel: 45.1	0.3	45.2	0.4	44.9	0.2	45.2	0.3

Namentlich wenn man diese Zahlen mit den im folgenden gegebenen Werten für die feste Aufstellung vergleicht, wie sie zur Ermittelung des Indexfehlers benutzt wurde, so ist die Verschlechterung in den Einzelbestimmungen deutlich erkennbar. Allein man sieht doch, daß der Fehler gegenüber der Veränderlichkeit der Wolken selber nicht in Betracht kommt, zumal wenn man der Diskussion immer nur Mittelwerte aus einer größeren Zahl von Einzelmessungen zu Grunde legt.

Indexfehler. Die instrumentellen Korrektionen, welche auf unzureichende Justierung der Nicols, des Zwillingsprismas und des Kreis-Index zurückzuführen sind, wurden als Indexfehler zusammengefaßt. Ihre Bestimmung geschah dadurch, daß die Albedo einer größeren gegossenen Gipsplatte gemessen wurde; und zwar wurden diese Bestimmungen am geöffneten Fenster vorgenommen, so daß neben der reinen Sonnenstrahlung dieselben Ausschnitte des Himmelsgewölbes mit ihrer diffusen Strahlung zur Beleuchtung der größeren Gipsplatte und der Vergleichsplatte im Albedometer beitragen konnten (über die Himmelsstrahlung vgl. pg. 10). Die (sehr geringe) Abweichung von der Einheit, die sich dabei ergab, wurde als Instrumentalfehler betrachtet, und sämtliche Messungen hiernach korrigiert. Der Betrag dieser Korrektion ist übrigens im Vergleich zu der sonstigen Unsicherheit der Resultate gänzlich ohne Belang.

Bei diesen Bestimmungen wurde das Instrument nicht freihändig gehalten, sondern an einem Stativ angeschraubt und möglichst genau vertikal nach unten gerichtet. Um die Schwankungen der einzelnen Ablesungen zu zeigen, geben wir die erste Messungsreihe in extenso wieder:

	α_1	α_2	α_3	α_4	Bemerkungen
	44.6	45.0	44.4	45.0	Sonnenhöhe kleiner als 38°
	44.3	45.0	44.4	45.0	
	44.5	44.9	44.4	45.1	
	44.4	45.0	44.4	45.1	
	44.4	44.9	44.3	45.1	
	44.6	44.9	44.4	45.1	
	44.6	45.0	44.4	45.0	
	44.5	44.9	44.5	45.1	
	44.5	45.0	44.4	45.1	
	44.4	45.0	44.4	45.0	
Mittl. Korrektion:	+ 0.52	+ 0.04	+ 0.60	— 0.06	
Zahl der Beob.:	10	10	10	10	

Für 6 weitere Reihen seien hier nur die resultierenden Korrektionen mitgeteilt:

	α_1	α_2	α_3	α_4	Bemerkungen
II.	+ 0.53	+ 0.01	+ 0.53	— 0.07	Sonnenhöhe zuerst 39°,
Zahl d. Beob.	10	10	10	10	dann 37°
III.	+ 0.58	+ 0.02	+ 0.55	+ 0.03	Sonnenhöhe wachsend
Zahl d. Beob.	5	5	4	4	von 37 1/2 auf 41°
IV.	+ 0.50	— 0.03	+ 0.67	— 0.03	Sonnenhöhe ca. 32°
Zahl d. Beob.	6	6	6	6	
V.	+ 0.52	0.00	+ 0.52	— 0.13	
Zahl d. Beob.	5	5	5	4	
VI.	+ 0.49	— 0.03	+ 0.42	— 0.03	Sonnenhöhe 32°
Zahl d. Beob.	7	7	7	7	
VII.	+ 0.55	— 0.10	+ 0.55	— 0.20	Sonnenhöhe 40 2/3°
Zahl d. Beob.	2	2	2	2	

Bei einzelnen unter diesen Einstellungen wurde nicht eine gegossene Platte aus Gips benutzt, sondern Gipspulver, das durch Andrücken einer Glasplatte geebnet war. Es zeigte sich kein Unterschied zwischen diesen beiden Anordnungen. Auch an Stelle der Gipsplatte im Instrument wurde mehrmals geglättetes Gipspulver verwendet, gleichfalls ohne Einwirkung auf das Resultat.

Bei der Vereinigung zu einem definitiven Mittel erscheint es ratsam, den verschiedenen Beobachtungsreihen, obwohl sie aus ungleich zahlreichen Einzelablesungen bestehen, doch das gleiche Gewicht zu geben, weil die Abweichungen, welche die einzelnen Ablesungen bei ein und derselben Aufstellung zeigen, geringer sind als diejenigen, welche bei einer neuen Aufstellung unter geänderten Verhältnissen auftreten. Man erhält auf diese Weise die folgenden definitiven Werte für die Korrektion:

	α_1	α_2	α_3	α_4
Korr.	+0.53	−0.01	+0.55	−0.07

Da die Ablesungsgenauigkeit nur $^1/_{10}{}^0$ beträgt, so wurden an den Beobachtungen die Korrektionen

$$+0.5 \qquad 0.0 \qquad +0.6 \qquad -0.1$$

angebracht.

Diese Korrektionen sind gültig für die Fahrten des Jahres 1910. Anfang Februar 1911 wurde jedoch das Instrument auseinandergenommen und neu justiert, worauf in derselben Weise wie früher die folgenden Ablesungen für die Albedo einer Gipsplatte erhalten wurden:

	α_1	α_2	α_3	α_4
	45.0	44.9	45.0	45.2
	45.0	45.1	45.0	45.2
	45.0	45.1	44.9	45.2
	45.0	45.0	44.9	45.1
	45.0	44.9	44.9	45.0
	44.9	44.9	45.0	45.2
	45.1	45.0	45.0	45.2
	45.1	45.0	45.0	45.1
	45.0	45.0	45.1	45.2
	44.9	45.1	45.0	45.2
Mittlere Korrektion:	0.00	0.00	+ 0.02	— 0.16

An den Beobachtungen des Jahres 1911 wurden daher die Korrektionen angebracht:

0.0 0.0 0.0 – 0.2.

Berücksichtigung der diffusen Strahlung des Himmels. Da für die Gipsplatte im Instrument notwendigerweise ein erheblicher Teil des Firmaments verdeckt ist, während die Wolkenoberfläche außer der direkten Sonnenstrahlung auch noch die Himmelsstrahlung ganz uneingeschränkt erhält, so müssen die gemessenen Werte der Wolkenalbedo etwas zu groß ausfallen.

Um den Betrag zu ermitteln, wurde die Albedo einer großen horizontalen Gipsplatte (aus demselben Material wie diejenige im Instrument) in der Weise gemessen, daß der Beobachter, auf einer Leiter stehend, sich hinreichend hoch über dem Objekt befand, um für dasselbe die Himmelsstrahlung nicht mehr wesentlich zu beeinträchtigen. Das Albedometer befand sich dabei ca. 2 m über der Gipsplatte. Die Beobachtung fand statt auf einem auf der Höhe des Marburger Schloßberges gelegenen Turm, von dem aus der Horizont nach allen Seiten hin frei war. Man erhielt folgende Werte:

α_1	α_2	α_3	α_4
46.1	45.1	45.9	46.0
45.7	45.7	45.8	46.0
45.6	45.7	45.8	46.0
46.0	46.2	45.8	45.9
46.0	45.7	45.8	46.0
45.5	45.5	45.6	45.8

Als Mittel ergibt sich 45.8, was einer Albedo von 1.08 entspricht. Da die große Platte tatsächlich die gleiche Albedo (1.00) besitzt, wie diejenige im Instrument, so sind die 7 % Defizit gleich demjenigen Teil der Himmelsstrahlung zu setzen, welcher für das Instrument verloren geht. Eine etwa noch immer übrig bleibende geringe Schwächung der Himmelsstrahlung für die große Gipsplatte dürfte durch den Umstand mehr als aufgewogen sein, daß der Himmel — wie ja für Beobachtungen am Erdboden fast stets bei gutem Wetter — ziemlich weißlich war, also stärker strahlte als in denjenigen Höhen, wo die Ballonbeobachtungen ausgeführt wurden. Der angegebene Wert dürfte deshalb eher zu groß als zu klein sein.

Wir hätten also hiernach von allen Albedomessungen an Objekten, welche der Strahlung des ganzen Firmaments ausgesetzt sind, etwa 7 % (des Wertes) abzuziehen.

Die genannte Art der Bestimmung dieser einzigen wirklich in Frage kommenden Reduktionsgröße dürfte nicht nur die einfachste, sondern auch die zuverlässigste sein. Doch kann man dieselbe auf Umwegen auch in anderer Weise ableiten, wobei man auf Werte kommt, die mit dem angegebenen hinreichend übereinstimmen.

Über das Verhältnis der Himmelsstrahlung zur Sonnenstrahlung haben nämlich Abbot und Fowle Versuche angestellt, welche ergeben, daß die Strahlung des Himmels auf eine horizontale Fläche etwa 5 % desjenigen Betrages ausmacht, der durch direkte Sonnenstrahlung bei normaler Inzidenz an der Grenze der Atmosphäre erhalten würde. Nehmen wir für unsere Beobachtungen eine mittlere Sonnenhöhe von 34° an, so müssen wir die 5 % mit 1.8 multiplizieren, so daß die Strahlung des Himmels 9 % der schrägen Sonnenstrahlung ausmacht. Berücksichtigen wir noch, daß nur etwa die Hälfte der außerirdischen Sonnenstrahlung am Grunde der Atmosphäre übrig ist, so wird dieselbe Himmelsstrahlung hiervon 18 % ausmachen. Etwa $^1/_3$ (6 %) hiervon dürfte nach der Konstruktion des Instruments abgeblendet sein, was mit der früheren Angabe recht gut harmoniert.

Auch eine andere, auf einer Ballonfahrt gemachte Beobachtung stimmt hiermit. Nachdem die Albedo einer Wolkendecke in gewöhnlicher Weise (im Mittel aus 8 Beobachtungen) zu 0.7 gefunden war, wurde dieselbe Wolkendecke nochmals gemessen, während der Beobachter mit dem Instrument auf der Schattenseite des Korbes stand und dasselbe also nur der diffusen Himmelsstrahlung exponierte. Als Mittel aus 4 Einstellungen ergab sich ein Wert, der einer Albedo von 6.0 entsprechen würde. Unter der Voraussetzung, daß die Wolkenoberfläche bei beiden Beobachtungen die

gleiche Helligkeit zeigte, folgt hieraus, daß die von der Sonne und dem betreffenden Teil des Firmaments beleuchtete Gipsplatte $\frac{6.0}{0.7} = 8.5$ mal so hell war wie die nur von demselben Teil des Firmaments beleuchtete, oder daß die nur von der Sonne beleuchtete Gipsplatte $8.5 - 1 = 7.5$ mal so hell gewesen wäre. Die Strahlung des betreffenden Teiles des Himmelsgewölbes würde also nur 13 % der eigentlichen Sonnenstrahlung ausmachen. Da dieser Ausschnitt nach der Bauart des Instrumentes ca. $^2/_3$ der gesamten Halbkugel ausmacht, wäre die ganze Himmelsstrahlung ca. $19\,^1/_2$ % der Sonnenstrahlung gegen 18 % oben.

Man sieht, daß man auch durch diese Rechnungen, die freilich unsicherer Natur sind, zu ähnlichen Ergebnissen kommt. — Für die Reduktion der Beobachtungen wurde der Wert von 7 % benutzt, doch sind in den unten folgenden Tabellen zunächst die unreduzierten Werte gegeben, während die Reduktion erst bei der Diskussion Verwendung findet.

Die absolute Albedo der Vergleichsplatte. Für die Auswahl des als Vergleichsplatte zu benutzenden Materials war in erster Linie der Gesichtspunkt maßgebend, daß dasselbe jederzeit und allerorts in hinreichend gleicher Qualität zu erhalten sein mußte, wenn die Versuche einen allgemeineren Wert haben sollten. Ferner durfte es nicht gefärbt sein, sondern grau, d. h. es mußte alle Wellenlängen gleich stark reflektieren. Es erschien hiernach besonders vorteilhaft, den überall erhältlichen und auch sonst zu Photometerschirmen benutzten Alabastergips zu verwenden.

Die Herstellung der Platten geschah in der Weise, daß der mit Wasser angerührte Gips zunächst auf eine Spiegelglasscheibe gegossen wurde, von der er sich nach einigen Stunden abheben ließ. Nach völligem Trocknen wurde dann die so erhaltene ebene Fläche, die zunächst noch stark spiegelte, so lange mit einem Stück Filz leicht gerieben, bis selbst bei sehr schräg auffallendem Sonnenlicht nur noch diffuse Reflexion wahrgenommen werden konnte.

Die absolute Albedo des Gipses wurde aus den bisher vorliegenden absoluten Messungen, namentlich denjenigen von Wilsing und Scheiner, als bekannt vorausgesetzt. Bei der subtilen Natur dieser Untersuchungen hätte eine Neubestimmung nur dann zu einem zuverlässigeren Resultat führen können, wenn zugleich die Methode vervollkommnet worden wäre. Diese Aufgabe aber würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit erheblich überschreiten und eine selbständige Behandlung erfordern.

Es sei vorweggenommen, daß nach den genannten Bestimmungen die Albedo des Gipses ohne jeden merkbaren Fehler gleich der Einheit gesetzt werden kann. Sollte einmal später eine genauere Bestimmung möglich werden, so werden sich unsere relativen Messungen ohne Schwierigkeit auf den verbesserten Ausgangswert reduzieren lassen, so daß ihr Wert durch einen etwaigen Fehler desselben nicht beeinträchtigt wird.

Es dürfte jedoch nicht überflüssig sein, die vorhandenen absoluten Messungen hier kurz zu besprechen.

Das Verfahren von Wilsing und Scheiner beruht auf einer im Prinzip schon von Lambert benutzten Versuchsanordnung, die durch Zöllner verbessert wurde. In seinen „Photometrischen Untersuchungen"[1]) weist dieser darauf hin, daß die Lambertsche Anordnung, die in Fig. 4 dargestellt ist, zu systematischen Fehlern führt.

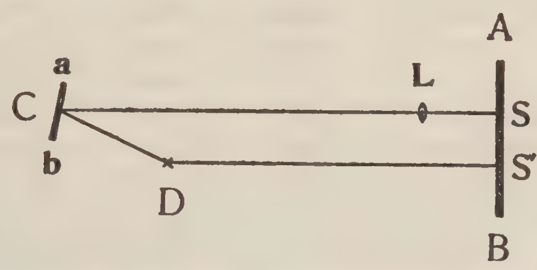


Fig. 4. Die Lambertsche Anordnung zur absoluten Messung der Albedo.

Der zu untersuchende Schirm *ab* wird von der Kerze *D* fast normal beleuchtet. Man vergleicht die Helligkeit des durch die Linse *L* auf dem großen Schirm *AB* entworfenen Bildes *S* mit der durch die direkte Bestrahlung bei *S'* erzeugten Helligkeit und variiert die Entfernungen so, daß *S* und *S'* gleich hell erscheinen. Dann ist die Albedo des Schirmes *ab* gegeben durch die Gleichung

$$A = \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{d\varDelta}{d'\varDelta'}\right]^2,$$

wo $\frac{1}{\varkappa}$ der Absorptionskoeffizient der Linse L, $\varDelta = CD$, $\varDelta' = DS'$, $d = LS$ und d' der Halbmesser der Linsenappertur ist.

Daraus nun, daß auch von der Kerze *D* ein Bild auf dem großen Schirm entsteht, das zu Kontrastwirkungen Anlaß gibt,

1) Leipzig 1865.

entspringt ein großer systematischer Fehler, den Zöllner durch Anbringung einer Zwischenwand ausschaltete. Er fand so die Albedo des weißen Papieres mit 10% Unsicherheit zu 0.70, woraus er dann durch relative Messungen noch folgende weitere Werte erhielt:

Frisch gefallener Schnee	0.78	Quarz-Porphyr	0.11
Weißer Sandstein	0.24	Feuchte Ackererde	0.08
Tonmergel	0.16	Dunkelgrauer Syenit	0.08.

Diese Zöllnerschen Werte sind nach den folgenden Beobachtungen noch etwas zu klein. Wie schon erwähnt, haben Wilsing und Scheiner die Methode in ihren „Vergleichenden spektralphotometrischen Beobachtungen am Monde und an Gesteinen nebst Albedobestimmungen an letzteren“ [1]) instrumentell weiter ausgebaut. Sie ermittelten die absolute Albedo für die folgenden 4 Objekte:

	Wilsing	Scheiner	Mittel
Kreide	1.09	1.07	1.08
Gips	1.09	1.14	1.12
Aluminiumoxyd	1.30	1.22	1.26
Weißes Schreibpapier	0.85	0.91	0.88.

Nun kann nach der Definition der Albedo ihr Wert die Einheit nicht überschreiten. Die Messungen an den ersten 3 Objekten zeigen also, daß nicht lediglich diffus reflektiertes Licht vorhanden war, sondern auch noch gespiegeltes, was übrigens auch mit dem Polariskop bestätigt werden konnte. Wilsing und Scheiner nehmen infolgedessen die wahre Albedo der Kreide zu 1.00 an und benutzen diesen Wert als Ausgang für eine größere Reihe relativer Messungen, von denen einige noch weiter unten angeführt werden sollen.

Eine ganz andere Methode der absoluten Bestimmung hat Sumpner in seiner Abhandlung „The diffusion of light“ [2]) gegeben. Er benutzt ein Lummer-Brodhunsches Photometer in Verbindung mit einer Photomerbank. Dabei stellt er einen kreisförmigen Schirm aus der zu untersuchenden Substanz senkrecht zur Bankaxe auf und gibt ihm durch eine seitlich angebrachte Normallampe eine konstante Beleuchtung E. Macht man dann,

---

1) Publikationen des Astrophys. Observ. zu Potsdam, Potsdam 1909.

2) Phil. Mag. Ser. V, Vol. 35, No. 213, Februar 1893. — Eine Zusammenstellung der verschiedenen Methoden findet man in E. Liebenthal, Praktische Photometrie, Braunschweig 1907.

ohne das Photometer zu verstellen, durch Verschiebung der Vergleichslampe die photometrische Einstellung, so ist die Albedo

$$A = \frac{I}{r_1^2} \cdot \frac{\pi r_2^2}{SE}$$

wobei r_2 und r_1 die beiden Abstände, I die Intensität der Vergleichslampe in Hefnerkerzen und S die Oberfläche des zu untersuchenden Kreises ist. Sumpner findet auf diese Weise die folgenden Werte der Albedo:

Thick white blotting-paper (weißes Löschpapier)	0.82
White (rough) cartridge-paper (rauher weißer Karton)[1]	0.80
Tracing-cloth (Pausleinen)	0.35
Tracing-paper (Pauspapier)	0.22
Black cloth (schwarzes Tuch)	0.012
Black velvet (schwarzer Sammt)	0.004.

Zieht man alle diese Messungen in Betracht, so kommt man zu dem Schluß, daß bei der bisher anscheinend unvermeidlichen Ungenauigkeit der absoluten Meßmethoden kein in Betracht kommender Fehler begangen wird, wenn die Albedo des Gipses = 1.00 gesetzt wird. Wie schon oben erwähnt, wird es ein Leichtes sein, die relativen Messungen, welche im folgenden zu besprechen sind, zu korrigieren, wenn sich eine Änderung dieses Ausgangswertes als notwendig herausstellen sollte.

Kontrollmessungen. Obwohl das vorangehende bereits genügen dürfte, um ein hinreichendes Urteil über die Zuverlässigkeit des Albedometers zu ermöglichen, wurde doch noch weiterhin der Versuch gemacht, durch Messungen an denselben Objekten, die von früheren Beobachtern benutzt wurden, eine Kontrolle zu gewinnen. Leider sind nur sehr selten Stoffe verwendet worden, deren Albedo als genügend konstant betrachtet werden kann. Namentlich die Messungen von Sumpner sind dadurch charakterisiert, daß die von ihm benutzten Materialien sämtlich einer genauen Definition entbehren. Infolgedessen können die im folgenden gegebenen Vergleiche nur eine sehr rohe Kontrolle geben

---

1) Bei Liebenthal heißt es merkwürdigerweise „weiße Wand“.

Objekt	Albedometer		Frühere Messungen
Schwarzer Sammt	0.0074		0.004 (Sumpner)
Schwarzes Tuch	0.020		0.012 „
Weißes Löschpapier	0.804		0.82 „
Weißes Schreibpapier	0.901		0.88 Wilsing u. Scheiner
Gips	1.000		1.12 „ „
Schlemmkreide[1]	0.994		1.08 „ „
Aluminiumoxyd[1]	1.005		1.26 „ „
	Wegener	Stuchtey	
Bimsstein	0.33	0.49	0.56 „ „
Körniger Kalk	0.42	0.40	0.42 „ „
Sandstein	0.45	0.40	0.38 „ „
Granit	0.28	0.29	0.36 „ „
Gips	0.53	0.49	0.34 „ „
Ton	0.42	0.45	0.24 „ „
Glimmerschiefer	0.23	0.20	0.23 „ „
Kalkstein	0.26	0.26	0.12 „ „
Trachytlava	0.31	0.41	0.10 „ „
Diabas	0.10	0.07	0.09 „ „
Heklalava	0.08	0.08	0.08 „ „
Tonschiefer	0.10	0.09	0.07 „ „
Basalt	0.07	0.09	0.06 „ „
Vesuvlava	0.13	0.16	0.05 „ „
Aetnalava	0.13	0.14	0.05 „ „
Braunkohle	0.08	0.11	0.05 „ „

Wenn man bei den Messungen an den Gesteinen berücksichtigt, wie groß bereits die Unterschiede sind, welche an demselben Handstück von den beiden Verfassern erhalten wurden, so kann die Übereinstimmung mit den früheren Messungen durchaus als befriedigend gelten.

II. Beobachtungsergebnisse.

Verlauf der Fahrten.

1) 7. Juni 1910. Dr. A. Wegener (Führer), Professor Rieländer, Referendar Schäfer, Herr Engel. Abfahrt 8^{15} Marburg. Höhen anfangs 5—600, später mehr, Maximalhöhe 1700.

1) Pulver, durch Glasplatte geglättet.

Landung wegen Gewitters $11^{a}43$ im Kreise Wipperfürth. — Bewölkung anfangs 1^{0} ci, in der untersten Schicht starker Dunst, Oberfläche bei 1500 m. Von 10^{a} ab bilden sich hier kleine Cumuluswolken, auch einige Altocumuli (2^{0}) treten auf. Um $10\,{}^{1}/_{2}$ haben sich rechts und links vom Ballon bereits große Cumuli gebildet, von denen einzelne Türme bis zum oberen Wolkenniveau hinaufreichen und mit den Altocumuli verschmelzen. Um $11^{a}16$ wird aus der nördlichen Wolkenbank, die jetzt dies Niveau durchbrochen hat, starker Donner gehört, der sich in immer kürzeren Intervallen wiederholt. Das Gewitter breitet sich immer mehr aus und nähert sich dem Ballon, so daß gelandet werden muß. Den ganzen Tag über herrschte fast ununterbrochen schweres Gewitter. — Während der ganzen Fahrt befanden sich niemals Wolken unter dem Ballon, so daß nur Messungen nach der Erde ausgeführt werden konnten, und zwar aus Höhen zwischen 600 und 1650 m. Die Sonnenstrahlung war hierbei noch gänzlich ungehindert, so daß die Messungen einwandfrei sein dürften.

2) 30. Juli 1910. Oberleutnant Sander (Führer), Dr. Stuchtey, Dr Hellinger, Dr. Salis. Abfahrt $7^{a}40$ Marburg. Wegen Regens mußte eine Zwischenlandung vorgenommen werden, bei der die beiden letztgenannten Mitfahrer ausgesetzt, und Sandballast dafür eingenommen wurde. Der Ballon stieg dann sogleich bis zu einer Schichtgrenze bei 3100 m und blieb bis kurz vor der Landung in dieser Gleichgewichtslage, die sich aber allmählich bis auf 3600 m hob. Landung $4^{p}35$ am Deister. — Bewölkung anfangs 10^{2} Nebel, später in Fractostratus aufgelöst und ganz verschwindend; darüber eine geschlossene Wolkendecke, Oberfläche 1400 m, zum Teil (Regen) mit der nächst höheren Etage zusammenhängend. Nach der Zwischenlandung klarte es in allen Höhen auf; die Gleichgewichtslage des Ballons bei 3100 bezw. 3600 m fiel mit der oberen Grenze einer Dunstschicht zusammen. Es stellte sich jetzt die normale Cumulusbildung, vom 1600 m-Niveau ausgehend, ein. Gegen Mittag durchbrachen diese Cumuli gelegentlich die Dunstgrenze und wuchsen dann schnell bis ca. 4000 m an. Zweimal geriet der Ballon in einen solchen Cumuluskopf hinein. — Messungen konnten nach der Zwischenlandung an den unter dem Ballon befindlichen Cumuli gemacht werden. Bei einigen befand sich die gemessene Wolkenpartie bereits dicht unter dem Ballon und war im Begriff, ihn einzuhüllen, bei anderen lag die Wolke kilometerweit unter demselben. Da obere Wolken nicht vorhanden waren, sind die Messungen als einwandfrei zu betrachten.

3) 11. September 1910. Dr. A. Wegener (Führer), Dr. Stuchtey, Oberlehrer Kraus, Fabrikant Schäfer. Abfahrt $8^a 38$ Marburg. Höhen anfangs 7—800, später steigend bis 1500 m. Landung $7^p 10$ bei Wasserbillig (Luxemburg). — Anfangs Bewölkung 10^1 Stratus, Oberfläche bei 500 m (prächtiges Wolkenmeer). Unmittelbar über der Nebeloberfläche herrschte starker Dunst, darüber war der Himmel aber ganz wolkenlos. Die anfangs 200 m dicke Nebelschicht wurde bald dünner und brach um $10\,^1/_2{}^a$ auf, um nach kurzer Zeit ($11\,^1/_4{}^a$) ganz zu verschwinden. Später lagen nördlich von uns große Cumulusmassen, auch im Süden zahlreiche kleinere, der Ballon befand sich aber während der ganzen Fahrt in einer ausgedehnten Wolkenlücke, und der Himmel über ihm blieb dauernd klar. Gegen 3^p wurden in einem auf 2500 m geschätzten Niveau einige kleine Altocumuli beobachtet, welche auf ganz kurze Zeit einen Schatten auf den Ballon warfen, aber bald wieder verschwanden. — Es gelangen eine Reihe von Albedomessungen an der anfänglichen, geschlossenen Stratusdecke, welche bei der ungehinderten Sonnenstrahlung ganz einwandfrei sind. Nach dem gänzlichen Verschwinden dieser Wolken wurde sodann eine Reihe von Messungen gegen die Erdoberfläche ausgeführt, welche gleichfalls einwandfrei sind.

4) 12. Dezember 1910. Dr. A. Wegener (Führer), Dr. Stuchtey, Fabrikant Schäfer. Abfahrt $10^a 42$ Griesheim. Wegen Orientierung Höhen anfangs 3—600 m, um $12^p 45$ (mittags) wird mit dem Hochaufstieg begonnen. Stufenweiser Aufstieg bis zur Maximalhöhe von 5400 m ($2\,^1/_2{}^p$). Von 4000 m ab wurde dabei die Sauerstoffatmung benutzt. Nach Überfliegung des Harzes in geringer Höhe Landung bei Dardesheim, Kreis Halberstadt. — Anfangs bisweilen schwacher Regen, Bewölkung 10^{1-2}; beim Hochaufstieg wird die Wolkenoberfläche bei 1000 m passiert, während sie beim Abstieg (über dem Südrande des Harzes) bei 1500 lag. Die Oberfläche war nicht eben, sondern neigte zur Ausbildung von Cumulusköpfen, wies auch oft Lücken auf, durch welche Teile der Erde sichtbar wurden. Außer einigen ganz geringfügigen Wolkenfetzen, welche an der Oberfläche einer Dunstschicht bei 2500 m schwammen, war der Himmel über dem Wolkenmeer vollkommen klar und tiefblau, die Sonnenstrahlung also gänzlich unbehindert. Es gelang auch, die außerordentlich prachtvollen Formen des Wolkenmeeres in einer Reihe photographischer Aufnahmen festzuhalten. Auffällig war der Unterschied zwischen zwei Formen, nämlich einmal der aus zahllosen aneinander gereihten Cumulusköpfen bestehenden eigentlichen Oberfläche des Wolkenmeeres und anderer-

seits einem dicht darüber liegenden dünnen Stratusschleier, dessen Oberfläche vollkommen glatt war. Offenbar gehörten diese Schleierwolken bereits der oberen Schicht an und bildeten sich immer an denjenigen Stellen aus, wo eine größere Partie des Wolkenmeeres relativ gehoben war; sie dürften also den bekannten Kappen entsprechen, welche sich über aufquellenden Cumulusköpfen bilden. Beim Abstieg erwies sich die Wolkenschicht als 700 m dick (zwischen 1500 und 800 m Höhe), doch fiel unter ihr kein Niederschlag, was wohl auch für die ganze übrige Fahrt gilt. Bei der Überfliegung des Harzes konnte festgestellt werden, daß die große Mächtigkeit der Wolken daher rührte, daß hier auch noch ein unteres Niveau an der Kondensation Teil nahm, welches sich nach Überschreiten des Harzes sogleich wieder auflöste. Es darf deshalb wohl angenommen werden, daß zur Zeit der Messungen, als sich der Ballon noch erheblich südlich vom Harz befand, das untere Niveau gleichfalls gefehlt hat, so daß hier auch die Mächtigkeit wohl nur zeitweise 500 m überschritten haben dürfte. — Es gelang eine Reihe von Messungen der Wolkenalbedo aus Höhen von 1400, 2500, 3000, 4200 und 5200 m, und zwar nicht nur von der eigentlichen Wolkenoberfläche, sondern auch von den unmittelbar darüberliegenden Schleierwolken, die stets erheblich heller erschienen. Eine große Schwierigkeit für die Diskussion der Messungen bildet der tiefe Stand der Sonne (Sonnenhöhe $16\frac{1}{2}^0$ abnehmend auf 10^0), weil nämlich bei der Unregelmäßigkeit der Wolkendecke große Partien derselben, welche etwas tiefer gelegen waren, vollkommen im Schatten lagen, während wieder andere Partien mit günstigerer Exposition unverhältnismäßig viel Licht erhielten.

5) 6. März 1911. Dr. A. Wegener (Führer), Apotheker Calließ, Dr. Robitzsch, Dr. Ullrich. Abfahrt 9^a 20 Marburg. Höhe anfangs 8—900, langsam steigend, später sehr konstant 2000 bis 2500, von wo sehr schnell abgestiegen und gelandet wird. Landung 4^p 00 bei Salmünster am Spessart. — Anfangs Bewölkung $4—8^1$ str-cu, teilweise aufgebrochene Decke, Oberfläche 1700 m, oft auch fr-str bei 700; die ganze Schicht bis 1700 außerordentlich dunstig; anfangs noch ci, bald abnehmend auf 1^0, erst kurz vor der Landung ziehen neue ci aus W herauf. Der str-cu bildete später während des größten Teiles der Fahrt eine geschlossene Decke unter dem Ballon, der an einem wolkenfreien Zwischenniveau von 2200 schwebte. Über den Wolken war der Himmel äußerst rein, und besonders fiel die reine tiefblaue Farbe desselben noch ganz unten am Horizont auf. Auf der Wolkenoberfläche und auch in dem sie bisweilen ersetzenden Dunst traten

außergewöhnlich farbenprächtige Glorien um den Ballonschatten auf; wiederholt wurde in derartigen Wolkenlücken (am Seitenrande der kompakten Wolken) eine sehr glänzende Untersonne gesehen. Die Oberfläche des Wolkenmeeres erschien am Horizont mit vollkommen scharfen Konturen, es herrschte also kein Dunst mehr darüber (im Gegensatz zu der Fahrt vom 11. Sept. 1910). Die Dicke der Wolken war sehr wechselnd; obwohl es nirgends unter ihnen geregnet hat, so dürften manche Partien, über denen gemessen wurde, ca. 1000 m Dicke gehabt haben.

Bei der völlig ungehinderten, ja außergewöhnlich reinen Sonnenstrahlung und der guten Beschaffenheit der Wolkenoberfläche sind die Messungen vollkommen einwandfrei, zumal da auch die Sonnenhöhe (ca. 34°) keine zu geringe war. Bei den ersten Messungen befand sich der Ballon unmittelbar über den Wolken, fast in ihrem obersten Teil; später ca. 600 m darüber.

Außer in den beschriebenen 5 Fällen wurde das Albedometer noch bei den Fahrten vom 11. Juni, vom 10.—11. August, vom 4. November 1910 und vom 9. Februar 1911 mitgenommen, jedoch ohne daß Resultate heimgebracht wurden. Bei der zuerst genannten Fahrt wurde zwar noch eine größere Anzahl von Messungen ausgeführt; da aber die Sonnenstrahlung infolge von oberen Wolken stark geschwächt war, können diese Werte nicht als einwandfrei gelten, und muß deshalb von ihrer Wiedergabe abgesehen werden. Bei den übrigen Fahrten war überhaupt keine Möglichkeit einer Messung vorhanden.

Die Albedo der Erdoberfläche.

In der folgenden Tabelle sind die sämtlichen Messungen, soweit sie einwandfrei erscheinen, zusammengestellt, wobei jede einzelne Einstellung besonders angeführt ist. Dies erschien aus dem Grunde notwendig, weil es meist nicht möglich war, vier Einstellungen desselben Objekts zu erhalten, da der Ballon sich in der Zwischenzeit bereits fortbewegt hatte.

Obwohl das Material noch ein sehr beschränktes ist, lassen sich daraus doch wohl schon mit hinreichender Annäherung einige allgemeine Schlüsse ziehen. Da für den dunklen Laubwald sich die Albedo von 0.043, für hellen Wald eine solche von 0.076 und für Wald schlechtweg 0.061 ergibt, so darf man wohl annehmen, daß man für Durchschnittsrechnungen die Albedo des Waldes zu 0.06 annehmen kann. Dagegen scheint die Zahl der Beobachtungen noch zu gering, um einen brauchbaren Mittelwert für die offenbar sehr variierende Albedo der Felder angeben zu können. Die

Objekt	Seehöhe d. Ballons	Sonnen-höhe	Datum	Albedo	Mittelwerte
Dunkler Laubwald	1300	41.0°	11. Sept. 1910	0.043 0.045 0.058 0.034 0.036 0.039 0.029 0.030 0.034 0.070 0.052 0.048 0.044 0.045 0.041	0.043 (15 Beob.)
Wald	1260	54.0°	7. Juni 1910	0.077 0.045	0.061 (2 Beob.)
Wald und grüne Felder gemischt	1650	58.0°	"	0.093 0.087 0.054 0.071	0.068 (8 Beob.)
	1600	"	"	0.067 0.053 0.054 0.061	
Heller Wald	600	41°	"	0.099 0.066 0.061 0.074 0.079	0.076 (5 Beob.)
Grünes Feld	600	41°	"	0.147 0.108 0.141	0.132 (3 Beob.)
"	1400	54.0°	"	0.157 0.154	0.156 (2 Beob.)
Grüne und Kornfelder gemischt	1260	54.0°	"	0.141 0.131	0.136 (2 Beob.)
Hellgelber Acker	1400	54.0°	"	0.228 0.208	0.218 (2 Beob.)

meisten Felder scheinen eine solche von etwa 0.15 zu geben, doch zeigen die letzten Werte in der Tabelle, daß auch höhere Beträge vorkommen, und es muß dahin gestellt bleiben, wie weit sich diese letzteren im Durchschnitt bemerkbar machen.

Nimmt man als Mittel für Felder 0.15, für Wald 0.06 an, so erhielte man für ein Land, welches etwa zur Hälfte mit Wald und zur Hälfte mit Feldern besetzt ist, eine Albedo von 0.105, oder wenn wir wegen der Himmelsstrahlung (vergl. p. 10) noch 7 % dieses Wertes abziehen, rund 0.1. Dabei ist zu beachten, daß die vorliegenden Werte sämtlich aus Höhen zwischen 600 und 1650 m gemessen worden sind. Wenngleich für diesen Standort bereits ein großer Teil der trübenden Dunstschichten unterhalb des Beobachters, also zwischen diesem und dem Objekt zu liegen kommt, so ist doch anzunehmen, daß für größere Höhen sich noch merklich größere Werte ergeben.

Die Albedo der Wolken.

Auch hier sind die einzelnen Messungen sämtlich in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

1) Fahrt vom 30. Juli 1910.

Objekt	Seehöhe d. Objekts	Seehöhe d. Beob.	Sonnenhöhe	Albedo	Mittelwerte	
Wolke dicht unter dem Ballon, letzterer kurz darauf in ihr	3000	3200	$54^\circ 30'$	0.54	0.45 (8 Beob.)	0.72 (24 Beob.)
				0.30		
				0.32		
				0.36		
	„	„	$57^\circ 16'$	0.80		
				0.46		
				0.42		
				0.37		
Einzelner Cumulus	ca. 2000	3000	$52^\circ 22'$	0.79	0.73 (4 Beob.)	
				0.76		
				0.68		
				0.70		
Einzelner Cumulus	„	2900	$58^\circ 34'$	0.88	0.90 (8 Beob.)	
				0.99		
				0.95		
				0.98		
				0.94		
				0.92		
				0.82		
				0.76		
Einzelner Cumulus		3600	$40^\circ 42'$	0.99	0.88 (4 Beob.)	
				0.97		
				0.88		
				0.68		

2) Fahrt vom 11. September 1910.

Objekt	Seehöhe d. Objekts	Seehöhe d. Beob.	Sonnenhöhe	Albedo	Mittelwerte	
Nebelmeer, anfangs mehrere 100 m dick	500	900	35.°0	0.63		
				0.70		
				0.72		
				0.70		
				0.68		
				0.63		
				0.51		
				0.42	0.60	
				0.73	(16 Beob.)	
				0.68		
				0.51		
				0.52		
				0.62		
				0.46		
				0.62		
				0.46		
Das Nebelmeer wird dünner, bricht auf und verschwindet schließlich ganz	"	"	38.°0	0.62		
				0.62		
				0.68		
				0.71		
				0.61		0.58
				0.45		(42 Beob.)
				0.50		
				0.54		
				0.61		
				0.60		
				0.59		
				0.65		
				0.64	0.57	
				0.68	(26 Beob.)	
				0.63		
				0.56		
				0.65		
				0.53		
				0.45		
				0.49		
				0.47		
				0.49		
				0.48		
				0.48		
				0.63		
				0.54		

3) Fahrt vom 12. Dezember 1910.

Objekt	Seehöhe d. Obj.	Seehöhe d. Beob.	Sonnen-höhe	Albedo	Mittelwerte	
Sehr dünne Wolkendecke (an einigen Stellen schimmert die Erde durch)	800—1000	1400	16° 28′	0.39 0.28 0.29 0.49	0.36 (4 Beob.)	0.89 (40 Beob.)
Dichte Wolkendecke (Kappe), hell beleuchtet	"	"	"	1.32 1.45 1.34 1.36	1.37 (4 Beob.)	
Wolkenmeer, nicht lückenlos	"	2440	16° 8′	0.81 0.78 0.74 0.63	0.74 (4 Beob.)	
Welliges Wolkenmeer; Schatten überwiegt etwas	"	"	"	0.70 0.63 0.64 0.63	0.65 (4 Beob.)	
Wolkenkopf in dem unebenen Wolkenmeer	"	3090	14° 14′	0.76 1.00 1.07 1.13	0.99 (4 Beob.)	
Sehr dünne, aber gut bestrahlte Partie des Wolkenmeeres	"	"	"	0.59 0.66 0.57 0.49	0.58 (4 Beob.)	
Dichte Wolkendecke (Kappe), gut beleuchtet	"	4200	13° 0′	0.91 0.87 1.20 0.93 0.95	0.97 (5 Beob.)	
Dasselbe Objekt, aber am Schattenabhang	"	"	"	0.68 0.48 0.54	0.57 (3 Beob.)	
Normale Wolkenoberfläche (sehr wechselnd), Licht und Schatten	"	5120	11° 44′	0.76 1.00	0.88 (2 Beob.)	
Die Wolke wird durchsichtig	"	"	"	0.35 0.22	0.28 (2 Beob.)	
Bei der Unebenheit der Oberfläche besteht diese aus markanten Licht- u. Schattenpartien; nur die ersteren werden gemessen	"	5200	10° 0′	1.15 2.46 2.52 1.95	2.02 (4 Beob.)	

4) Fahrt vom 6. März 1911.

Objekt	Seehöhe d. Obj.	Seeh. d. Beob.	Sonnenhöhe	Albedo	Mittelwerte	
Erde deutlich sichtbar, ganz dünner Wolkenschleier	1700	1800	33°	0.23	„Erde deutlich sichtbar" 0.21 (2 Beob.)	0.75 (49 Beob.)
Erde deutlich durch die Wolke sichtbar	„	1900	34°	0.19		
Erde durchschimmernd	„	1900	„	0.42	„Erde durchschimmernd" 0.43 (9 Beob.)	
„	„	„	„	0.42		
„	„	„	„	0.57		
Dünne Wolke	„	„	„	0.33		
Erde beginnt durchzuschimmern	„	1950	„	0.42		
Sehr dünne Wolken	„	2000	„	0.46		
Erde ganz schwach durchschimmernd	„	2100	„	0.38		
„	„	„	„	0.42		
„	„	„	„	0.43		
Sehr deutlicher Schattenabhang	„	1800	33	0.59	„Schattenabhang" 0.58 (3 Beob.)	
Nur noch wenig Schatten	„	„	„	0.59		
Etwas zu dunkel	„	2100	34	0.55		
Dunklere Partie	„	2300	34	0.66	„Dunklere Partie" 0.64 (2 Beob.)	
„	„	„	„	0.62		
Möglicherweise etwas Schatten	„	1800	33	0.65	Nur noch sehr wenig Schatten 0.70 (2 Beob.)	
Wenig oder kein Schatten	„	„	„	0.76		
Normal	„	1800	„	0.79	„Normal" 0.82 (3 Beob.)	
„	„	„	„	0.81		
„	„	„	„	0.87		
Mitten zw. hellerer und dunklerer Partie	„	2300	34	0.76	„Normal" 0.74 (5 Beob.)	
Normal	„	„	„	0.76		
„	„	„	„	0.70		
„	„	„	„	0 72		
„	„	„	„	0.76		
Normal	„	„	32	1.04	„Normal" 0.96 (8 Beob.)	
„	„	„	„	1.04		
„	„	„	„	0.93		
„	„	„	„	0.77		
„	„	„	„	0.97		
„	„	„	„	1.01		
„	„	„	„	1.09		
„	„	„	„	0.80		
Normal	„	1950	34°	0.70	„Normal" 0.67 (3 Beob.)	
„	„	„	„	0.70		
„	„	„	„	0.61		
Normal, eher etwas zu hell als zu dunkel	„	2300	„	0.97	„Eher zu hell als zu dunkel" 1.06 (4 Beob.)	
„	„	„	„	1.08		
„	„	„	„	1.11		
„	„	„	„	1.06		

Fortsetzung auf der nächsten Seite.

Fortsetzung.

Objekt	Seehöhe d. Obj.	Seeh. d. Beob.	Sonnenhöhe	Albedo	Mittelwerte	
Typische Werte; das Wolkenmeer hat hellere Partien und dunklere (durchlässigen Dunst); A sind die helleren (massiveren) Partien, B die dunkleren.	1700—1800	2200	33°	1.07	A (4 Beob.) 1.29	siehe vorige Seite
	"	"	"	1.11		
	"	"	"	1.23		
	"	"	"	1.74		
	"	"	"	0.66	B (4 Beob.) 0.71	
	"	"	"	0.76		
	"	"	"	0.70		
	"	"	"	0.72		

Die angeführten Zahlenwerte variieren sehr stark. Es sei betont, daß es sich hierbei um wirkliche Helligkeitsschwankungen der Wolkendecke, nicht etwa um Beobachtungsfehler handelt; die letzteren dürften bei der Veränderlichkeit des Objekts überhaupt garnicht in Betracht kommen. In der Tat sieht man unmittelbar aus den erhaltenen photographischen Aufnahmen, wie starke Helligkeitsunterschiede auch bei einer völlig geschlossenen Wolkendecke infolge ihrer Unebenheiten auftreten. Bei der letzten Fahrt wurde deshalb der Versuch gemacht, die gemessene Wolkenpartie nach jeder Einstellung in bezug auf ihre Helligkeit zu beschreiben, und man kann hier in der Tat von Fall zu Fall die Übereinstimmung zwischen Messung und Bezeichnung erkennen. Es kommt hierbei einerseits darauf an, wie dick die Wolke ist, und andererseits, in welcher Weise der gerade gemessene Teil der Oberfläche gegen die Horizontalebene geneigt ist.

Formuliert man das Problem so, daß man nicht die Albedo einer idealen, unendlich dicken und mit genau ebener Oberfläche versehenen Wolkenschicht sucht, sondern diejenige Albedo, welche unsere Wolken mit ihren dünneren und dickeren Partien, ihrer unebenen Oberfläche und der dunklen Erde darunter in Wirklichkeit haben, so dürften die in der folgenden Tabelle mitgeteilten Gesamtmittelwerte hierüber hinreichenden Aufschluß geben.

Hierbei sind möglicherweise die Werte der dritten Fahrt etwas zu hoch, die der vierten etwas zu tief. Wenn wir nämlich bei der ersteren die 4 in der Maximalhöhe von 5200 m gemachten Einstellungen (die dem tiefsten Sonnenstande entsprechen), fortlassen, so ergibt sich als Gesamtmittel für dies Wolkenmeer nur noch 0.77. Andererseits ergibt sich bei der 4. Fahrt aus den 19 als „normal“ bezeichneten Einstellungen allein der Wert 0.83, als

Mittelwerte der Wolkenalbedo (ohne Reduktion wegen der Himmelsstrahlung).

Fahrt	Sonnenhöhe	Wolken	Albedo	Zahl d. Beob.
30. Juli 1910	41—59°	Einzelne Cumuli, vom 1600 m Niveau teilweise bis 3000 m aufsteigend.	0.72	24
11. Sept. 1910	35—38°	Sehr dünner Stratus bei 500 m, schwindend.	0.58	42
12. Dez. 1910	10—16°	Stratus bei 1000 m, teilweise dicht darüber zweite Decke, bisweilen auch unter ihm (500 m) Fraktostratus; fast lückenlos, aber nicht regnend.	0.89	40
6. März 1911	32—34°	Stratus bei 1700; wechselnde Dicke, häufig Lücken.	0.75	49

Mittel der 8 „typischen“ Werte, von denen 4 zu groß und 4 zu klein sind, sogar 1.00.

Fassen wir die letzten beiden Fahrten, welche Beobachtungen über den Stratus des zweiten Wolken-Niveaus liefern, zu ca. 0.82 zusammen, so hätten wir, wenn wir noch auf die im 1. Teil dieser Arbeit besprochene Reduktion wegen der Himmelsstrahlung (7 %) Rücksicht nehmen, für den Stratus des untersten (600 m-) Niveaus die Albedo 0.54, für den Stratus des zweiten (1600 m-) Niveaus die Albedo 0.76 und für Cumuluswolken 0.67.

Von weiteren Schlußfolgerungen soll hier abgesehen werden; denn die erhaltenen Resultate dürften zur Genüge zeigen, daß vor allen Dingen erst ein größeres Beobachtungsmaterial gesammelt werden muß, wenn man einen einigermaßen zuverlässigen Wert für die mittlere Albedo der Wolken erhalten will.

Zur Thermodynamik der Gleichgewichte in Einstoffsystemen.

Von

G. Tammann.

Mit 11 Figuren im Text.

Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Mai 1911.

I.

Die Gleichgewichte isotroper und anisotroper Phasen.

Die reine Thermodynamik läßt 2 Hauptarten von Gleichgewichtskurven bei den Einstoffsystemen zu. Diese beiden Hauptarten von Gleichgewichtskurven sind dadurch gekennzeichnet, daß für die eine Art der Gleichgewichtskurven der kritische Punkt, der Zustandspunkt auf der pT-Ebene, in dem die Volumen- und Energiedifferenzen beider Phasen verschwinden, auf der Gleichgewichtskurve selbst liegt, während ein kritischer Punkt bei der anderen Art von Gleichgewichtskurven überhaupt nicht vorhanden ist.

Der Hauptzweck folgender Untersuchung ist die Feststellung dieses Unterschiedes und die Bestimmung der Bedingungen, welche die eine oder die andere Art von Gleichgewichtskurven zur Folge haben. Diese Bedingungen sind, wie wir sehen werden, an die Kenntnis der Abhängigkeit der Volumendifferenz beider Phasen vom Druck und auch an die Abhängigkeit der Energiedifferenz beider Phasen von der Temperatur geknüpft.

Diesem Unterschied, den die reine Thermodynamik betreffs der wesentlichsten Eigenschaften der Gleichgewichtskurven zuläßt, entspricht der Unterschied, den die Atomistik betreffs der Gleichgewichtskurven fordert.

Der Erfahrung nach hat man zwischen anisotropen und isotropen Phasen zu unterscheiden. Der Atomistik nach bestehen die anisotropen Phasen aus geordneten Molekülen, während in den isotropen Phasen die Moleküle sich in voller Unordnung befinden.

Ferner folgt aus der Atomistik, daß zwei Phasen, deren Moleküle sich in voller Unordnung befinden, miteinander identisch werden, wenn die spezifischen Volumen beider Phasen einander gleich werden. Wenn diese Bedingung auf einer Gleichgewichtskurve erfüllt ist, so entspricht der Erfüllung der Bedingung ein kritischer Punkt, und dadurch ist dann die Möglichkeit gegeben, in realisierbarer Weise eine isotrope Phase in eine andere ebenfalls isotrope Phase in der Weise umzuwandeln, daß sich auf dem Wege der Umwandlung alle Eigenschaften kontinuierlich ändern. Das Auftreten eines kritischen Punktes auf der Gleichgewichtskurve hat also zur Folge, daß die Zustandsfelder isotroper Phasen nicht allseitig von Gleichgewichtskurven begrenzt sind.

Ganz andere Folgerungen ergeben sich aus der Atomistik für die Gleichgewichte von Systemen mit anisotropen Phasen.

Werden die spezifischen Volumen zweier anisotroper Phasen oder einer isotropen und einer anisotropen Phase einander gleich, dann dürfen der Atomistik nach die Phasen wegen verschiedener Molekularanordnung mit einander nicht identisch werden. Im Zustandspunkte gleicher Volumen werden sich also bei der Umwandlung alle Eigenschaften bis auf das Volumen diskontinuierlich ändern.

Entsprechend der Annahme der Atomistik, daß die bestimmte Molekularanordnung in anisotropen Phasen den Molekülen bei Druck- und Temperaturänderungen nur innerhalb kleiner Grenzen Bewegungsfreiheiten zuläßt, ist ein kontinuierlicher Übergang von einer anisotropen zu einer isotropen Phase oder zu einer anderen anisotropen Phase ausgeschlossen.

Wenn also in einem Einstoffsystem auch nur eine anisotrope Phase auftritt, so ist das Auftreten eines kritischen Punktes auf der betreffenden Gleichgewichtskurve, in dem die anisotrope Phase mit der isotropen identisch werden müßte, der Atomistik nach nicht möglich. Das Auftreten auch nur einer anisotropen Phase im System bedingt also, daß der kritische Punkt von der Gleichgewichtskurve verschwindet, und daß die Aenderung der Eigenschaften bei der Umwandlung einer Phase in die andere in allen Punkten der Gleichgewichtskurve diskontinuierlich sich vollziehen muß, ausgenommen singuläre Punkte, in denen sich je eine Eigen-

schaft kontinuierlich ändert, die anderen aber in normaler Weise sich diskontinuierlich ändern.

Hieraus folgt schließlich, daß die Zustandsfelder anisotroper Phasen immer von Gleichgewichtskurven vollständig umgrenzt sein müssen, damit ein kontinuierlicher Übergang von der betreffenden anisotropen Phase in irgend eine andere Phase nicht möglich ist.

Wenn auch in dieser Weise eine Harmonie zwischen den Folgerungen aus der Atomistik und den aus der Thermodynamik hergestellt ist, so liegt doch die endgültige Entscheidung der Frage nach dem Verlauf der Schmelz- und Umwandlungskurven auf einem anderen Gebiet, nämlich auf dem der Kenntnis der Abhängigkeit der Volumen- und Energiedifferenzen beider Phasen vom Druck und der Temperatur, und hier kommt es vor allem darauf an, die Bedingungen festzustellen, welche erfüllt sein müssen, damit bei einer Temperatur zwei Gleichgewichtsdrucke und damit bei einem Druck zwei Gleichgewichtstemperaturen auftreten können.

Die Feststellung dieser Bedingungen wird mit Hlife des thermodynamischen Potentials, der ζ-Funktion, ausgeführt werden, weil die Parameter dieser Funktion die Temperatur und der Druck sind, man also bei Anwendung dieser Funktion zu Resultaten kommt, welche unmittelbar zu den der Beobachtung am leichtesten zugänglichen Diagrammen der pT-Ebene führen.

Bedeuten ε den Energieinhalt, η die Entropie und v das Volumen der Masseneinheit des Stoffes, so ist nach Gibbs das thermodynamische Potential ζ durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\zeta = \varepsilon - T\eta + pv.$$

Da nach dem zweiten Hauptsatz

$$d\varepsilon = T d\eta - p\,dv$$

ist, so ergibt sich für $d\zeta$ die Gleichung:

$$d\zeta = -\eta\,dT + v\,dp.$$

Die Richtung und Krümmung der ζ-Kurven bei konstanter Temperatur und konstantem Druck werden durch folgende vier Gleichungen bestimmt. Diese Gleichungen ergeben sich aus der Gleichung für $d\zeta$ und der Gleichung:

$$d\eta = \frac{c_p}{T}\,dT - \frac{d_p v}{dT}\,dp,$$

sie lauten:

$$\frac{d_T\zeta}{dp} = v \quad 1) \qquad \frac{d_T^2\zeta}{dp^2} = \frac{d_T v}{dp} \quad 2)$$

$$\frac{d_p\zeta}{dT} = -\eta \quad 3) \qquad \frac{d_p^2\zeta}{dT^2} = -\frac{c_p}{T} \quad 4).$$

Die ζ-Isothermen steigen also mit wachsendem Druck, wie die Gleichung 1) lehrt, da v für alle Phasen positiv ist. Ihre Krümmung wird nach Gleichung 2) durch die Kompressibilität der Phase bestimmt. Da $\frac{d_T v}{dp}$ in realisierbaren Zuständen immer das negative Vorzeichen hat, so wenden die ζ-Isothermen durchweg ihre konkave Seite der p-Achse zu. Schneiden sich die beiden ζ-Isothermen zweier Phasen, so bedeutet das, daß die beiden Phasen beim Druck des Schnittpunktes im Gleichgewicht sind. Die ζ-Isothermen der beiden Phasen 2 und 3 schneiden sich beim Druck p_1 (Fig. 1). Bei Drucken unterhalb des Gleichgewichtsdruckes p_1 sei $\zeta_3 > \zeta_2$, dann ist bei Drucken über p_1 $\zeta_2 > \zeta_3$.

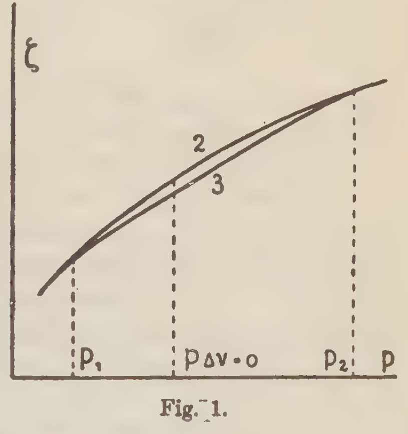


Fig. 1.

Da die ζ-Funktion ein Maaß der Stabilität ist, indem dem kleineren ζ-Wert die größere Stabilität entspricht, so tritt beim Druck p_1 ein Stabilitätswechsel ein, indem bei Drucken, die kleiner als p_1 sind, die Phase 2 und bei Drucken, die größer als p_1 sind, die Phase 3 die stabilere ist.

Wir können uns nun dem Hauptpunkt dieser Untersuchung nähern, indem wir die folgende Frage zu beantworten suchen:

Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit bei einer Temperatur zwei Gleichgewichtsdrucke und damit bei einem Druck zwei Gleichgewichtstemperaturen auftreten?

a. Die ζ-Isothermen krystallisierter und isotroper Phasen.

Der Übergang vom flüssigen zum dampfförmigen Zustande und der Übergang vom krystallisierten zum flüssigen Zustande zeigen einen wesentlichen Unterschied, auf den näher eingegangen werden muß, bevor man den Verlauf der ζ-Isothermen bei den Gleich-

gewichtsdrucken eines Krystalls und seiner Schmelze beurteilen kann.

Beim Übergange von der dampfförmigen zur flüssigen Phase würde sich das Volumen, wenn eine Spaltung des Stoffes in 2 Phasen nicht eintreten würde, auf einer Isotherme ändern, welche nach J. Thomson, Maxwell und van der Waals die Gestalt der Kurve *c a e g f b d* hat (Fig. 2). Der Teil *a e g f b* der Isotherme muß bekanntlich so verlaufen, daß die beiden Flächenstücke *a e g* und *g f b* einander gleich sind. Ein Teil des Kurvenstückes *a e* und ein Teil des Kurvenstückes *b f* können wirklich festgelegt werden, da der Druck auf dem Dampfe etwas über den Gleichgewichtsdruck erhöht werden kann, ohne daß Kondensation eintritt, und da auf der Flüssigkeit der Druck unter den Dampfdruck erniedrigt werden kann, ohne daß Dampfbildung einzutreten braucht.

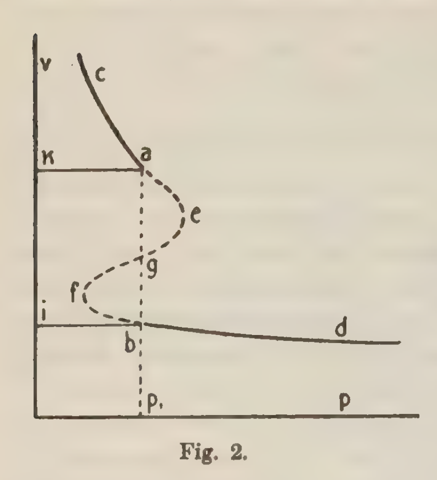


Fig. 2.

Bei den Volumenisothermen eines Stoffes im flüssigen und krystallierten Zustande liegen die Dinge ganz anders. Einerseits kann die Isotherme der Flüssigkeit, Kurve 2, Fig. 3, wenn nur das spontane Krystallisationsvermögen des Stoffes gering ist, bis zu beliebig hohen Drucken verfolgt werden, andererseits aber kann der Druck auf einem Krystall nicht unter den Gleichgewichtsdruck p_1 erniedrigt werden, ohne daß hierbei der Krystall ins Schmelzen gerät. Es gründet sich diese Behauptung auf die Erfahrung, daß bei Druckerniedrigung auf vollständig krystallisierte Massen die Schmelzung bei Überschreitung der Schmelzkurve genau im Momente der Überschreitung der Schmelzkurve beginnt, während andererseits bei der Drucksteigerung auf eine vollständig flüssige Masse die Krystallisation nach Überschreitung der Schmelzkurve um hunderte und tausende von Atmosphären ja überhaupt bei beliebiger Drucksteigerung nicht eintritt oder nicht einzutreten braucht, wenn nur das spontane Krystallisationsvermögen genügend gering ist.

Diese Tatsachen sind für die Beurteilung der Frage von Bedeutung, ob man berechtigt ist, sich einen kontinuierlichen Übergang von einer isotropen zu einer anisotropen Phase in der Art

des bekannten kontinuierlichen, wenn auch nicht realisierbaren Überganges vom flüssigen zum dampfförmigen Zustande auf der Isotherme *d b f g e a c* Fig. 2 vorzustellen.

Wollte man, um die Abhängigkeit des Volumens eines Krystalls und seiner Schmelze vom Druck durch eine Gleichung dritten Grades, ähnlich der von van der Waals, darzustellen, eine Schleife analog der Schleife *a e g f b* Fig. 2 konstruieren, und würde man hierbei nicht berücksichtigen, daß die Isotherme der Flüssigkeit zu unendlich hohen Drucken verläuft, so würde man durch Konstruktion der Schleife *f g k a*, Fig. 3, in der Tat zu 3 Volumen

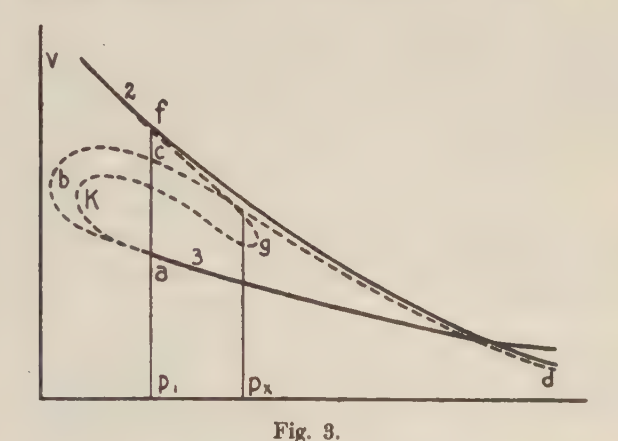


Fig. 3.

bei demselben Druck gelangen, man hätte aber beim Druck p_x noch ein viertes Volumen des Stoffes auf dem vernachlässigten Ast der Volumenisotherme, 2, der Schmelze. Für ein gewisses Druckintervall würde man bei dieser Art der Konstruktion immer zu einem vierten Volumen gelangen, und müßte daher jede Gleichung dritten Grades als zur Darstellung des Überganges vom isotropen zum anisotropen Zustande ungeeignet vermeiden. Diese Schwierigkeit, die sich einer Zustandsgleichung dritten Grades, welche auch den anisotropen Zustand umfassen sollte, entgegenstellen, könnte man nur dann vermeiden, wenn man die Konstruktion der Schleife in der Weise ausführt, wie es die Kurve *a b c d*, Fig. 3, andeutet. Die Kurve *c d* müßte sich in ihrem weiteren Verlauf asymptotisch der Isotherme der Schmelze, der Kurve 2, nähern, dann könnten das Flächenstück *a b c* und das Flächenstück $c f \infty$, welches zwischen der Isotherme 2 und der nach $p = \infty$ verlängerten Kurve *c d* liegt, einander gleich werden. In dieser Weise hätte man allerdings die Schwierigkeit des vierten Volumens vermieden,

aber man hätte nichts gewonnen, denn der Anbringung der Schleife *abcd* würde die Tatsache, daß man einen Krystall bei Drucken unterhalb des Druckes p_1 nicht realisieren kann, nicht entsprechen, und keine Beobachtung weist auf die Berechtigung der Annahme der Volumen, die der Kurve *cd* entsprechen, hin.

Der der Kondensation von Dampf in mancher Beziehung analoge Prozeß der Krystallisation ist also gerade in Hinsicht auf kontinuierlich sich ändernde Zwischenzustände, in denen der Stoff nur eine Phase erfüllt, dem Prozeß der Verdampfung nicht zu vergleichen. Der Erfahrung nach sind solche Zwischenzustände unbekannt und die Atomistik der anisotropen Zustände läßt die Möglichkeit ihres Auftretens auch nicht zu[1]).

Dem Verlauf der Volumenisothermen eines Dampfes und seiner Flüssigkeit Fig. 2 entspricht nach van der Waals der in Fig. 4 dargestellte Verlauf der ζ-Funktion. Die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Punkte der Fig. 2 und 4 entsprechen einander. Näheres hierüber findet man im Lehrbuch der Thermodynamik von van der Waals und Kohnstamm I S. 108.

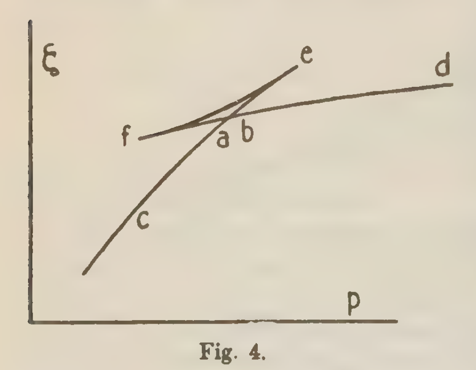


Fig. 4.

Der Verlauf der ζ-Kurven eines Krystalls und seiner Schmelze ist beim Schmelzdruck p_1 aus den dargelegten Gründen ein ganz anderer als bei einer Flüssigkeit und ihrem Dampf. Die beiden ζ-Kurven eines Krystalls, 3, und seiner Schmelze, 2, Fig. 1, schneiden sich beim Gleichgewichtsdruck p_1. Die Erfahrung lehrt aber, daß man sich die ζ-Kurve eines Krystalls nicht zu kleinen Drucken hin über ihren Schnittpunkt mit der ζ-Kurve der Schmelze hinaus verlängert denken darf. Denn ein Krystall kann bei Drucken unterhalb des Gleichgewichtsdruckes p_1 höchstens im Zustande der Schmelzung realisiert werden. Er unterscheidet sich also in dieser Beziehung wesentlich von den isotropen Phasen, welche Überschreitungen ihres Gleichgewichtes nach beiden Seiten hin vertragen, ohne daß in ihnen die neue Phase auftritt. Daher ist man auch nicht berechtigt, sich bei Drucken unterhalb des Schnittpunktes der ζ-Kurven des Krystalls und seiner Schmelze einen

1) Siehe hierüber auch Krystallisieren und Schmelzen S. 8.

Zusammenhang der beiden ζ-Kurven z. B. in der Art, wie sie Fig. 4 für eine Flüssigkeit und ihren Dampf andeutet, zu denken.

Wir können nun an die Beantwortung der Hauptfrage gehen und die Bedingungen bestimmen, deren Erfüllung das Auftreten von zwei Gleichgewichtsdrucken bei derselben Temperatur bedingt. Wenn die ζ_2- und ζ_3-Isothermen sich zweimal schneiden, so ist jeder der Drucke, bei dem die ζ_2- und ζ_3-Werte einander gleich werden, ein Gleichgewichtsdruck. Existieren bei derselben Temperatur zwei Gleichgewichtsdrucke, dann muß die Schmelzkurve notwendigerweise ein Maximum, in dem $\frac{dT}{dp} = 0$ wird, besitzen. Es spitzt sich die Frage also dahin zu, welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die beiden ζ-Isothermen, nachdem sie sich beim Druck p_1 geschnitten haben, sich nochmals bei einem höheren Druck p_2 schneiden.

Bei der Beurteilung der Frage nach dem Verlauf der beiden ζ-Isothermen haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Es können beim Tripelpunkt, in dem der Krystall mit seinem Dampf und seiner Schmelze im Gleichgewicht ist, die beiden Beziehungen $v_2 \gtrless v_3$ gelten.

1. Wenn $v_2 > v_3$ ist, so muß dafür, daß sich die beiden ζ-Kurven außer beim Druck p_1 nochmals bei einem höheren Druck p_2 (Fig. 1) schneiden, die Vorbedingung

$$\frac{d_T^2 \zeta_2}{dp^2} > \frac{d_T \zeta_3}{dp^2} \text{ oder } \frac{d_T v_2}{dp} > \frac{d_T v_3}{dp}$$

erfüllt sein; denn wenn diese Bedingung nicht erfüllt wäre, dann würden die beiden ζ-Isothermen, die beim Gleichgewichtsdruck p_1 um den Winkel $v_2 - v_3$ divergieren, bei steigendem Druck immer stärker divergieren, da dann die ζ_3-Isotherme sich stärker zur p-Achse krümmen würde als die ζ_2-Isotherme; wenn aber jene Vorbedingung erfüllt ist, so wird mit wachsendem Druck die Divergenz der beiden ζ-Isothermen, die Differenz:

$$\frac{d\zeta_2}{dp} - \frac{d\zeta_3}{dp} = v_2 - v_3$$

abnehmen, und ein zweiter Gleichgewichtsdruck möglich werden.

Nun nähern sich aber mit steigendem Druck die Kompressibilitäten eines Krystalls und seiner Schmelze dem Nullwert, mit wachsendem Druck wird also die Krümmung der beiden ζ-Isothermen abnehmen, und dieselben werden mit wachsendem Druk

immer geradliniger werden. Damit die beiden ζ-Isothermen nicht zu unendlich hohen Drucken hin divergieren, muß also noch die Bedingung erfüllt sein, daß die Differenz:

$$\frac{d\zeta_2}{dp} - \frac{d\zeta_3}{dp} = v_2 - v_3$$

bei einem endlichen Druck durch den Nullwert geht. Die Erfüllung dieser Bedingung ist aber auch hinreichend dafür, daß sich die beiden ζ-Isothermen nochmals bei einem Druck p_2 (Fig. 1) schneiden, daß bei Drucken, die größer sind als p_2, die anisotrope Phase instabiler wird als die isotrope.

Für die Existenz von zwei Schmelzdrucken bei derselben Temperatur und damit auch für das Auftreten eines Maximums auf der Schmelzkurve müssen also zwei Bedingungen erfüllt sein:

Die Vorbedingung, daß die Kompressibilität des Krystalls kleiner ist als die seiner Schmelze, und die Hauptbedingung, daß die Volumendifferenz der Schmelze und des Krystalls bei einem endlichen Wert von p durch den Nullwert geht.

Die Vorbedingung ist, soweit die Erfahrung reicht, bei allen Stoffen erfüllt. Von der Hauptbedingung kann man aber zur Zeit nur sagen, daß sie der Extrapolation nach zu urteilen, erfüllt zu sein scheint[1]).

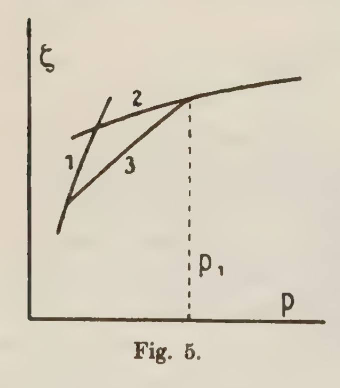


Fig. 5.

2. Wenn $v_3 > v_2$ ist, und auch in diesem Fall die Bedingung:

$$\frac{d_T v_2}{dp} > \frac{d_T v_3}{dp},$$

erfüllt ist, so werden, nachdem bei steigendem Druck die ζ-Isotherme des Krystalls, 3, und seiner Schmelze, 2, die ζ-Isotherme des Dampfes, 1, geschnitten haben (Fig. 5), sich die ζ-Isothermen 2 und 3 nur einmal schneiden, denn dann wird bei Drucken über dem des Schnitt-

1) Würden sich die beiden ζ-Isothermen eines Krystalls und seiner Schmelze erst beim Druck $p = \infty$ schneiden, dann würde die Schmelzkurve sich asymptotisch einer maximalen Schmelztemperatur beim Drucke $p = \infty$ nähern. Diese Grenz-Form der Schmelzkurve würde ebenfalls kontinuierliche Übergänge von anisotropen zu isotropen Zuständen nicht zulassen. Sie würde einen Grenz-Fall der Schmelzkurve mit einer maximalen Schmelztemperatur darstellen, der dadurch gekennzeichnet ist, daß die maximale Schmelztemperatur bei unendlich hohem Druck liegt.

punktes p_1 die ζ_2-Kurve sich stärker zur p-Achse krümmen als die ζ_3-Kurve, wodurch ein zweites Sichschneiden der ζ_2- und ζ_3-Isothermen unmöglich wird.

Wenn die genannten Bedingungen erfüllt sind, dann wird für den Fall, daß $v_2 > v_3$ ist, die Schmelzkurve mit wachsendem Druck zu höheren Temperaturen ansteigend ein Maximum erreichen und dann fallen; für den Fall, daß $v_2 < v_3$ ist, wird die Schmelzkurve mit wachsendem Druck sofort zu tieferen Temperaturen fallen. Es stimmt dieses Resultat mit der früher[1]) von mir geäußerten Ansicht überein, daß sich alle Schmelzkurven aus einer in sich geschlossenen Kurve dadurch ableiten lassen, daß man die p- und T-Achsen verschiebt, wodurch dann durch diese Achsen die realen Stücke der Schmelzkurven von der in sich geschlossenen Kurve abgeschnitten werden.

b. *Die ζ-Isobaren anisotroper und isotroper Phasen.*

Für eine ζ-Isobare gelten, wie wir sahen, die Gleichungen 3 und 4:

$$\frac{d_p\zeta}{dT} = -\eta \text{ und } \frac{d_p^2\zeta}{dT^2} = -\frac{c_p}{T}.$$

Die ζ-Isobaren sind also Kurven, die mit steigender Temperatur fallen und sich konkav zur T-Achse krümmen.

Auch für die ζ-Isobaren eines Krystalls und seiner Schmelze gilt, daß die ζ-Isobare des Krystalls die ζ-Isobare seiner Schmelze schneidet, daß sie aber in diesem Schnittpunkt endet, weil die Überhitzung eines Krystalls nicht ausgeführt werden kann. Andererseits können viele Flüssigkeiten, wie früher[2]) gezeigt wurde, zu beliebig tiefen Temperaturen hin unterkühlt werden. Sowohl der Wärmeinhalt als auch das Volumen, wie natürlich auch andere Eigenschaften ändern sich bei der Unterkühlung der Flüssigkeiten kontinuierlich, und zwar gilt das auch für das Temperaturgebiet, in dem die Flüssigkeit allmählich in einen amorphen, festen Körper, in ein Glas, übergeht. Aus diesen Gründen dürfen weder für die Volumenisobaren noch für die Isobaren des Wärmeinhaltes der Flüssigkeiten und der aus ihnen sich bildenden Krystalle Schleifen konstruiert werden wie für die Isobaren dieser Eigenschaften eines Dampfes und seiner Flüssigkeit.

---

1) Wied. Ann. 62 S. 280, 1897.

2) Zeitschrift für phys. Chemie 25 S. 441 und 28 S. 17.

Wollte man aber doch eine solche Konstruktion vornehmen, so müßte man, um das Auftreten eines vierten Volumens zu vermeiden, an der Isobare des Krystalls Fig. 6 Kurve 3, die Schleife, *a b c d*, so konstruieren, daß der Ast *c d* bei $T = 0$ die Isobare der isotropen Phase trifft. In der Erfahrung findet man aber auch für diese Konstruktion keine Stütze, denn man hat erstens für die Volumen des Kurven-Astes *d c* keine Hinweise, und da zweitens früher[1]) gezeigt wurde, daß ein Krystall, wenn seine lineare maximale Krystallisationsgeschwindigkeit groß ist, sich überhaupt nicht überhitzen läßt, und daß, wenn dieselbe klein ist, die Überhitzung nur unter beständiger Schmelzung des Krystalls ausführbar ist, so würde man bei der Konstruktion des Kurven-Astes, *a b c d*, von der Erfahrung nicht gestützt werden. Man darf, was besonders betont werden muß, nicht übersehen, daß sich die Überhitzung einer Flüssigkeit von der eines Krystalls in einem wesentlichen Punkte unterscheidet. Die Flüssigkeit befindet sich während der Überhitzung in einem statischen, der Krystall aber, wenn sich seine Überhitzung überhaupt ausführen läßt, in einem dynamischen Zustande, in dem der Krystall während der Überhitzung schmilzt.

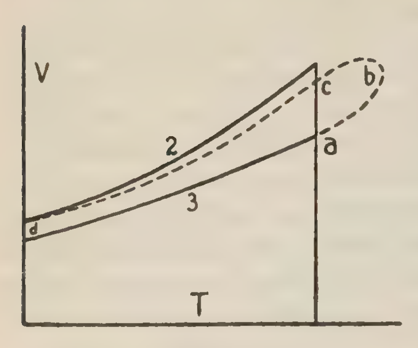


Fig. 6.

Die Bedingung, welche erfüllt sein muß, damit zwei Phasen bei demselben Druck bei zwei verschiedenen Temperaturen T_1 und T_2 miteinander ins Gleichgewicht kommen, ist die, daß die ζ_2-Isobaren die ζ_3-Isobaren zweimal, nämlich bei den beiden Temperaturen T_1 und T_2 schneiden.

Da die ζ-Isobare der anisotropen Phase zwischen den beiden Temperaturen T_1 und T_2 unter der ζ-Isobare der isotropen Phase liegt, Fig. 7, so muß für den Schnittpunkt bei der Temperatur T_1 die Beziehung

$$\frac{d_p \zeta_2}{dT} > \frac{d_p \zeta_3}{dT}$$

Fig. 7.

1) Zeitschrift für phys. Chemie 68 S. 257.

oder $-\eta_2 > -\eta_3$ gelten, und für den Schnittpunkt bei der Temperatur T_2 muß die Beziehung $\frac{d_p \zeta_3}{dT} > \frac{d_p \zeta_2}{dT}$ oder $-\eta_3 > -\eta_2$ erfüllt sein. Beim Schmelzpunkt T_1 muß also bei der Umwandlung in die isotrope Phase Wärme aufgenommen und beim Schmelzpunkt T_2 muß bei derselben Umwandlung Wärme abgegegen werden.

Wenn die ζ_3-Isobare stärker als die ζ_2-Isobare gekrümmt wäre, wenn also $c_{3,p} > c_{2,p}$ wäre, so könnten sich die beiden ζ-Kurven bei Temperaturen unterhalb des Schmelzpunktes T_1 nicht schneiden. Nun lehrt aber die Erfahrung[1]), daß für die spezifischen Wärmen beim konstanten Druck $p = 1$ Atm. und bei Temperaturen in der Nähe des Schmelzpunktes immer die Beziehung $c_{2,p} > c_{3,p}$ zutrifft. Es besteht also die Möglichkeit, daß sich die beiden ζ-Kurven bei einer Temperatur T_2 unterhalb der Gleichgewichtstemperatur T_1 nochmals schneiden. Aber außer dieser Vorbedingung müssen noch zwei weitere Bedingungen erfüllt sein, damit das Sichschneiden der ζ-Isobaren wirklich eintritt.

Die weitere Bedingung ist die, daß oberhalb $T = 0$ $\frac{d_p \zeta_2}{dT} = \frac{d_p \zeta_3}{dT}$ wird, oder daß die Tangenten an die beiden ζ-Isobaren einander parallel werden. Es muß also $\eta_2 - \eta_3 = \frac{R_p}{T} = 0$ werden. Die Schmelzwärme R_p muß also durch den Nullwert gehen, damit unterhalb dieser Temperatur ein zweiter Schmelzpunkt möglich wird. Die Bedingung, die hierfür hinreicht, ist folgende: es muß, bevor die Temperatur auf $T = 0$ gesunken ist, die Gleichung:

$$\zeta_2 = \zeta_3$$

erfüllt sein. Diese Bedingung kann auch in folgenden Formen:

$$\int_{T_2}^{T_1} \frac{d_p \zeta_2}{dT} dT = \int_{T_2}^{T_1} \frac{d_p \zeta_3}{dT} dT \text{ oder } -\int_{T_2}^{T_1} (\eta_2 - \eta_3) dT = 0 \tag{5}$$

$$\text{oder } -\int_{T_2}^{T_1} \frac{R_p}{T} dT = 0$$

geschrieben werden.

Es muß also das Flächenstück, welches zwischen der η_2- und η_3-Isobare bei Temperaturen unterhalb des Schnittpunktes c der beiden Isobaren liegt, Fig. 8, größer sein als das Flächenstück, welches zwischen den beiden η-Isobaren oberhalb des Schnittpunktes

1) Schmelzen und Krystallisieren S. 44.

derselben sich bis zur Gleichgewichtstemperatur T_1 erstreckt, damit die beiden Flächenstücke *a b c* und *c d e* einander gleich werden können.

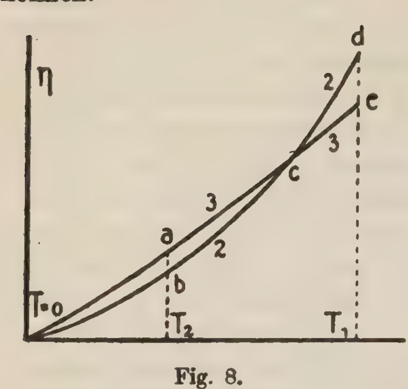


Fig. 8.

In Fig. 8 sind die η-Isobaren entsprechend der Nernst'schen Extrapolation so gezeichnet, daß bei $T = 0$ $\eta_2 = \eta_3$ ist, und die ersten und zweiten Ableitungen von η nach T für $T = 0$ verschwinden.

Der Ausdruck $\frac{c_{2,p} - c_{3,p}}{T}$ ist gleich dem Winkel der Tangenten an die beiden η-Isobaren bei derselben Temperatur. Diese Winkeldifferenz braucht aber ihr Vorzeichen weder bei der Temperatur T_2 noch in der Nähe dieser Temperatur zu ändern, damit die beiden Flächenstücke *a b c* und *c d e* einander gleich werden. Man ersieht also, daß die Bedingung des Auftretens einer zweiten Gleichgewichtstemperatur nicht mit einer Beziehung der beiden spezifischen Wärmen zueinander verknüpft ist.

Die Entscheidung, ob bei einem Stoff eine zweite Gleichgewichtstemperatur auftritt oder nicht, stellt an die Bestimmung der Abhängigkeit der Differenz $(c_{2,p} - c_{3,p})$ besonders bei tiefen Temperaturen hohe Anforderungen, denn zur Ermittlung der Werte $\eta_2 - \eta_3$ müßte man die Abhängigkeit der spezifischen Wärmen von der Temperatur kennen, da

$$\eta_2 - \eta_3 = \int_{T_2}^{T_1} \frac{c_{2,p} - c_{3,p}}{T} dT$$

ist. Es müßte also die Abhängigkeit der spezifischen Wärmen von der Temperatur, besonders bei tiefen Temperaturen sehr genau bekannt sein, da in der Temperaturfunktion, $\frac{c_{2,p} - c_{3,p}}{T}$, T im Nenner auftritt, um auf Grund calorischer Daten beurteilen zu können, ob für den betreffenden Stoff eine zweite Gleichgewichtstemperatur T_2 zu erwarten ist oder nicht.

Wenn auch für viele Stoffe bei normalem Druck nicht einmal die Beziehung $\eta_2 = \eta_3$ bei irgend einer Temperatur erfüllt ist, so kann doch für dieselben Stoffe bei höheren Drucken diese Beziehung erfüllt sein. Denn es gilt allgemein für zwei Phasen die Gleichung:

$$\zeta_2 - \zeta_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - (\eta_2 - \eta_3)\, T + (v_2 - v_3)p.$$

Für das Gleichgewicht beider Phasen wird

$$\zeta_2 = \zeta_3$$

und

$$(\eta_2 - \eta_3)\, T = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + (v_2 - v_3)\, p = R_p\,,$$

wo R_p die gesamte Schmelzwärme, $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ die innere Schmelzwärme und $(v_2 - v_3)p$ die äußere Arbeit beim Schmelzen bedeuten.

Da bei Drucken, die größer sind als der Druck, bei dem $v_2 = v_3$ ist, mit steigendem Druck die äußere Arbeit, $-(v_2 - v_3)p$, gemessen in calorischem Maaß stark anwächst, so kann bei einem höheren Druck sehr wohl $\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + (v_2 - v_3)p = 0$ werden. Ist aber bei irgend einem hohen Druck diese Beziehung erfüllt, so wird bei diesem Druck die Schmelzkurve rückläufig, und für ein gewisses Druckintervall muß es dann bei jedem Druck zwei Gleichgewichtstemperaturen geben.

c. *Die ζ-Flächen und die neutralen Kurven.*

Nachdem wir uns über die Lage der ζ-Isothermen und ζ-Isobaren eines Krystalls und seiner Schmelze unterrichtet haben, können wir uns auch eine Vorstellung von der Lage der ζ-Flächen über der p, T-Ebene machen. Die Skizze eines Modells der ζ-Flächen soll der Vorstellung zu Hilfe kommen (Fig. 9). Der Beschauer sieht von oben etwas schräg von rechts nach links auf das Modell. Die ihm zunächst liegenden Kurven sind voll ausgezogen, die durch Flächen verdeckten Linien sind punktiert. Die ζ-Isothermen t_1, t_2, t_3 und t_4 steigen mit wachsendem Druck, die ζ-Isobaren p_1 und p_2 fallen mit wachsender Temperatur. Die ζ-Fläche des Dampfes, *abc*, schneidet die der anisotropen Zustände in der Kurve *dge* und die der isotropen Zustände in der Kurve *adec*. Diese Schnittkurve endet im kritischen Punkt *c*, und damit endet in *c* auch die Kante, welche der Schnittkurve der ζ-Flächen des Dampfes und der Flüssigkeit entspricht. Daher verlaufen bei Temperaturen oberhalb der des kritischen Punktes *c* die ζ-Isothermen von den kleinsten zu den höchsten Drucken, wie die Isotherme t_4, kontinuierlich, ohne daß auf ihnen ein Knick wie auf den ζ-Isothermen für Temperaturen unterhalb der des kritischen Punktes beim Übergange von Dampf zu Flüssigkeit auftritt. Die ζ-Fläche des Dampfes bildet also nur einen Teil der ζ-Fläche der Flüssigkeit, welche mit dieser kontinuierlich zusammenhängt. Anders verhält sich die ζ-Fläche der anisotropen Zustände, diese ist eine ganz selbständige Fläche, welche die ζ-Fläche der Flüssigkeit respektive die der isotrop-amorphen Zustände in der Kurve *dfe*

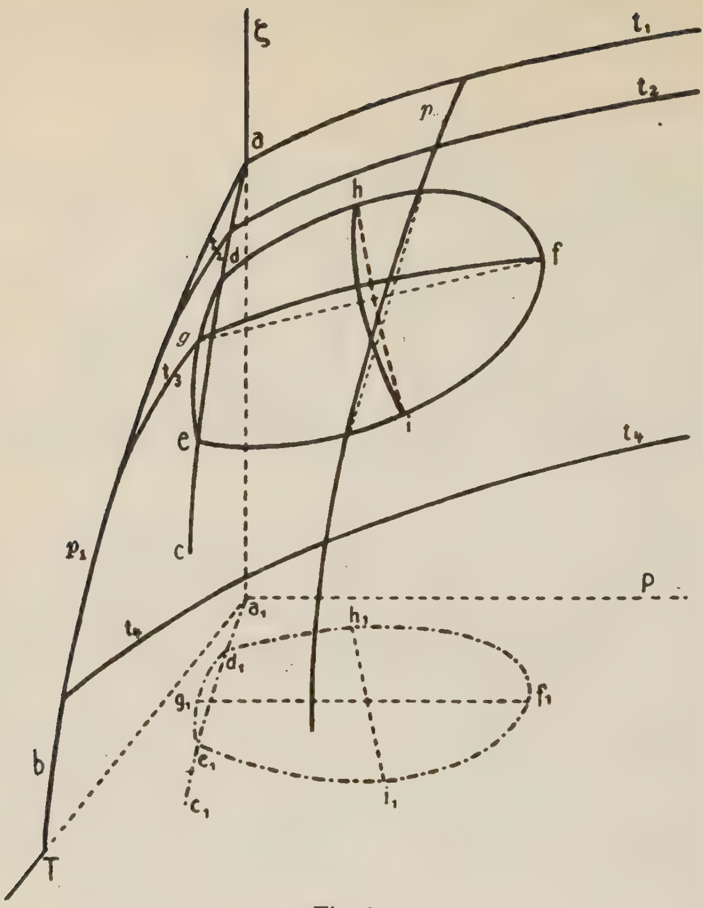


Fig. 9.

schneidet. In dem von der Kurve dfe umschlossenen Gebiet liegt die ζ-Fläche der Flüssigkeit über der ζ-Fläche der anisotropen Zustände. Wenn bei Stoffen, die wir noch nicht kennen, oder bisher noch nicht erkannt haben, die unterkühlte Flüssigkeit in Form eines Glases stabil wird, so würde diesen stabilen Zuständen das Stück der ζ-Fläche zwischen der ζ-Isotherme at_1, und der Schnittkurve dhf entsprechen. Man ersieht also, daß nicht nur die ζ-Fläche des Dampfes sondern auch die der stabilen Zustände des amorphen Stoffes kontinuierlich mit der ζ-Fläche der Flüssigkeit zusammenhängen, indem sie eine Fläche, die der isotropen Zustände bilden.

Die Projektionen der Schnittkurven der ζ-Flächen auf der *pt*-Ebene, welche mit entsprechenden gestrichelten Buchstaben be-

zeichnet sind, sind die bekannten Gleichgewichtskurven. Die Kurve $d_1 g_1 e_1$ ist die Sublimationskurve, die Kurve $e_1 c_1$ die Dampfdruckkurve, die Kurve $a_1 d_1$ die Kurve, auf der der stabile amorphe Stoff mit seinem Dampf im Gleichgewicht ist, und die Kurve $e_1 f_1 d_1$ ist die Schmelzkurve.

Legt man an die ζ-Fläche eines Krystalls und an die seiner Schmelze in demselben pT-Punkt je eine Tangentialebene, so werden diese Ebenen im allgemeinen sich schneiden, nur in einem p, T-Punkt sind die beiden Tangentialebenen einander parallel. Da in diesem Punkt die Beziehungen:

$$\frac{d_T \zeta_2}{dp} = \frac{d_T \zeta_3}{dp} \text{ und } \frac{d_p \zeta_2}{dT} = \frac{d_p \zeta_3}{dT}$$

gelten, so wird in diesem Punkte

$$v_2 = v_3 \text{ und } \eta_2 = \eta_3 \text{ oder } R_p = 0 \text{ sein.}$$

Ferner kann man an die beiden ζ-Flächen noch Tangenten legen, die einander parallel sind. Wenn zwei Tangenten parallel der p-Achse an die beiden ζ-Flächen in zwei übereinanderliegenden Punkten dieser Flächen einander parallel sind, so bedeutet das, daß die Volumen der Phasen 2 und 3 einander gleich sind. Durch diese Punkte gehn auf den beiden ζ-Flächen zwei übereinander liegende Kurven ih, deren Projektion auf der pT-Ebene die neutrale Kurve $i_1 h_1$ ist. In den Zustandspunkten dieser Kurve gilt die Gleichung $v_2 = v_3$. Legt man parallel der T-Achse an jede der beiden ζ-Flächen eine Tangente, so ist, wenn die beiden Tangenten an zwei übereinander liegenden Punkteu der beiden ζ-Flächen parallel sind, für diese beiden Punkte die Gleichung $\eta_2 = \eta_3$ erfüllt. Projiciert man die beiden Kurven, gf, für deren übereinander liegende Punkte diese Gleichung erfüllt ist, so erhält man die neutrale Kurve $g_1 f_1$, auf der die Gleichung $R_p = 0$ erfüllt ist.

Über dem Schnittpunkt der beiden neutralen Kurven $h_1 i_1$ und $g_1 f_1$ liegen die beiden Punkte der beiden ζ-Flächen, deren Tangentialebenen einander parallel sind.

Die Schnittpunkte der neutralen Kurve $h_1 i_1$ mit der Schmelzkurve, die Punkte h_1 und i_1 sind dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen $v_2 = v_3$ ist. Außerdem ist der Punkt i_1 der maximale und der Punkt h_1 der minimale Schmelzpunkt. Der Schnittpunkt f_1 der Schmelzkurve mit der neutralen Kurve $f_1 g_1$ entspricht dem maximalen Schmelzdruck, für den $R_p = 0$ ist.

Die den Punkten h_1 und i_1 auf den ζ-Flächen entsprechenden

Punkte sind dadurch ausgezeichnet, daß eine Tangente parallel der ζp-Ebene in diesen Punkten die Schnitt-Kurve beider ζ-Flächen, also diese beiden Flächen gleichzeitig berührt. Etwas ganz analoges gilt für den Punkt f.

Die Lage der neutralen Kurven ist von größtem Einfluß auf die Form und Entwicklung der betreffenden Gleichgewichtskurve. Betreffs ihres Schnittpunktes ergibt sich, daß derselbe in das von der geschlossen gedachten Gleichgewichtskurve umschlossene Stück der $p\,T$-Ebene fallen muß. Hierbei sind 2 Hauptfälle zu unterscheiden. Es kann der Schnittpunkt der beiden neutralen Kurven wie in Fig. 9 in das Feld realisierbarer Zustände, in dem die Parameter p und T positive, realisierbare Werte besitzen, fallen. Es scheint aber, daß für die allermeisten Stoffe der Schnittpunkt der neutralen Kurven, wie es Fig. 10 veranschaulicht, außerhalb des Feldes realisierbarer Zustände, aber in das von der geschlossen gedachten Schmelzkurve umschlossene Stück der $p\,T$-Ebene zu liegen kommt[1]). Ferner muß die neutrale Kurve, auf der $v_2 = v_3$ ist, steiler verlaufen als die neutrale Kurve, auf der $R_p = 0$ ist[2]).

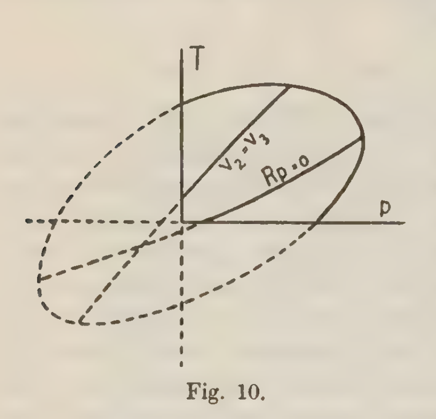


Fig. 10.

Die Tangentialebene an dem kritischen Punkt, c, Fig. 9, beberührt zwei ζ-Flächen, die des Dampfes und die der Flüssigkeit. Die Folge hiervon ist, daß im kritischen Punkt c_1 sowohl die Gleichung $v_1 = v_2$ als auch Gleichung $\eta_1 = \eta_2$ gilt. Dazu kommt, daß der kritische Punkt auf einer Gleichgewichtskurve liegt, infolgedessen gilt für ihn auch die Gleichung:

$$\zeta_1 = \zeta_2,$$

und da

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - (\eta_1 - \eta_2)\,T + (v_1 - v_2)\,p,$$

so gilt für den kritischen Punkt auch die Gleichung:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

1) Für das Benzophenon ergab sich auf Grund von Extrapolationen eine Lage der neutralen Kurven, die der in Fig. 10 dargestellten entspricht. Krystallisieren und Schmelzen S. 39.

2) Krystallisieren und Schmelzen S. 31.

Da die Volumen, Entropien und Energien der beiden Phasen im kritischen Punkt einander gleich sind, so sind auch die beiden Phasen im kritischen Punkt miteinander identisch.

Der Punkt, in dem sich die beiden neutralen Kurven schneiden, in dem also die Gleichungen:

$$v_2 = v_3 \text{ und } \eta_2 = \eta_3$$

gelten, liegt nun nicht auf einer Gleichgewichtskurve, in diesem Punkte ist

$$\zeta_2 > \zeta_3,$$

und da also

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - (\eta_2 - \eta_3)\,T + (v_2 - v_3)\,p > 0$$

ist, so muß in diesem Punkte

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

sein.

d. Isotherme und isobare Kreisprozesse zwischen zwei Gleichgewichtsdrucken oder zwei Gleichgewichtstemperaturen.

Mit Systemen, deren Gleichgewichtskurven in einem kritischen Punkt enden, kann man sich unterhalb der kritischen Temperatur isotherme nicht realisierbare Kreisprozesse ausgeführt denken. Diese Kreisprozesse führen zur Gleichung von Maxwell. Mit Systemen, deren Gleichgewichtskurven von Parallelen zur p-Achse zweimal geschnitten werden, weil diesen Gleichgewichtskurven der kritische Punkt fehlt, können ebenfalls isotherme Kreisprozesse vollzogen werden. Diese Kreisprozesse sind realisierbar zum Unterschiede von dem von Maxwell, und führen zu einer anderen allgemeinen Gleichung als der Kreisprozeß von Maxwell.

Zur Ausführung des Kreisprozesses von Maxwell denkt man sich das Volumen der Flüssigkeit vom Punkte b aus (Fig. 2) auf der Kurve $bfgea$ geändert, wobei die Flüssigkeit in kontinuierlicher Weise in Dampf übergeführt worden wäre. Die hierbei gewonnene Arbeit ist gleich dem Flächenstück $bfgeaki = \int_{v_a}^{v_b} p\,dv$. Zurück kann man den Dampf in Berührung mit der Flüssigkeit auf der Geraden ba führen und ihn so vollständig in Flüssigkeit verwandeln. Die hierbei geleistete Arbeit ist gleich dem Rechteck $abik = -p_1\,(v_a - v_b)$. Da beim isothermen Kreisprozeß die Summe

der Arbeiten gleich Null ist, erhält man die Gleichung:

$$p_1(v_b - v_a) = \int_{v_a}^{v_b} p\,d v_2.$$

Mit Systemen, die bei derselben Temperatur zwei Gleichgewichtsdrucke besitzen, kann man folgenden realisierbaren Kreisprozeß ausführen. Fig. 11 stellt einen Schnitt bei konstanter Temperatur durch die Volumenfläche der Phasen 2 und 3 dar. Man läßt das Volumen der Phase 2 sich vom Punkt a beim Gleichgewichtsdruck p_1 auf der Volumenisotherme ad bis zum Druck des zweiten Gleichgewichtsdrucks p_2 ändern. Wenn die spontane Umwandlungsfähigkeit der Phase 2 in die Phase 3 verschwindend klein ist, so ist dieser Prozeß realisierbar. Die Arbeit ist gleich dem Flächenstück $adhe = \int_{v_2 p_1}^{v_2 p_2} p\,d v_2$. Nun bringt man die Phase 2 mit einer verschwindenden Menge der Phase 3 in Berührung, wodurch die Umwandlung von 2 in 3 eintritt, und beim Gleichgewichtsdruck durch Volumenvergrößerung bis zum Punkte c vollständig gemacht wird. Bezeichnet man die hierbei eintretende Volumenänderung mit $(v_2 - v_3)_{p_2}$, so ist die Arbeit gleich $-p_2(v_2 - v_3)_{p_2}$. Läßt man ferner auf der Phase 3 den Druck von p_2 bis p_1 sinken, so ändert sich das Volumen auf der Kurve cb und die Arbeit ist gleich dem Flächenstück $cbfg = -\int_{v_{3 p_1}}^{v_{3 p_2}} p\,.d v_3$.

Schließlich vergrößert man beim Gleichgewichtsdruck p_1 das Volumen der Phase 3 von b bis a, wobei die Umwandlung von 3 in 2 vor sich geht, und die Arbeit $-p_1 \cdot (v_2 - v_3)_{p_1}$ beträgt. Da beim isothermen Kreisprozeß die Summe der Arbeiten gleich Null ist, so gilt:

$$6) \qquad \int_{v_{2 p_1}}^{v_{1 p_2}} p\,dv_2 = \int_{v_{3 p_1}}^{v_{3 p_2}} p\,dv_3 + p_1 \cdot (v_2 - v_3)_{p_1} + p_2 \cdot (v_3 - v_2)_{p_2}.$$

Es gilt also für die Flächenstücke, welche die Arbeiten bei diesem Kreisprozeß darstellen, die Beziehung, Fig. 11

$$adhe = bcgf + abfe + cdhg,$$

oder, wenn man die Flächenstücke auf der rechten Seite der Gleichung zusammenfaßt, die Beziehung

$$adhe = abcdhe.$$

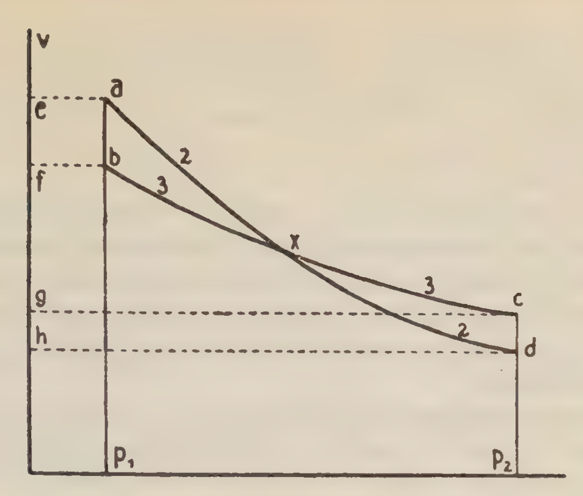


Fig. 11.

Da ferner sich aus Fig. 11 ergibt

$$adhe = abxdhe + abx \quad \text{und}$$
$$abcdhe = abxdhe + cdx,$$

so gilt auch

$$abx = cdx$$

oder

$$\int_{p_1}^{p_x} v_2\, dp - \int_{p_1}^{p_x} v_3\, dp = \int_{p_x}^{p_2} v_2\, dp - \int_{p_x}^{p_2} v_3\, dp.$$

Wenn $abx = cdx$ ist, so sind auch folgende Flächenstücke einander gleich:

$$axdp_2p_1 = bxcp_2p_1$$

oder

7) $$\int_{p_1}^{p_2} v_2\, dp = \int_{p_1}^{p_2} v_3\, dp \quad \text{oder} \quad \int_{p_1}^{p_2} (v_2 - v_3)\, dp = 0.$$

Die Gleichung 6 gibt uns eine analytische Formulierung der aus dem Kreisprozeß gefolgerten geometrischen Beziehungen, sie sagt aber nichts über die den Wegen ad und bc entsprechenden Arbeitsgrößen.

Zur Gleichung 7) gelangt man auch mit Hülfe der ζ-Funktion. Es gelten die Gleichungen:

$$\zeta_{2p_2} = \zeta_{2p_1} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{d_T \zeta_2}{dp}\, dp$$

$$\zeta_{3p_2} = \zeta_{3p_1} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{d_T \zeta_3}{dp}\, dp$$

und da $\zeta_{2p_2} = \zeta_{3p_2}$ und $\zeta_{2p_1} = \zeta_{3p_1}$ ist, so ist auch

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{d_T \zeta_2}{dp} dp = \int_{p_1}^{p_2} \frac{d_T \zeta_3}{dp} dp \quad \text{oder} \quad \int_{p_1}^{p_2} (v_2 - v_3) dp = 0.$$

Wäre eine Zustandsgleichung, welche die Abhängigkeit der Volumen v_2 und v_3 bei konstanter Temperatur vom Druck p angibt, bekannt, so könnte die Lage des Schnittpunktes, x der beiden Volumenisothermen v_2 und v_3 angegeben werden, und wenn p_1 bekannt wäre, so wären durch die Beziehung 6) auch $(v_3 - v_2)_{p_2} \cdot p$ und p_2 berechenbar.

Bei einem isothermen Kreisprozeß ist nicht nur die Summe der Arbeiten gleich Null, sondern auch die Summe der vom System aufgenommenen und abgegebenen Wärmen ist gleich Null. Es gilt daher die Beziehung:

$$8) \qquad -Q_{2p_2p_1} + Q_{3p_2p_1} + R_{p_1} + R_{p_2} = 0$$

wo $Q_{2p_2p_1}$ und $Q_{3p_2p_1}$ die Kompressionswärmen der Phasen 2 und 3 zwischen den Drucken p_1 und p_2, R_{p_1} und R_{p_2} die gesamten Umwandlungswärmen bei den Gleichgewichtsdrucken p_1 und p_2 bedeuten.

Da nach Gleichung 6) die Differenz der Kompressionsarbeiten gleich der Summe der äußeren Umwandlungsarbeiten ist, so gilt diese Beziehung auch für die im Wärmemaß gemessenen Arbeitsgrößen, es ist also:

$$-Q_{2p_2p_1} + Q_{3p_2p_1} = p_1 \cdot (v_2 - v_3)_{p_1} + p_2 \cdot (v_3 - v_2)_{p_2}.$$

Kombiniert man diese Gleichung mit Gleichung 8), so erhält man

$$9) \qquad p_1(v_2 - v_3)_{p_1} + R_{p_1} = p_2(v_2 - v_3)_{p_2} - R_{p_2}.$$

Zu beachten ist, daß $(v_2 - v_3)_{p_2}$ und R_{p_2} das entgegengesetzte Vorzeichen von $(v_2 - v_3)_{p_1}$ und R_{p_1} haben. R_{p_2} bezieht sich auf die Umwandlung der Phase 2 in die Phase 3 und R_{p_1} auf die in umgekehrter Richtung vor sich gehende Umwandlung. Man könnte also, wenn R_{p_1} und die Zustandsgleichung bekannt sind, die Werte von R_{p_2} und $(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)_{p_2}$ angeben.

Im Gegensatz zum isothermen Kreisprozeß gibt der isobare Kreisprozeß nicht ein weiter zu verwendendes Resultat. Für den isobaren Kreisprozeß ergibt sich nämlich:

$$\left[(v_2-v_3)_{pT_1}-\int_{T_2}^{T_1}\frac{d_p v_2}{dT}\,dT+(v_2-v_3)_{pT_2}+\int_{T_2}^{T_1}\frac{d_p v_3}{dT}\,dT\right]\cdot p$$

$$=\left[R_{pT_1}+R_{pT_2}+\int_{T_2}^{T_1}c_{2,p}\,dT-\int_{T_2}^{T_1}c_{3,p}\,dT\right]\frac{T_1-T_2}{T_2}.$$

Da die Summe der linken Seite gleich Null ist, so gilt das auch für die Summe der rechten Seite der Gleichung.

Mit Hilfe der ζ-Funktion läßt sich, wie wir gesehen haben, die Gleichung 5) ableiten, welche, wenn die Abhängigkeit von $\frac{R_p}{T}$ von der Temperatur und die Gleichgewichtstemperatur T_1 bekannt sind, die Berechnung von T_2 ermöglicht.

e. *Die Möglichkeiten, welche die Thermodynamik zuläßt, und die bisherige Erfahrung.*

Wie wir sahen, lassen die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie zwei Arten von Gleichgewichtskurven zu. Die eine dieser beiden Gruppen von Gleichgewichtskurven ist durch einen kritischen Punkt ausgezeichnet, der anderen Gruppe fehlt dieser Punkt. Infolge dessen sind die Zustandsfelder zweier Phasen, deren Gleichgewichtskurven einen kritischen Punkt haben, nur unvollständig begrenzt, während die Zustandsfelder der Phasen, deren Gleichgewichtskurven der kritische Punkt fehlt, allseitig begrenzt sein müssen; indem ihre Zustandsfelder entweder von in sich geschlossenen Kurven, oder von Stücken solcher Kurven und anderer Gleichgewichtskurven oder der p-Achse begrenzt sein können.

Diese ganz allgemeinen Forderungen werden auch von der Erfahrung bestätigt, denn man hat die Existenz eines kritischen Punktes nur für die Gleichgewichtskurven der Systeme, bestehend aus Dampf und Flüssigkeit, nachweisen können. Für Systeme aber, in denen mindestens eine anisotrope Phase auftritt, sind kritische Punkte nicht nachgewiesen worden. Allerdings ist nur für wenige anisotrope Phasen der Nachweis geliefert worden, daß ihre Zustandsfelder vollständig begrenzt sind, denn in der Regel erstrecken sich die betreffenden Zustandsfelder nach zu hohen Drucken hin; aber es ist immerhin von Bedeutung, daß dieser Nachweis in einigen Fällen mit Sicherheit geliefert ist. Die Zustandsfelder folgender

Phasen[1]) sind vollständig umgrenzt worden: Oxalsaures Methyl I, Orthokresol I, Schwefel monoklin, Jodmethylen I und II und Ammoniumnitrat III, während man für Essigsäure I, Eis I und IV, Phenol I und Jodsilber I die Begrenzung ihres Zustandsfeldes mit ziemlicher Sicherheit angeben kann.

Die Schmelzkurven sind diejenigen Gleichgewichtskurven, die am nächsten der voll ausgebildeten, in sich geschlossenen, idealen Gleichgewichtskurve kommen dürften, weil sie sich über ein besonders großes Temperatur- und Druckgebiet erstrecken. Für etwa 35 Stoffe wurden die Koordinaten der Schmelzkurven bis zum Druck 3000 kg pr. 1 qcm festgelegt. Mit Sicherheit konnte nachgewiesen werden, daß die Schmelzkurven sich zur p-Achse hin krümmen, wie man es zu erwarten hat, wenn die Zustandsfelder anisotroper Phasen von ihren Schmelzkurven umschlossen werden. Ferner konnte bei der Schmelzkurve des Glaubersalzes der maximale Schmelzpunkt überschritten werden. Der maximale Schmelzpunkt[2]) des Glaubersalzes liegt zwischen 500—1000 kg pro 1 qcm und 0,30° über dem Schmelzpunkt beim Druck 1 kg pro 1 qcm, und es konnte durch direkte Messungen gezeigt werden, daß zwischen jenen Druckgrenzen die Volumenänderung beim Schmelzen durch den Nullwert geht. Allerdings schmilzt dieser Stoff nicht zu einer homogen Flüssigkeit, dieses hydratische Salz spaltet sich nämlich beim Schmelzen in wenig wasserfreies Salz und viel Flüssigkeit. Diesem Umstande ist aber eine besondere Bedeutung für den Verlauf der Schmelzkurve nicht zuzuschreiben, da für die monovarianten Zweistoffsysteme ähnliche Regeln wie für die monovarianten Einstoffsysteme betreffs Verlaufs der Schmelzkurve gelten.

Immerhin muß zugegeben werden, daß für Stoffe die zu homogenen Flüssigkeiten schmelzen, die maximale Schmelztemperatur nie überschritten worden ist, da sie bei den bisher untersuchten Stoffen bei Drucken von über 10000 kg und auch weit über diesem Druck liegen wird. Daß aber auch bei diesen Stoffen eine maximale Schmelztemperatur aller Wahrscheinlichkeit nach existiert, ist auf Grund folgender Erfahrungen sehr wahrscheinlich. Mit wachsendem Druck nehmen die Volumenänderungen beim Schmelzen auf den ansteigenden Schmelzkurven ab, während die gesamte Schmelzwärme sich nicht merklich ändert oder sogar ein wenig wächst. Für die Schmelzkurven des Benzols, Naphtalins, Äthylen-

1) Krystallisieren und Schmelzen 1903. Diese und die folgenden Resultate wird man leicht an Hand des Verzeichnisses der untersuchten Stoffe S. 347 auffinden.

2) Zeitschrift f. phys. Chem. Bd. 46, S. 818.

dibromides, Urethans, Trimethylcarbinols, Dimethyläthylkarbinols und des Phosphors ergab sich die Schmelzwärme zwischen 0—2000 kg innerhalb der Fehlergrenzen der Bestimmung als unabhängig vom Druck, während die Volumenänderung beim Schmelzen in diesem Druckintervall sehr deutlich abnahm. Beim Benzol sank mit steigendem Druck die Volumenänderung auf fast den halben und beim Dimethyläthylcarbinol auf fast den dritten Teil ihres Wertes beim Druck $p = 1$ kg. Beim p-Xylol und Benzophenon war eine geringe Zunahme der Schmelzwärme bei steigendem Druck und wieder eine erhebliche Abnahme der Volumenänderung zu verzeichnen. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß die Volumenänderung beim Schmelzen bei genügender Drucksteigerung in einem Zustandspunkt der Schmelzkurve durch den Nullwert gehen wird, während die Schmelzwärme in diesem Zustandspunkt einen merklichen Wert besitzt.

Von besonderer Beweiskraft für die Existenz von Gleichgewichtskurven ohne kritischen Punkt ist der Nachweis, daß es Gleichgewichtskurven gibt, die bei demselben Druck zwei Gleichgewichtstemperaturen besitzen, die also in einem bestimmten Zustandspunkt, indem ihr $\frac{dT}{dp}$-Wert durch den Wert ∞ geht, rückläufig werden. Die Gleichgewichtskurve der Eisarten I und III wird im Zustandspunkt: -43^0 und 2255 kg, rückläufig. Der Nachweis, daß in diesem Punkte die gesamte Umwandlungswärme durch den Nullwert geht, wäre auf calorimetrischem Wege schwerlich zu erbringen, doch konnte er mit Sicherheit auf folgendem Wege erbracht werden. Aendert man nämlich das Volumen eines im Gleichgewicht befindlichen monovarianten Systems mit ziemlicher Geschwindigkeit, so wird nach jeder Volumenänderung eine Temperaturänderung eintreten, da der Druck und die Temperatur sich auf der Gleichgewichtskurve ändern, der Druck wird sich also während der Volumenänderung und darauf im entgegengesetzten Sinne ändern. Im Zustandspunkte, in dem die Gleichgewichtskurve der Eisarten I und III rückläufig wird, ändert sich während der möglichst schnell ausgeführten Volumenänderungen der Druck nicht merklich, während er sich bei Temperaturen oberhalb und unterhalb -43^0 recht merklich ändert. Es ist damit also der Nachweis erbracht, daß die gesamte Umwandlungswärme in dem Punkte der Gleichgewichtskurve, in welchem $\frac{dT}{dp} = \infty$ ist, durch den Nullwert geht.

Rückläufig werden ferner noch die Gleichgewichtskurven der

beiden instabilen Eisarten, Eis II und Eis IV, bei −34° und 2252 kg, der beiden Krystallarten des Phenols bei etwa 55° und 2032 kg und wahrscheinlich die der beiden Jodsilber-Formen I und III bei einer Temperatur unter 0° und bei etwa 3200 kg[1]).

Wir haben uns also überzeugt, daß die Thermodynamik zwei Arten von Gleichgewichtskurven zuläßt, daß die Atomistik die Existenz zweier Gruppen von Gleichgewichtskurven fordert und daß die Erfahrung die Forderungen der Atomistik stützt.

1) Zeitschrift f. phys. Chem. Bd. 75, S. 733.

Zum Turbulenzproblem.

Von

Georg Hamel in Brünn.

Vorgelegt in der Sitzung vom 24. März 1911 von F. Klein.

Die hydrodynamische Erklärung der von Reynolds experimentell erforschten turbulenten Bewegung muß noch immer eine ungelöste Aufgabe genannt werden; selbst die Feststellung des kritischen Wertes der mittleren Geschwindigkeit, bei der die Parallelbewegung plötzlich in die turbulente Bewegung übergeht, jene also labil wird, ist noch nicht gelungen.

A. Sommerfeld hat zwar in seinem bekannten Vortrag auf dem internationalen Mathematiker-Congreß in Rom die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit auf eine transcendente Gleichung zurückgeführt, aber ich habe prinzipielle Bedenken gegen seine Methode. Sommerfeld arbeitet mit Partikularlösungen der Form $e^{\beta t}\varphi(x, y)$; aus solchen aber scheint man mir zwar bei $\Re(\beta) > 0$ auf Labilität, doch bei $\Re(\beta) < 0$ nicht sicher auf Stabilität schließen zu können; auch dann nicht, wenn sich die allgemeine Lösung aus solchen Partikularlösungen zusammensetzen läßt. Es könnte sehr wohl Lösungen geben, deren Energie zu Anfang einen festgehaltenen kleinen Wert hat und doch einen beliebig vorgegebenen Wert überschreitet. Ich werde an anderer Stelle ein Beispiel zu dieser Behauptung geben[1]). Nun scheinen Rechnungen, in denen mich einer meiner Hörer, Herr Alfred Winkler, unterstützt hat, zu zeigen, daß bei den Sommerfeld'schen Partikularlösungen β immer einen negativ reellen Bestandteil hat, so daß die Parellelbewegung stabil wäre, wenn ich eben nicht den vorhin angedeuteten Schluß anzweifeln müßte.

1) Monatshefte für Math. u. Phys. 1911.

Ich verfolge daher den Weg weiter, den schon Reynolds und dann weiter H. A. Lorentz eingeschlagen hat: Ich suche den Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit v, oberhalb dessen immer die Energie einiger störender Bewegungen zunimmt, während sie unterhalb stets abnimmt.

Wir wollen diesen Wert der mittleren Geschwindigkeit den kritischen nennen, unterhalb dessen also Stabilität herrscht, während es oberhalb desselben stets Störungen gibt, deren Energie anfangs zunimmt, (womit allerdings noch keine Labilität garantiert ist.)

Während nun Lorentz nur ein Beispiel rechnet, für welches Energiezunahme stattfindet, das aber außer seiner fehlenden Allgemeinheit noch den Mangel hat, in den Ableitungen der Geschwindigkeit unstetig und daher wohl unrealisierbar zu sein, komme ich zu einer bestimmten Formulierung: Die kritische Geschwindigkeit (im obigen Sinne) ist wesentlich der erste Eigenwert einer linearen Integralgleichung, deren Kern aus der Green'schen Funktion der Differentialgleichung

$$\Delta^2 \varphi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \varphi = 0$$

zu bilden ist, d. h. der Lösung dieser Differentialgleichung für den unendlich langen Parallelstreifen, welche sich an der Stelle ξ, η wie

$$r^2 \lg r \qquad (r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)$$

verhält und am Rande nebst ihrer ersten Normalableitung verschwindet.

* * *

Wasser ströme in einem Kanal, dessen Breite von $y = 0$ bis $y = 1$ reiche, und dessen Länge von $x = -\infty$ bis $x = \infty$ gehe. Das Problem sei zweidimensional. Zunächst erfolge die Bewegung parallel den Wänden: $a(y)$ sei die Geschwindigkeit, $v = \int_0^1 a(y)dy$ die mittlere Geschwindigkeit.

Für den Poiseuille'schen Fall fester Wände ist

$$a = 6vy(1-y);$$

für den einfacheren, von Lorentz, Sommerfeld u. a. bevorzugten Fall, daß sich die eine Wand mit der Geschwindigkeit $2v$

in Richtung des Wassers bewegt, ist

$$a = 2vy.$$

Nun werde die Parallelbewegung gestört; bei Vernachlässigung von quadratischen Gliedern erhält man aus den Stokes'schen Grundgleichungen unter Eliminierung des Druckes

$$\frac{\partial}{\partial t}\varDelta\psi + a\frac{\partial\varDelta\psi}{\partial x} - a''\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\nu}{\mu}\varDelta\varDelta\psi. \tag{1}$$

ψ ist die Stromfunktion der überlagerten Störung, so daß

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

die Geschwindigkeitskomponenten sind; ν ist der Zähigkeitskoeffizient, μ die spezifische Masse des Wassers. Am Rande müssen die Zusatzgeschwindigkeiten Null sein, also ψ constant und $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$ sein; da aber die mittlere Geschwindigkeit ungeändert bleiben soll, sind die constanten Werte von ψ an beiden Rändern gleich, man kann sie demnach gleich Null setzen. Also Randbedingungen:

$$\psi \text{ und } \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ gleich Null für } y = 0 \text{ und } y = 1. \tag{2}$$

Außerdem soll ψ mit seinen Ableitungen für $x = \pm\infty$ hinreichend stark verschwinden.

Aus der Differentialgleichung (1) folgt, nach Multiplikation mit ψ, Integration über das ganze Strömungsgebiet und Umformung durch partielle Integration unter Benutzung von (2)

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\int (v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy + \int\int a'\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx\,dy = \frac{\nu}{\mu}\int\int(\varDelta\psi)^2\,dx\,dy. \tag{3}$$

Aus dieser, schon von Lorentz aufgestellten Gleichung folgt, daß die gesamte Energie der Störung dann und nur dann zunimmt, wenn

$$\int\int a'\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx\,dy > \frac{\nu}{\mu}\int\int(\varDelta\psi)^2\,dx\,dy \tag{4}$$

ist. Daß das erste Integral Null oder negativ sei, kommt also für unsere Aufgabe nicht in Frage; wir können ohne Beschrän-

kung der Allgemeinheit

$$(4') \qquad \iint a' \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} dx\,dy = v$$

für die Störung annehmen (a' ist ja proportional v!), so daß die Bedingung der Labilität

$$(4'') \qquad J \equiv \iint (\Delta\psi)^2 dx\,dy < \frac{\mu}{\nu} v$$

lautet.

Sei nun J_0 das Minimum von J bei allen möglichen ψ, welche (4') erfüllen und die Randbedingungen (2), so wird man vermuten, daß aus $J_0 = \frac{\mu}{\nu} v$ das kritische v zu berechnen ist.

Folgender Einwand muß nur noch untersucht werden: wähle ich irgend ein ψ_0 den Randbedingungen (2) entsprechend, so kann ich aus (1) den Zuwachs

$$(5) \qquad d\Delta\psi = \left(\frac{\nu}{\mu}\Delta\Delta\psi_0 - a\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x} + a''\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)dt$$

berechnen, den $\Delta\psi$ in der Zeit dt erfährt. Der entsprechende Zuwachs von ψ selbst muß nun nebst seiner Ableitung $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ am Rande verschwinden; das wird sich aber ohne Einschränkung von ψ_0 nicht erreichen lassen; soll

$$(6) \qquad \Delta\psi = F(x, y)$$

so integrierbar sein, daß ψ und $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ am Rande Null sind, so muß F gewisse Bedingungen erfüllen, die wir nachher aufstellen wollen.

* * *

Die hier auftretende Schwierigkeit wird plastischer hervortreten, wenn ich den analogen, aber einfacheren Fall der **Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

behandle.

Man sagt gewöhnlich, das Integral dieser Gleichung sei bestimmt, wenn gegeben ist

1) $\psi = 0$ für $y = 0$ und $y = 1$ für alle $t \geqq 0$.

2) ψ für $t = 0$ und zwischen $y = 0$ und $y = 1$ als reguläre,

in eine Fourier'sche Reihe entwickelbare Funktion: $\psi_0 = \sum a_n \sin n\pi y$. Das Integral sei dann $\psi = \sum a_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi y$.

Das ist richtig; doch ist zu beachten, daß im allgemeinen für $t = 0$ die Differentialgleichung **nicht** erfüllt ist, indem

$$\text{obwohl } \lim_{t=0} \psi = \psi_0,$$

$$\text{doch } \lim \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \text{ nicht gleich } \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}$$

ist. Soll die Differentialgleichung auch für $t = 0$ erfüllt sein, so genügt die 3te Bedingung:

3) Es muß $\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}$ am Rande Null sein. (Abgesehen von gewissen Regularitätsbedingungen, z. B. daß der Differenzenquotient von $\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2}$ unter einer festen Grenze bleibt.)

Aehnlich liegt die Sache beim hydrodynamischen Problem, doch ist sie insofern schwieriger und diese Schwierigkeit wesentlicher, als sich das Erfülltsein der Differentialgleichung für $t = 0$ nicht durch eine bloße Randbedingung wie vorhin erzwingen läßt, die nur eine geringe Modifikation des Anfangswertes ψ_0 am Rande erfordert.

Ich will hier das Analogon nur kurz skizzieren, da ich es nicht weiter brauche.

Setzt man ψ in der Form an:

$$\psi = \Re \int_0^\infty dn\, e^{inx} \sum_m c_{n,m} e^{\lambda_{n,m} t} \varphi_{n,m}(y), \tag{7}$$

so müssen, soll (1) erfüllt sein, die φ den linearen, homogenen Differentialgleichungen 4.0. genügen

$$\lambda(\varphi'' - n^2\varphi) + in(a\varphi'' - an^2\varphi - a''\varphi) = \frac{\nu}{\mu}(\varphi^{IV} - 2n^2\varphi'' + n^4\varphi)$$

mit den Randbedingungen, (2) entsprechend: φ und $\varphi' = 0$ für $y = 0$ und $y = 1$. Solche Lösungen werden nur für bestimmte Eigenwerte $\lambda_{n,m}$ existieren, die $\varphi_{n,m}$ sind die zugehörigen Eigenfunktionen. Man wird dann jedenfalls jedes ψ_0, das (2) erfüllt, in der Form

$$\psi_0 = \Re \int_0^\infty dn\, e^{inx} \sum_m c_{n,m} \varphi_{n,m}(y) \tag{8}$$

darstellen können; auch wird das entsprechende ψ der Formel (7)

die Randbedingungen (2) erfüllen, für $t = 0$ in ψ_0 übergehen und für $t > 0$ die Differentialgleichung (1) erfüllen; nur eben nicht für $t = 0$.

Soll aber die vorausgesetzte Anfangsstörung ψ_0 mechanisch möglich sein, so wird man das Erfülltsein der Differentialgleichung (1) gerade für den Anfang $t = 0$ bei endlichen Kräften und endlichen Beschleunigungen fordern müssen.

Die Zusatzbedingung, die deshalb ψ_0 außer (2) noch erfüllen muß, und die sich zunächst so formulieren läßt, daß der aus (5) zu bestimmende Zuwachs $d\psi$ den Randbedingungen (2) ebenfalls genügen muß, läßt sich nun nicht wie bei der Wärmeleitungsgleichung auf eine bloße Randbedingung zurückführen. Gleichwohl ist die vermutete Berechnung des kritischen v richtig.

* * *

Wir müssen die Hülfsaufgabe lösen: wann hat

(6) $$\Delta\psi = F$$

ein Integral, daß selbst nebst seiner Normalableitung am Rande des gegebenen Bereiches verschwindet?

Aus dem Green'schen Satze folgt sofort als notwendig, daß

$$\iint F \,.\, U dx\, dy = 0$$

sein muß für alle harmonischen Funktionen U. Aber die Bedingung ist auch hinreichend.

Seien G_1 und G_2 die beiden Green'schen Funktionen des Bereiches: $G_1 = 0$ am Rande, $\frac{\partial G_2}{\partial n} = 0$ am Rande, während sich beide an der Stelle $x = \xi, y = \eta$ wie lgr verhalten, so ist sowohl

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int G_1 F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

als auch $$\psi = \frac{1}{2\pi}\int G_2 F\, d\xi\, d\eta + \text{const},$$

also $$\int (G_1 - G_2) F\, d\xi\, d\eta = \text{const.}$$

hinreichend. $G_1 - G_2$ ist aber eine reguläre harmonische Funktion, also ist die Konstante Null und bewiesen, daß die Orthogonalität von F zu allen harmonischen Funktionen auch hinreicht, die obige Frage zu bejahen.

In unserem Falle ist nun nach (5) bis auf den Faktor dt

$$F \equiv \frac{\nu}{\mu} \varDelta\varDelta\psi_0 - a\frac{\partial \varDelta\psi_0}{\partial x} + a'' \frac{\partial \psi_0}{\partial x}.$$

Es ist also noch die Bedingung zu erfüllen

$$\text{(9)} \qquad \iint\left(\frac{\nu}{\mu}\varDelta\varDelta\psi_0 - a\frac{\partial \varDelta\psi_0}{\partial x} + a''\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right) U dx dy = 0$$

für alle harmonischen U.

Nach einigen partiellen Integrationen formt sich (9) mit Beachtung von (2) um in

$$\text{(10)} \quad \frac{\nu}{\mu}\int\left(\frac{\partial \varDelta\psi_0}{\partial n} U - \varDelta\varphi_0 \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds + 2\iint \psi_0 a' \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} dx dy = 0.$$

Man kann demnach folgenden Satz aussprechen:

„Es sei J_0 die untere Grenze der Werte des Integrals

$$J = \iint (\varDelta\psi_0)^2 dx dy,$$

welche dieses für alle Funktionen ψ_0 annehmen kann, welche die Randbedingungen (2), die Gleichung (4′) und die obige Bedingung (10) erfüllen — wo U die Reihe aller harmonischen Funktionen durchläuft — dann ist die kritische Geschwindigkeit

$$v = \frac{\nu}{\mu} J_0.\text{“}$$

* * *

Es wird nun behauptet, daß die im obigen Satze genannte untere Grenze J_0 keine andere ist als das Minimum von J, welches bloß die Randbedingungen (2) und die Nebenbedingung (4′) erfüllt, mit andern Worten, daß es immer Funktionen ψ_0 gibt, für die (4′), (2), (10) erfüllt ist, und deren J sich von dem Minimum J_0 um beliebig wenig unterscheidet.

Den Beweis skizziere ich kurz:

Es genügt, (10) für eine Reihe von harmonischen Funktionen auszusprechen, aus denen sich alle anderen linear mit konstanten Koeffizienten zusammensetzen lassen. Solche Funktionen sind:

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, nx \operatorname{sinhyp} ny \quad \text{und} \quad \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, nx \operatorname{sinhyp} n(y-1)$$

für alle n.

Nehmen wir nun als ψ_0 in dem zweifachen Integral in (10) die Funktion, welche das Minimumsproblem löst, fassen aber (10) als Gleichung für noch unbekannte Randwerte $\frac{\partial \Delta \psi_0'}{\partial n}$ einer neuen Funktion ψ_0' auf, während $\Delta \psi_0$ am Rande die Werte habe, die der Extremallösung ψ_0 entsprechen, so lassen sich aus (10) die Fourierkoeffizienten von $\frac{\partial \Delta \psi_0'}{\partial n}$ einer neuen Funktion ψ_0' an beiden Rändern berechnen. Da ψ_0 für $x = \infty$ hinreichend stark gegen Null gehen soll, so konvergiert die Quadratsumme der Fourierkoeffizienten und daher bestimmen sie nach dem Riesz-Fischerschen Satze die Randwerte $\frac{\partial \Delta \psi_0'}{\partial n}$.

Nun bilden wir uns aus ψ_0 die neue Funktion ψ_0' dadurch, daß wir ψ_0 nur ein wenig am Rande ändern, so daß ψ_0, $\frac{\partial \psi_0}{\partial n}$, $\Delta \psi_0$ am Rande bleiben, $\frac{\partial \Delta \psi_0'}{\partial n}$ aber die neuen Werte annimmt. Man kann die Abänderung so treffen, daß alle $\int\int \psi_0 a' \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} dx\, dy$ erhalten bleiben, so daß nunmehr (10) erfüllt ist. Nimmt man den Randstreifen, in dem man ψ_0 abändert, hinreichend schmal, so wird sich J und das Integral (4) beliebig wenig ändern. Letzteres bringt man dadurch auf seinen alten Wert, daß man ψ_0' mit einem Faktor multipliziert, der nur wenig von 1 entfernt sein wird. Wegen der Homogenität in ψ bleibt (10) erfüllt; J ändert sich dabei abermals um einen Wert, der beliebig klein sein wird.

Sei $\psi_0' - \psi_0 = \chi$.

Um den angedeuteten Beweis durchzuführen, wird man so vorgehen:

Man nehme ein beliebig schmales Randgebiet, am inneren Rande seien χ, $\frac{\partial \chi}{\partial n}$, $\Delta \chi$, $\frac{\partial \Delta \chi}{\partial n}$ alle Null, am äußeren Rande ebenfalls Null, bis auf $\frac{\partial \Delta \chi}{\partial n}$, das gleich $\frac{\partial \Delta \psi_0'}{\partial n} - \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial n}$ sei.

Man bestimme nun χ des weiteren so, daß etwa

$$\int\int (\Delta^2 \chi)^2\, dx\, dy$$

über den Randstreifen ein Minimum werde, während alle

$$\int\int \chi a' W\, dx\, dy = 0 \tag{11}$$

seien für alle harmonischen Funktionen W.

Als Differenzialgleichung für χ erhält man

(12) $$\varDelta^4\chi + a' W = 0,$$

wo W die Reihe aller harmonischen Funktionen durchläuft, oder also

(12') $$\varDelta\left(\frac{1}{a'}\varDelta^4\chi\right) = 0.$$

Nun setze man

$$\chi a' = \varDelta w$$

und bestimme w weiter dadurch, daß am Rande des Gebietes $w = 0$ sei.

Dann sagt nach Früherem (11) aus, daß auch $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ ist.

Aus (12') aber wird

(12'') $$\varDelta\left(\frac{1}{a'}\varDelta^4\left(\frac{1}{a'}\varDelta w\right)\right) = 0,$$

eine Differentialgleichung 12. Ordnung für eine Funktion w, die am Rande nebst ihren 5 ersten Normalableitungen gegeben ist.

w ist aber dadurch vollständig bestimmt und es wird nebst den 4. Ableitungen endlich bleiben, wenn man das Randgebiet unendlich klein werden läßt. Diese letztere Behauptung läßt sich mittels der zugehörigen Green'schen Funktion G führen, die sich an der Stelle ξ, η wie $r^{10} lg\, r$ verhält, deren 6. Normalableitung wegen $w, \frac{\partial w}{\partial n}, \varDelta w, \frac{\partial \varDelta w}{\partial n}, \varDelta\varDelta w = 0$ in der Darstellung von w allein vorkommt, und deren 10. Ableitungen nur logarithmisch unendlich werden. Läßt man nun die innere Grenze des Randstreifens in die äußere übergehen, so wird G in die entsprechende Green'sche Funktion des ganzen Gebietes übergehen, deren 6. bis 9. Ableitungen unter einer festen Grenze bleiben, während die 10. nur logarithmisch unendlich wird. Also bleiben auch in der Grenze $\chi = \frac{1}{a'}\varDelta w$ und $\varDelta\chi$ endlich, so daß die Integrale J und (4') wegen der beliebigen Kleinheit des Bereiches nur beliebig kleine Aenderungen erfahren.

Die Existenz der Green'schen Funktion wird man nach der Vorarbeit A. Gutzmer's (Liouville's Journal IV, t. 6. 1890) ebenso beweisen, wie dies A. Haar in diesen Nachrichten (7. Juli 1907) für $\varDelta^2 U = 0$ getan hat.

* * *

Es ist also tatsächlich das kritische v durch

$$v = \frac{\nu}{\mu} J_0$$

gegeben, wo J_0 das Minimum von

$$\iint (\Delta\psi_0)^2 \, dx\, dy$$

ist, während

$$\iint a' \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} dx\, dy = v \tag{4'}$$

und die Randbedingungen (2) erfüllt sind.

Dieses Variationsproblem führt aber auf die Differentialgleichung

$$\Delta\Delta\psi + \lambda\left(2a'\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} + a''\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0. \tag{13}$$

Das Minimum ist infolge dessen

$$J_0 = 2\lambda v.$$

Es muß also das kleinste λ gesucht werden, für welches (13) nebst (2) erfüllbar ist. Sei G die entsprechende Green'sche Funktion von

$$\Delta\Delta\psi = 0,$$

deren Existenz A. Haar bewiesen hat, so folgt aus (13)

$$\psi = \frac{\lambda}{8\pi}\iint\left(2a'\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta} + a''\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) G(x, y;\ \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

oder nach partieller Umformung die lineare Integralgleichung

$$\psi = \lambda v \iint \psi . \quad K(x, y;\ \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{14}$$

wo der Kern

$$K = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{v}\left(2a'\frac{\partial^2 G}{\partial\xi\,\partial\eta} + a''\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)$$

nur eine logarithmische Unstetigkeit aufweist.

Damit ist die Berechnung der kritischen Geschwindigkeit auf die Berechnung des ersten Eigenwertes einer linearen Integralgleichung (14) zurückgeführt.

Ich hoffe, auf die numerische Berechnung zurückkommen zu können.

Brünn, den 21. März 1911.

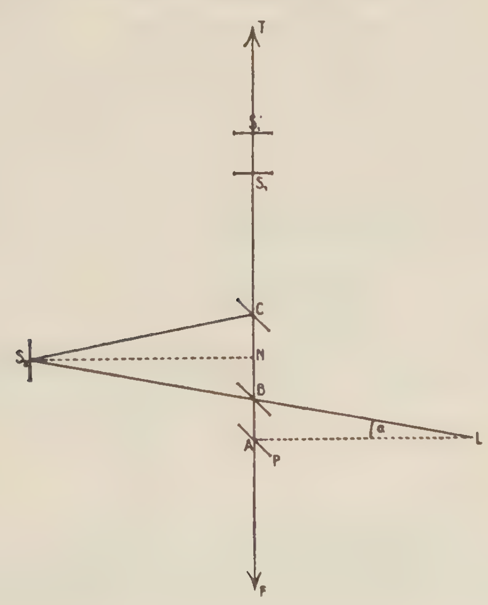
Zur Theorie des Interferenzversuches von Michelson.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 27. Mai. 1911.

Der berühmte Versuch von Michelson bildet zur Zeit noch das wesentliche Fundament der Relativitätstheorie. Die folgenden auf ihn bezüglichen Betrachtungen sind daher vielleicht nicht ohne Interesse; sie werden zeigen, daß der gewöhnlich aus dem Versuche gezogene Schluß etwas zu speziell ist; man kann eine allgemeinere Annahme machen, um das Ergebnis der Theorie mit der Beobachtung in Uebereinstimmung zu bringen.



Die vorstehende Figur gibt eine schematische Darstellung der Versuchsanordnung. FT sei die Richtung, in der sich die Erde im Raume bewegt; P sei eine unendlich dünne Platte, welche das Licht ebenso durchläßt, als reflektiert. Ihre Normale bilde mit der Richtung FT einen Winkel von 45 Graden. In irgend einem Augenblick befinde sich der Mittelpunkt der Platte in dem Punkte A der Linie FT. AL liege mit Bezug auf die Spiegelnormale symmetrisch zu FT. In dem Momente, in dem die Plattenmitte sich in A befindet, gehe von L ein Lichtblitz aus. Wir fragen, welche Neigung wir dem von L ausgehenden Strahle geben müssen' damit der Lichtblitz im selben Momente in B eintrifft, in dem die Plattenmitte nach B gelangt. Der Neigungswinkel α des Strahles gegen die Richtung AL ist offenbar gegeben durch:

$$\sin\alpha = \frac{v}{c},$$

wo v die Translationsgeschwindigkeit der Erde, c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Relativ zur Platte bewegt sich der Strahl in einer Richtung, welche mit der Spiegelnormale einen Winkel von 45 Graden einschließt; daraus folgt, daß der an der Platte reflektierte Strahl in der Richtung BT sich bewegt. Er trifft einen Spiegel S_1, der unter einem Winkel von 90 Graden gegen die Richtung FT geneigt und mit der Platte P fest verbunden ist. In dem Momente, in dem die Plattenmitte sich in B befindet, sei der Spiegel in der Stellung S_1; die unveränderliche Distanz BS_1 sei gleich a_1. Wenn der in B reflektierte Strahl den Spiegel trifft, so befindet sich dieser nicht mehr in S_1, sondern in der Richtung der Translation verschoben in S_1'; der Strahl wird von dem Spiegel reflektiert und bewegt sich rückwärts in der Richtung $S_1'F$, bis er die Platte in dem Punkte C' wieder trifft. Für den dabei von dem Lichtstrahle zurückgelegten Weg ergibt sich:

$$BS_1'C' = 2a_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot$$

Gleichzeitig ist der von der Plattenmitte zurückgelegte Weg:

$$BC' = 2a_1\frac{v}{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot$$

Der von L ausgehende Strahl wird aber an der Oberfläche der Platte in B nicht blos reflektiert; nach unserer Voraussetzung geht vielmehr die Hälfte des Strahles durch die Platte in der

Richtung LB hindurch. Dieser durchgehende Teil des Strahles fällt in S_2 auf die Oberfläche eines Spiegels, dessen Normale parallel mit LA ist, dessen Ebene also in der Translationsrichtung der Erde liegt. Relativ zu dem Spiegel S_2 folgt der Strahl der Spiegelnormale, da der Einfallswinkel, unter dem er die Spiegeloberfläche trifft, gleich α ist. Relativ zum Spiegel liegt auch der reflektierte Strahl in der Normale, und der absolute Weg des reflektierten Strahles macht daher mit der Spiegelnormalen S_2N ebenfalls den Winkel α. Relativ zu der Platte P folgt der Strahl einer Linie, welche gegen die Normale der Platte unter einem Winkel von 45 Graden geneigt ist. Daraus folgt, daß der Strahl S_2C, wenn er die Platte wieder trifft, von dieser in der Richtung CF reflektiert wird. Da ferner die Winkel BS_2N und NS_2C gleich α sind, so verhalten sich die Strecken BS_2 und S_2C zu BN und NC wie die Lichtgeschwindigkeit zu der Translationsgeschwindigkeit der Erde; die Entfernung BC wird also von der Mitte der Platte P in derselben Zeit durchlaufen, in der das Licht den Weg BS_2C zurücklegt; der Strahl trifft also in demselben Momente in C ein, wie die Mitte der Platte. Bezeichnen wir die Entfernung S_2N mit a_2, so ist der Weg BS_2C, den das Licht zurücklegt, bis es wieder mit der Platte zusammentrifft, gegeben durch:

$$BS_2C = \frac{2a_2}{\cos\alpha} = \frac{2a_2}{\sqrt{1-\frac{v_2}{c^2}}}.$$

Der gleichzeitig von der Platte zurückgelegte Weg ist:

$$BC = 2a_2 \operatorname{tg}\alpha = 2a_2\frac{v}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Von dem Punkte C an fallen die Wege des von der Platte P reflektierten und des von ihr durchgelassenen Strahles zusammen; aber sie haben von dem Trennungspunkte B bis zu dem Wiedervereinigungspunkte C verschieden große Wege zurückgelegt und können daher auf dem Wege CF interferieren. Die Wegdifferenz der Strahlen ist gegeben durch:

$$d' = BS_1'C' + C'C - BS_2C$$

$$d' = \left\{\frac{2a_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{2a_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\}\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich durch Division mit der Wellenlänge des Lichtes; sie wird:

$$\frac{d'}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{2a_1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{2a_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right\}\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

oder näherungsweise:

$$\frac{d'}{\lambda} = \left\{2\,\frac{a_1-a_2}{\lambda} + \frac{2a_1-a_2}{\lambda}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right\}\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

Durch die letztere Gleichung wird die Phasenverschiebung in zwei Teile zerlegt; der eine hängt ab von der Verschiedenheit der Entfernungen a_1 und a_2; der zweite hängt ab von der Translationsgeschwindigkeit der Erde. Es fragt sich nun, wie wir diese zweite Verschiebung zu einem Gegenstand der Beobachtung machen können. Zu diesem Zwecke machen wir die Fiktion, daß es möglich sei, die Bewegung der Erde relativ zum Aether aufzuheben; dann erteilen wir dem Spiegel S_2 eine kleine Neigung, so daß sein Spiegelbild in der Platte P nicht mehr mit S_1 parallel ist, sondern damit einen, wenn auch sehr kleinen Winkel einschließt. Die Kombination der beiden Spiegel wirkt dann wie ein scharfkantiger Keil, und im Gesichtsfeld erscheint ein System paralleler Interferenzstreifen, deren Abstand i der Zunahme der Wegdifferenz um eine Wellenlänge entspricht. Würde man nun die Ruhe der Erde wieder aufheben, so würden zu den durch die Aufstellung der Spiegel bedingten Wegdifferenzen noch die von der Bewegung abhängenden hinzukommen; wir würden also eine weitere Verschiebung der interferierenden Strahlen um

$$\delta' = 2\,\frac{a_1-a_2}{\lambda}\cdot\frac{v}{c} + \frac{2a_1-a_2}{\lambda}\cdot\frac{v^2}{c^2}\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

Wellenlängen erhalten. Dem entspricht eine Verschiebung der Interferenzstreifen um

$$\sigma' = \left\{2\,\frac{a_1-a_2}{\lambda}\cdot\frac{v}{c} + \frac{2a_1-a_2}{\lambda}\,\frac{v^2}{c^2}\left(1+\frac{v}{c}\right)\right\} i,$$

wenn i den Abstand der ruhenden Interferenzstreifen bedeutet.

In dieser Form ist die Beobachtung natürlich nicht zu realisieren. Aber wir können den ganzen Apparat um 90 Grade drehen, so daß die Richtung NS_2 mit der Richtung der Erdbewegung zusammenfällt, während die Richtung FC dazu senkrecht steht. Man kann dann die Wegdifferenz der interferierenden Strahlen ebenso

berechnen wie zuvor, und findet:

$$d'' = \left\{\frac{2a_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2a_2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right\}\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

Dieser Wegdifferenz entspricht ebenso wie vorher eine Verschiebung der bewegten Interferenzstreifen gegen die ruhenden; ausgedrückt durch den Abstand der ruhenden Streifen hat sie den Wert:

$$\sigma'' = \left\{2\,\frac{a_1-a_2}{\lambda}\cdot\frac{v}{c} + \frac{a_1-2a_2}{\lambda}\cdot\frac{v^2}{c^2}\left(1+\frac{v}{c}\right)\right\} i.$$

Diese Verschiebung ist natürlich der Beobachtung ebenso wenig zugänglich, wie die entsprechende bei der ersten Stellung des Apparates. Dagegen können wir sehr wohl die relative Verschiebung der Streifen beobachten, welche gegeben ist durch:

$$\sigma' - \sigma'' = \frac{a_1+a_2}{\lambda}\cdot\frac{v^2}{c^2}\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

Michelson und Morley gelang es, durch wiederholte Reflexionen die Summe der Abstände a_1 und a_2 auf einen Betrag von 22 m zu bringen; setzen wir für λ die Wellenlänge des *Na*-Lichtes, für v/c den Wert 1/10000, so wird:

$$\sigma' - \sigma'' = 0{,}36\,.\,i.$$

Eine solche Verschiebung konnte der Beobachtung nicht entgehen, da bei den Versuchen der zwanzigste Teil des Streifenabstandes i noch vollkommen sicher gemessen werden konnte. In Wirklichkeit war von einer solchen Verschiebung keine Spur zu sehen. Der hiermit gegebene Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung kann auf doppelte Weise beseitigt werden. Die erste besteht in der von Lorentz und Fitzgerald eingeführten Annahme einer Kontraktion der Körper infolge der Bewegung. Zu einer anderen, allgemeineren Formulierung dieser Hypothese führt die folgende Betrachtung.

Bei der ersten Stellung des Apparates ersetzen wir in dem Ausdrucke für d':

$$a_1 \text{ durch } a_1' = a_1\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right),\quad a_2 \text{ durch } a_2' = a_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Ebenso ersetzen wir in der zweiten Stellung des Apparates in dem Ausdrucke d'':

$$a_1 \text{ durch } a_1'' = a_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\ a_2 \text{ durch } a_2'' = a_2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Dann ergibt sich:

$$d' = d'' = 2(a_1 - a_2)\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

Die Wegdifferenz ist in der ersten Lage des Apparates dieselbe wie in der zweiten, eine Verschiebung der Interferenzstreifen bei dem Umlegen des Apparates ist also nicht möglich. Die Bedeutung der eingeführten Substitutionen ist folgende. Durch die Bewegung werden die in der Richtung der Bewegung liegenden Dimensionen des Körpers verkürzt im Verhältnis $1:1-\frac{v^2}{c^2}$, die zu der Richtung der Bewegung senkrechten Dimensionen im Verhältnis $1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Durch diese Verkürzungen werden die durch die Bewegung bedingten Verlängerungen der Lichtwege kompensiert.

Der andere Weg, die Differenz zwischen Theorie und Erfahrung zu beseitigen, wird gegeben durch die Annahme der Relativitätstheorie, daß die Erscheinungen des Lichtes im bewegten System durch dieselben Gleichungen beschrieben werden, wie in dem relativ ruhenden. Dann fällt natürlich von vornherein jede Veranlassung zu einer Veschiebung der Interferenzstreifen fort. Die Relativitätstheorie führt zu der Folgerung, daß die Körper sich in der Richtung ihrer Bewegung zusammenziehen im Verhältnis $1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Die Folgerung steht in Uebereinstimmung mit der Annahme von Lorentz und Fitzgerald; sie widerspricht aber dem Ergebnisse der vorstehenden Betrachtungen. Es erhebt sich daher die Frage, ob die Relativitätstheorie einer Erweiterung fähig ist, bei der sich eine Kontraktion der Körper nicht blos im Sinne der Bewegung, sondern auch in der Richtung senkrecht dazu ergibt.

Geht man von der spezielleren Annahme von Lorentz und Fitzgerald aus, so ist in der ersten Lage des Apparates a_1 zu ersetzen durch $a_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, während a_2 seinen Wert behält. In der zweiten Lage behält umgekehrt a_1 seinen Wert und a_2 ist zu ersetzen durch $a_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Für die Wegdifferenzen ergibt sich wieder der gemeinsame Wert:

$$d' = d'' = 2(a_1 - a_2)\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Mit dem Resultate der Beobachtung steht also jene speziellere Annahme ebenso in Uebereinstimmung, wie die im vorhergehenden entwickelte allgemeinere.

Uebrigens wird man leicht übersehen, daß noch eine unendliche Zahl von Annahmen möglich ist, welche alle zu übereinstimmenden Werten der Differenzen d' und d'' führen, welche also alle mit dem Ergebnisse der Beobachtung in Uebereinstimmung stehen. In der Tat werden die Differenzen d' und d'' gleich, wenn man die Substitutionen macht:

$$a_1' = a_1 f\left(\frac{v}{c}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad a_2' = a_2 f\left(\frac{v}{c}\right),$$

$$a_1'' = a_1 f\left(\frac{v}{c}\right), \qquad a_2'' = a_2 f\left(\frac{v}{c}\right)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

wo $f\left(\frac{v}{c}\right)$ eine beliebige Funktion dieses Arguments bezeichnet.

Die Aerologischen Ergebnisse im Jahre 1910 am Samoa-Observatorium der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Von

Dr. Kurt Wegener.

Vorgelegt von Herrn H. Wagner in der Sitzung vom 17. Juni 1911.

Den 26 Aufstiegen des Jahres 1909 wurden im Jahre 1910 weitere 15 Drachenaufstiege am Observatorium, sowie 8 zur Erfüllung einer besonderen Aufgabe in Aleipata, an der Ostküste (Luv-Seite) Samoa's, und endlich 10 Pilotballon-Verfolgungen hinzugefügt.

Über die Aufstiege in Aleipata ist bereits berichtet worden (diese Zeitschrift 1911), sie dienten einer Untersuchung darüber, ob, und in welchem Maße eine periodische Temperaturschwankung der Luft, bzw. der ihr beigemengten Verunreinigungen, infolge Strahlungs-Absorption und Emission, in den niedrigen und mittleren Höhen der Atmosphäre eintritt.

Wir können diese Aufstiege wohl in den folgenden Zusammenstellungen außer acht lassen. In letzteren handelt es sich, sobald nichts besonderes bemerkt ist, um Drachenversuche. Bei Pilotballon-Verfolgungen ist dies jedesmal hinzugefügt.

Im Verlaufe des Jahres hatten wir nur wenige kleine Paturelsche Ballons zur Verfügung, mit denen große Höhen im Allgemeinen nicht erreichbar sind. Erst Anfang 1911, als der Verfasser dieses Berichts sich zur Abreise rüstete, kamen die ersehnten, wenn auch teuren, bei der Continental-Kautschuk-Compagnie zu Hannover bestellten großen Ballons, deren Benutzung nun dem Nachfolger vorbehalten bleiben muß.

Die Aufstiegsgeschwindigkeit der Pilotballons wurde am Turm des Observatoriums durch die Zeitdifferenz kontrolliert, die der

Ballon vom Fuß des Turmes bis zur Höhe des Beobachters auf dem Turm brauchte.

Der primitive Theodolith, der zur Verfolgung des Ballons diente, hat uns, d. h. dem im April 1910 in Samoa eingetroffenen Herrn Dr. Hammer und mir, viel Mühe gemacht. Der eine beim Aufstieg Beteiligte drehte fortgesetzt das Fadenkreuz des Theodolithen auf den Ballon, der andere las in bestimmten Zeitintervallen — je nach der Geschwindigkeit der Änderung alle 1 oder 2 Minuten, — Höhenwinkel z und Azimut A des Ballons ab. Aus der bekannten Aufstiegsgeschwindigkeit, und der Zeit des Ablassens vom Boden findet man die Höhe h, in der sich der Ballon zu einer bestimmten Zeit befindet; aus dieser ergibt

$$e = h \operatorname{ctg} z$$

die horizontale Entfernung e des Ballons in dem gewählten Augenblick vom Ausgangspunkte in dem beobachteten Azimut. Durch Verbinden der Endpunkte von e erhält man die Versetzung der Luft in dem gegebenen Zeit- und Höheninterval.

So lange sich z oder A linear mit der Zeit t ändern, ist dies der Ausdruck dafür, daß die Bewegung der Luft nach Richtung und Größe in den durchmessenen Höhen konstant bleibt.

Man kann also die Verarbeitung sehr vereinfachen, wenn man nicht für alle beobachteten Punkte die zugehörige Höhe, Azimut und Entfernung des Ballons bestimmt, und hieraus die Geschwindigkeit und Richtung der Luftbewegung für die verschiedenen Zeit- und Höhen-Intervalle ableitet, sondern sich auf die Punkte beschränkt, an denen sich $\frac{\Delta Z}{\Delta t}$ oder $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ ändern [1]).

Die im vorigen Jahresbericht erwähnten Versuche mit einem 5 pferdigen Benzin-Motor verliefen erfolglos. Das Boot erwies sich auf die Dauer als zu schwach, um die Vitrationen des Motors zu ertragen, und zu klein, um Drachenwinde und Motor zugleich aufzunehmen.

Auch in diesem Jahre sind die Wolkenbeobachtungen hinzugefügt worden, die von dem Verfasser gesammelt wurden.

Die früher (1909) von dem Mechaniker des Observatoriums täglich beobachteten Daten über Zugrichtung und Nomenklatur

1) $\frac{\Delta Z}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ müssen hierzu ausgeglichen werden, einerseits wegen der Beobachtungsfehler, andrerseits wegen der kleinen absoluten Schwankungen der Luft infolge Wogenbewegungen, die sich über die Aufstiegsgeschwindigkeit überlagern.

stellten sich wegen grundsätzlicher Beobachtungsfehler, deren Abgewöhnung auf Schwierigkeiten stieß, als unzuverlässig heraus.

Die Wolkenbeobachtung durch einen nicht-wissenschaftlichen Beobachter wurde daher überhaupt aufgegeben, und das gesammelte Material nicht verwendet, da es für besser gehalten werden muß, sich zu beschränken, als ein unzuverlässiges Material zu gebrauchen.

Das Publikationsschema ist das übliche; nur bei der Angabe des Bewölkungsgrades wurde von ihm abgewichen, indem für jede einzelne Wolkenetage angegeben wurde, wie viel Zehntel des umgebenden Himmelsgewölbes sie ausfüllte, wobei man sich die Wolken der übrigen Etagen fortdachte.

Um einen Überblick über die mittleren Temperaturen zu geben, soweit das bisher gesammelte Material dies zuläßt, habe ich die Aufstiege 1909 und 1910 zusammengefaßt in der folgenden Tabelle. Die einzelnen Aufstiege wurden demjenigen Monat zugeteilt, dessen erster Tag ihnen am nächsten lag. In Klammern ist die Zahl der Beobachtungen hinzugefügt. Nur die Monate mit mindestens 3 Beobachtungen sind verwendet worden. Bis 500 m ist die tägliche Periode der Temperatur anscheinend noch nicht ausgeglichen.

Mittlere Temperaturen.

	Höhe					
	0 m	500 m	1000 m	1500 m	2000 m	2500 m
Januar	28.8 (8)	23.7 (8)	19.4 (6)	16.9 (5)	14.5 (4)	11.9 (3)
Juli	29.3 (4)	24.3 (4)	19.8 (4)	16.5 (4)	14.9 (3)	
September	27.5 (4)	22.4 (4)	18.9 (4)	15.8 (4)		
Oktober	29.6 (4)	24.6 (4)	20.0 (4)	17.0 (4)	15.7 (2)	
November	29.8 (5)	25.4 (5)	21.1 (5)	18.6 (4)		

Mittleres Temperaturgefälle $\left(\frac{\Delta t}{100\,\mathrm{m}}\right)$.

	0—500	500—1000	1000—1500	1500—2000
Januar	1.02	0.86	0.50	0.47
Juli	1.00	0.90	0.66	0.32
September	1.12	0.70	0.62	
Oktober	1.00	0.92	0.60	0.26
November	0.89	0.86	0.56	

Das Gefälle bis 1000 m ist recht hoch, zumal wenn man erwägt, daß die Wolkenbasis in der Regel unterhalb 1000 m liegt. Bemerkenswert ist auch in Samoa die Geringfügigkeit der Temperaturschwankungen der Luftsäule, die aus dieser Tabelle nicht hervorgeht, aber durch Vergleich zweier benachbarter Aufstiege 1909 oder 1910 erkannt wird. Sie bildet die Erklärung dafür, daß der Luftdruck an der Erdoberfläche, der ja von dem Gewicht, also der Dichte, und mithin in erster Näherung von der Temperatur der Luftsäule abhängt, in Samoa, wie überall in den Tropen, so geringe Schwankungen aufweist. Nur dieser Umstand konnte es erlaubt erscheinen lassen, aus so kleinen Zahlenreihen Mittelwerte zu bilden.

Die Aufstiege.

4. Januar.

Drachenaufstieg auf 300 m, adiab. Temp.-Abnahme. Unten E 6 m/s. (vorübergehend, meist 3—4 am Tage), oben SE 4—5. Bewölkung: Cu, Cu-Ni zwischen 400 (wechselnd) und ca. 5000; falsche (?) Ci mit 1—2 m/s aus S. Der Passat dürfte nur in die Gewitterwolken über West Upolu hineingeweht haben.

5. Januar.

Unten still. A-Cu, Cu langsam aus S.

6. Januar.

Morgens still. Mittags Ni aus S (vom Gebirge), frische Windstöße.

7. Januar.

Unten NE 5—6 m/s bis Stille. Cu (Passatwolken) bringen Sprühregen. Mittl. Wolken fehlen. Ci-Str aus WNW mäßig schnell.

10. Januar. 9—12 a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Wind- Geschw.	
0	29,4	85	E	9	stößig
500	24,4	95	E	7	
1000	20,0	100	E	6	
1500	16,7	80	E	6	
1780	15,4	68	E	5	

Bewölkung: 4^1—8^2 Cu-Ni, unentschieden hin- und herziehend, zwischen 800 und 5000 m. Oben nach E zurückgeweht. A-Cu (Köpfe der Cu-Ni) ziehen aus W; Ci-Str aus ESE langsam.

Der Aufstieg erfolgte unter dem Rande einer Böe. Daher wohl die Trockenheit der zweiten (Antipassat) Schicht. Passatwetter.

15. Februar.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29,0	90 %	NE	6—8
500	23,7	95	NNE	7
960	18,6	100	N	6

Zeitweise schwere Böen aus N mit ●² und NNE 15 m/s. Lebhafter Luftaustausch; Cu (4^{0-2}) flott aus NE-NNE, zwischen 800 und 1500, A-Cu langsam aus N.

18. Februar.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29,6	90 %	E	6—8 böig
500	24,2	95	ESE	8—9
1000	18,7	100	E	8
1125	17,2	100	E	8—7

Bewölkung 2^0 Cu, über See vereinzelte Regenböen 1^2, die bis ca. 4000 m reichen. 3^0 Ci flott aus SE.

Beide Tage zeigen ein außergewöhnlich starkes Temp.-Gefälle und lebhaften vertikalen Luftaustausch.

14. März.

Morgens fast wolkenlos; im Laufe des Tages zunehmende Bewölkung.

Mittags 5^{0-2} Cu bezw. Cu-Ni, langsam mit 1—4 m/s aus N, A-Cu so gut wie bewegungslos.

15. März.

Frischer Passat. Bew. $3—4^{0-2}$, Cu-Ni (Gewitter) über Upolu.

16. März.

Cu aus ESE, Wind aus NE-SE, unstet; A-Cu (3000) sehr langsam aus E. Neigung zu flachen Böen mit wenig Regen.

11. April. 10—11 a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	29,4	92	E	6—8 unstet
530	22,0	95	E	7

Bewölkung: 5^{0-1} Cu, zwischen ca. 1000 und (geschätzt) 1500. Köpfe nach Süden ausgeweht.

12. April. 10—12 a.

Höhe	Wind-Richt.	Wind-Geschw.
0	EzN	7—8
500	ENE	5—6
1000	E	9
1500	E	8

Registrierung versagt. Lebhafter vertikaler Luftaustausch. Cu 4^{0-1} zwischen ca. 1000 und 2000 m. Köpfe ausgebreitet. Hohe Wolken nicht vorhanden.

13. April. 10—12 a.

Bewölkung: 4^{0} Cu, über dem Gebirge etwas dichter, zwischen 600 und ca. 900. Darüber Stille. Bei 900 m kleiner Temperatursprung und Feuchtigkeitsfall.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind-Richt.	Wind-Geschw.
0	29,2	89	EzS	8
500	24,0	90	EzS	8
1000	21,0	80	still	
1125	20,0	70	still	

25. April. Pilotballon 4—5 p.

Bewölkung: 5^{1-2} Ni, Cu-Ni, Cu aus NNE. Basis bei ca. 800, Köpfe bis schätzungsweise 3000; zeitweise Regen. Ci-Str (7^{0}) langsam aus W.

Höhe	Wind-Richt.	Wind-Geschw.
0	NNE	2
500	NzE	4
1000	N	3
1500	NzW	3
2000	NzW	3

Ballon verschwindet nach 21 Minuten in herannahenden Regenwolken.

26. April.

Bewölkung: 4^{0-1} Cu, Cu-Ni, aus N; 6—7^{0} Ci-Str aus SSW.

27. April.

Bewölkung: 4^{0-2} Cu, Cu-Ni, Fr-Cu zwischen 900 und 3000 aus N mit 3 m/s, 7^{0} A-Str aus N mit 3 m/s.

29. April.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind-Richt.	Wind-Geschw.
0	27,0	95	E	8
500	22,0	100	E	8
1000	19,0	100	E	8
1500	17,0	100	NE	7
2000	15,0	Abnahme	N	8
2500	11,7		N	8
2850	9,2		N	7

Bewölkung: 4—6^{0-3} Cu, Fr-Cu (Basis 500, Köpfe bis ca 700), Cu-Ni (Basis 500, Köpfe 1500, vereinzelt bis ca. 3000), 3^0 Ci, Richtung nicht bestimmbar. Unmittelbar nach Beendigung des Aufstiegs zieht eine schwarze walzenförmige Böe vorüber, die reichlich Regen und steifen NE bringt. Die Temperatur am Erdboden sinkt hierbei um 5° (auf 22,0) vermutlich infolge der kalten Regentropfen. – Zwischen 1600 und 1700 Isothermie, darüber N-Wind. Oberhalb 3000—4000 m wird Westwind vermutet.

17. Mai. Pilotballon 8a.

5 a. m. Über der Insel ist es wolkenlos. In etwa 3 km Entfernung von der Küste liegt rings um die Insel ein dicker Wolkenwulst, etwa dort, wo auf See der Landwind aufhört. Unten Süd 2—3 m/s (Landwind). Um 6 a. m. ziehen die Wolkenmassen langsam aus ENE, aber unentschieden, und lösen sich auf. Die Köpfe werden nach ESE übergekippt und fortgetragen. A-Cu ziehen flott aus Norden.

Höhe	Wind-Richt.	Wind-Geschw.
0— 400 m	E	2 m/s
400—1000 m	NE	3 m/s
1000—1500 m	ENE	7 m/s
1500—1800 m	NNE-N	[14 m/s?] Ballon undicht?

Bewölkung: 3—4^{0-1} Cu, langsam aus NE; Köpfe nach Süden ausgeweht. 5° A-Cu mit ca. 8 m/s aus N.

18. Mai. Pilotballon. 7^{45}—8^{25} a.

Höhe	Wind-Richt.	Wind-Geschw.	
0— 100 m	S	1 m/s	Land und Seewind, um 8^h verschwunden.
100— 200 m	C		
200— 300 m	NE	1 m/s	
300— 540 m	C		
540—1440 m	WSW	6 m/s	
1440—2340 m	NW	3 m/s	
2340—3600 m	SW	6 m/s	

Fast Wolkenlos. Savaii ist in ca. 1000 m Höhe von einem schmalen Wolkenkragen umgeben. Am Tage kommt unten einige Stunden lang schwacher West-Wind durch. Ci-Cu ziehen am Abend aus W.

19. Mai. Pilotballon 7^8—8^8 a.

Höhe	Wind- Richt.	Wind- Geschw.	
0— 50 m	S	4,0 m/s	Landwind, außergewöhnlich kräftig; wolkenlos.
50— 100 m	S	2,0	
100— 200 m	C		
220—1870 m	ENE	3,0	der den Landwind ergänzende Wind.
1870—2750 m	NW	0,5	praktisch Stille.
2750—3850 m	NNW	5	Berücksichtigt man die Fehler der Messung, so kann auf einen einheitlichen Strom geschlossen werden, zwischen 3000 u. 7000 m, der aus NzW fließt, und dessen Strömungsgeschwindigkeit mit der Höhe ein wenig zunimmt.
3850—5100 m	NzW	7	
5100—6300 m	NzW	10	
6300—7100 m	NzW	7	

20. Mai. Pilotballon 8^8—8^{42} a.

Der Land- oder Nachtwind aus S hört um 8^{15} ganz auf. Um 9 setzt langsam der Passat ein. Die Diskussion des Ballonaufstiegs macht es wahrscheinlich, daß der Ballon undicht geworden ist während des Aufstiegs. Das vermutete Ergebnis ist in der kleinen folgenden Tabelle mitgeteilt; am N-Horizont zogen Cu (3^{0-1}) aus E. Sonst wolkenlos.

0— 200	C
200—1000	E ca. 8—10 m/s.

21. Mai.

8a: unten E 3 m/s, 5^{0-1} Cu zwischen 600 und 1500; Köpfe nach Süden ausgeweht, fast stillstehend; 3^0 A-Cu oder Ci-Cu, geschätzt bei 5000, aus SW mit ca. 1 m/s.

2. Juni.

Nachts vereinzelte Regenböen. Morgens bewölkt, 5^{0-2} Cu-Ni, Fr-Ni, mäßig schnell (4—6 m/s) aus SE; A-Str fast bewegungslos. Unten stößiger Wind aus stark südlichen Richtungen von 3—5 m/s, zu schwach für Drachen, zu stark für Ballons. Mittags 10^{1-2} Ni, $●^1$, C; ꓘ ꓘ; Abends aufklärend; Nachts fast wolkenlos bei starkem Land- (Süd-) Wind.

3. Juni.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Wind- Geschw.
0	28,5	85	E	8
500	23,5	90	E	8
1050	18,5	—	SE?	4

Unten steifer Passat bis 500 Meter. Darüber SW auf geschätzt 10 m/s mit der Höhe zunehmend; 3° Ci-Faux schnell aus SW. Cu-Ni 3^{0-2}, und Cu stationär über dem Gebirge, Köpfe nach NE ausgeweht.

7. Juli.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Wind- Geschw.
0	28,8	80—90 %	E	10
500	23,7		E	10
1000	18,8		E	9
1500	14,4		E	8
2000	12,8	50	südlich?	schwach.
2260	12,0	50		

Bewölkung: 4^{0-1} Cu, Basis bei ca. 1200, Köpfe meist bei 1500, flach gestreckt. Beim Aufstieg zwischen 1700 und 1800 Temperatursprung von 13.0 auf 14.0°, beim Abstieg Isothermie 13.0°. Der außergewöhnlich starke Passat weht steif die ganze Nacht hindurch.

3. August. Pilotballon 9^{26} a.

Höhe	Wind- Richt.	Wind- Geschw.
0— 200	S	5 m/s
200— 800	SSW	3
800—1200	S	4

11 a—1 p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Wind- Geschw.
0	28,8	60—70	S	3—7
550	23,0	70	S	5—6

Lebhafter vertikaler Luftaustausch. Bis 200 m Höhe merkliche Zunahme der Windgeschwindigkeit mit der Höhe. (Der Wind kommt vom Lande her.) Die vorhergehende Nacht ist vermutlich infolge Föhnwirkung relativ trocken geblieben (80 %).

4. August. Pilotballon 8^4 a.

Bewölkung: 2^0 Cu zwischen 1200 und 1500; (falsche) Cirren aus SSW bei 4300.

Höhe	Wind- Richt.	Geschw.	
0— 300	C		
300— 600	SSE	4,4 m/s	
600—1500	WSW	2,0	(an d. Oberfläche schwimmen Cu)
1500—2000	W	5,3	
2000—2500	SW	4,4	
2500—2900	C		
2900—4300	SSW	4,1	
4300—5200	SE	2,2	Ballon hinter falschen Cirren verschwunden.

5. August. Pilotballon 8^9 a.

Ballon platzt in 1200 bis 1300 m Höhe. Steifer Passat aus E, Max. 12 m/s, bis 500 m Höhe stark zunehmend. Von ca. 1000 m ab merkliche Abnahme. Mit wachsender Höhe Rechtsdrehung.

2—4 p.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	30,0	80	E	8—12
500	23,5	90		
750	20,4	90	abnehmend.	

Sehr lebhafter vertikaler Luftaustausch. Passat-Cu bei 1200 rasch aus E, Köpfe nach E zurückgeweht; A-Str äußerst langsam aus ca. S. Ci mäßig schnell aus W.

2. September. 8—12 a.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Geschw.
0	27,0	85	E	4—7
500	21,0	90	SE	6
1000	17,0	100	SSE	10
1370	15,3	100	SE	8

Bewölkung: 7^{0-1}; 4^1 Ni, Fr-Ni, dünn, bei ca. 600; 4^0 A-Str oder Str-Cu, aus NE, nicht erreicht. Über den Ni Windzunahme. Tags zuvor: Bew. 10^1 Ni, Basis 300, aus E.

18. Oktober. Pilotballon.

Höhe	Windrichtung	m/s	
Erde— 200	ENE	3—4	
200—1200	E	2	
1200—1400	ENE	1	
1400—2800	NE	3	
2800—4100	NNE	4	Ballon verschwindet in A-Str.

Bewölkung: 7. 3 ° Cu, flach, bei 800—1000. 4[1] Cu-Ni in Türmen, 4[1] A-Str, verwaschen, 3 ° Ci-Str, oder falsche Cirren.

2. November.

Höhe	Temp.	Wind- Richtung	Wind- Geschw.
0	28,0	E	6—7
500	23,0	E	7
1000	18,5	ENE	8
1500	[15,0]	NE	10
2000	13,0		
2500	9,0	} N	15
3100	?		

Bewölkung wechselnd, 4—10 Cu-Ni, A-Str. In 3000 m Höhe beim Einholen reißt die Drachenkette ab, als der Aufstieg von einer schweren Regenböe passiert wird. 2 Drachen mit 5000 m Draht fliegen fort. Der Apparatdrache wird am 20. Nov. gefunden, 16 km vom Observatorium, 7 km von der Nordküste (le Auváa); Registrierung nur lückenhaft vorhanden.

3. November.

Höhe	Temp.	rel. Feucht.	Wind- Richt.	Wind- Geschw.
0	29,5	95	E	9—10 stößig
500	25,5	95	ENE	9
730	23,7	100	NE	8

Bewölkung wechselnd, stündlich heftige Regenböen, aus NE kommend, mit sehr steifen E-Wind.

1. Dezember. Pilotballon.

Höhe	Wind- Richt.	Wind- Geschw.
0— 400	NE	2—3
400—1200	N	6
1200—2000	NNW	5
2000—3000	NW	5
3000—3480	E	2

Bewölkung: 5^{0-1} Cu, langsam aus N. 4^{0} A-Str, verwaschen, bei 3000; Ci-Str darüber flott aus Westen. Abends Regengüsse ohne Wind.

Am 2. Dezember setzen schwere Regenböen mit ^{2} und N ca. 15 m/s ein. Am 3. und 4. Dezember regnet es ununterbrochen (Landregen, Bewölkung 10^{1}, Tageslicht sehr mangelhaft, schwache umlaufende Winde).

22. Dezember. Pilotballon.

Höhe	Wind- Richt.	Geschw.
0— 300	ESE	6 m/s
300—3400	S	2 m/s

Bewölkung 6^{2} Cu-Ni (Gewitter) unstet umherziehend. Wolken wurden nicht passiert. In Maximalhöhe wird der Ballon undicht.

Schlussbemerkungen.

Blättert man die Wolkenbeobachtungen dieses und des vergangenen Jahres aufmerksam durch, so wird es offenkundig, daß die Bewegung der hohen Wolken an den Grenzen der Troposphäre in Bezug auf Regelmäßigkeit nicht mit der Bewegung eines Passats oder Monsuns verglichen werden kann.

Das deutet, worauf schon im vorjährigen Bericht aufmerksam gemacht wurde, darauf hin, daß wir es bei der Schicht, an deren Oberfläche die Cirren schwimmen, wahrscheinlich nicht mit einem reinen Ausdruck der allgemeinen passatischen Zirkulation der Atmosphäre zu tun haben, sondern daß lokale Einflüsse einen wichtigen Faktor bei der Bestimmung ihrer Zugrichtung bilden.

Es ist bekannt, daß im Mittel der Beobachtungen auf der ganzen Erde der meteorologische Äquator auf der Nordhalbkugel liegt; die folgende kleine Tabelle zeigt die Verteilung des Luftdruckes nach Ferrel (aus Hann, Lehrbuch d. Meteorologie, S. 352)

	30°	20°	10°	0°	geograph. Breite
mittl. Luftdruck Nordbreite	761,7	59,2	57,9	58,0	
mittl. Luftdruck Südbreite	63,5	61,7	59,1	58,0	

Der Grund für diese Asymmetrie des meteorologischen gegenüber dem geographischen Äquator liegt in der Verteilung von Wasser und Land in den Tropen und Subtropen. Es ist daher nur folgerichtig, wenn man annimmt, daß der meteorologische Äquator zwischen den verschiedenen Längengraden je nach der

Verteilung von Wasser und Land auch seine Breite ändert, so daß wir eine komplizierte Kurve anstelle eines einfachen Kreises für den meteorologischen Äquator erhalten, und eine Kurve obendrein, die in jeder Jahreszeit ihre geographische Breite und Form ändert.

Wie der Atlas des Segelhandbuches für den stillen Ozean zeigt, und wie dies bereits im vorjährigen Jahresbericht ausgeführt wurde, liegt der meteorologische Äquator in der Länge von Samoa im Südwinter ein wenig südlich des geographischen Äquators, im Südsommer aber gar auf 14° Südbreite. Die Abweichung gegen die mittlere Lage des meteorologischen Äquators auf der Erde überhaupt ist also recht groß.

Die Ursache hierfür liegt in den Ländermassen, die westlich Samoas ohne Kompensation auf der Nordhalbkugel die Erhitzung der Erdoberfläche fördern helfen: Australien, Neu-Guinea, Salomons-Inseln, Neu-Kaledonien, Neue Hebriden, Fidji und Tonga; aber diese Ländermassen rufen auch ein ost-westliches Druckgefälle hervor, dessen Bedeutung für Samoa leicht unterschätzt werden kann.

Es ist üblich, auf die Luftströmungen, die durch die Erhitzung der Festlandsmassen in Neu-Guinea und Nord-Australien hervorgerufen werden, die Bezeichnung Monsun anzuwenden.

Dieser australische Monsun reicht nun erfahrungsgemäß im Südsommer bis in die Nähe von Samoa, mitunter wochenlang dieses in seinen Bereich ziehend mit regenbringenden N- und NW-Winden, und den schwachen E-NE-Passat der Regenzeit Samoas unterbrechend.

Die Beobachtungen über Ci, die wir den Tabellen 1909 und 1910 für die Regenzeit (Südsommer) entnehmen, ergeben ein überwiegendes Ostwärtsströmen, so daß die mittlere Bewegung etwa nach ENE weisen würde; auch in den oberen Schichten scheint also der Einfluß des Monsuns vorzuwalten, da man als Wirkung einer Passat-Zirkulation in Samoa, am meteorologischen Äquator, eine westwärts weisende Strömung der oberen Schichten sonst erwarten müßte.

Zahl der Beobachtungen über Ci im Südsommer 1909 und 1910

aus N	NW	W	SW	S	SE	E	NE
0	1	4	2	1	2	1	0

Im Südwinter, in dem der meteorologische Äquator weit nördlich Samoas liegt, wäre ein W-NW in großen Höhen über Samoa aus dem Grunde wahrscheinlich, weil dann ja die vom Äquator aufgestiegenen Luftmassen mit südlicher Komponente abfließen und

eine Trägkeits-Kurve beschreibend, aus W-NW über Samoa ankommen sollten. Es ist daher bemerkenswert, daß im Südwinter die höchsten Schichten der Troposphäre ebenfalls aus WSW etwa ziehen, wie die nebenstehende Liste nachweist.

Zahl der Beobachtungen über Ci im Südwinter 1909 und 1910

aus N	NW	W	SW	S	SE	E	NE
0	2	5	1	3	1	0	0

Auch für den Südwinter ist es also wahrscheinlich, daß die Zugrichtung der Luftschichten bis zu den Grenzen der Troposphäre mehr durch ein ost-westliches Druckgefälle an der Meeresoberfläche, als durch den Luftaustausch zwischen Äquator und Rossbreiten bestimmt wird. Ein ost-westliches Druckgefälle an der Meeresoberfläche muß ja ein west-östliches in großen Höhen zur Folge haben.

Angenheister und Rohloff teilen in „Meteorologische Beobachtungen in der Südsee, gesammelt vom Samoa-Observatorium" (diese Zeitschrift 1911), die meteorologischen Beobachtungen in Fanning auf 4° N-Breite, und 159½° w. L. von Greenwich mit. Diese geben eine doppelte jährliche Periode des Luftdrucks; ein Beweis, daß Fanning abwechselnd auf der Nord- und Südseite des meteorologischen Äquators gelegen ist. Aus den Windbeobachtungen ergibt sich nun, daß die mittlere Windrichtung im Laufe der 4 Jahre fast genau ESE ist, und stets südliche Komponente hat (l. c. p. 2). Im ersten Augenblick könnte das überraschen, insofern man nämlich für Fanning zu der Zeit, zu der der meteorologische Äquator, bezw. tiefste Luftdruck südlich von ihm liegt, NE Passat erwarten könnte.

Tragen wir aber die für Fanning mitgeteilten Luftdruck-Werte (Jahresmittel) in den erwähnten Atlas der Seewarte ein, — sie sind, wie Herr Rohloff mir auf meine Frage mitteilt, nicht auf Schwere korrigiert, also ohne weiteres mit den Angaben des Atlas vergleichbar — so sehen wir die einfache Erklärung für das Phänomen: Die Isobaren laufen nämlich bei Fanning nicht E-W, sondern NS, und bedingen daher eine dauernde SE-Komponente des Windes.

In dem Bericht über das vergangene Jahr hatte ich bereits darauf hingewiesen, „daß wir in Samoa nicht in einem reinen Passatgebiet liegen, das durch südnördliches Druckgefälle erzeugt wird, sondern daß, vielleicht superponiert über diese Erscheinung, sich ein ost-westliches Druckgefälle bemerkbar macht, erzeugt durch den Gegensatz des inselfreien Meeres im Osten zu dem Inselerfüllten im Westen."

Die Beobachtungen in Fanning liefern hierfür eine angenehme Bestätigung. Aber auch auf die Bewegung der oberen Schichten der Troposphäre sind unter diesen Umständen keine anderen Überlegungen anzuwenden, als sie in dem zitierten Bericht gebraucht wurden: es ist klar, daß mit zunehmender Höhe sich die Richtung des barometrischen Gradienten umkehren, und so das Ostwärtsströmen der oberen Schichten jedes Rätselhafte verlieren muß.

Es wäre wichtig zu wissen, wie weit sich allgemein die Asymmetrie des meteorologischen Äquators an irgend einem Längengrade auch in größeren Höhen bemerkbar macht.

Die Unregelmäßigkeit des Wolkenzugs in größeren Höhen macht es nun wahrscheinlich, daß bis an die Grenzen der Troposphäre nicht nur mittlere Zustände in Frage kommen, sondern daß die Abhängigkeit der oberen Luftschichten von den unteren in vielen Fällen eine unmittelbare sein kann. Nur so läßt es sich erklären, wenn von einem Tage zum andern die Cirren ihre Bewegungsrichtung ändern, ja völlig umkehren.

Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes für den Klassenkörper.

Von

Ph. Furtwängler in Bonn.

Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Juni 1911 durch Herrn Hilbert.

Einleitung. In seinem großen Satze über den Klassenkörper hat Herr D. Hilbert[1]) über die Zerlegung der Primideale des Grundkörpers im Klassenkörper die Behauptung aufgestellt, daß alle Primideale derselben Klasse im Klassenkörper in gleicher Weise zerlegt werden, und hat diese Behauptung in dem Falle, daß der Grundkörper k mit seinen sämtlichen konjugierten imaginär ist und die Klassenzahl $h = 2$ besitzt, für alle zu 2 relativ primen Primideale bewiesen[2]). Es ist der Zweck dieser Zeilen, den Zerlegungssatz für den Klassenkörper in folgender Fassung allgemein zu beweisen:

Satz I: Die Klassenzahl eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers k sei gleich h. Ist dann $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k und $\mathfrak{p}^n$ die niedrigste Potenz von $\mathfrak{p}$, die in die Hauptklasse von k fällt, so zerfällt $\mathfrak{p}$ im Klassenkörper Kk von k genau in $\frac{h}{n}$ verschiedene Primideale.

Die Hauptklasse kann dabei im Sinne schärferer oder weiterer Aequivalenz verstanden werden; natürlich muß dann jedesmal auch der entsprechende Klassenkörper betrachtet werden, der bei Zugrundelegung des weiteren Aequivalenzbegriffes ein Unterkörper

1) D. Hilbert, Diese Nachrichten 1898, Ueber die Theorie der relativ Abelschen Zahlkörper, Satz 10, p. 378.

2) Ebenda § 13, p. 391—394.

des vollständigen Klassenkörpers ist. Der Satz gilt überhaupt nicht nur für den Klassenkörper, sondern auch für jeden Unterkörper des Klassenkörpers, der k enthält. Da der Satz in dieser allgemeineren Fassung hier bewiesen wird, formuliere ich ihn noch besonders:

Satz II: Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper und UKk ein beliebiger unverzweigter relativ Abel'scher Körper in Bezug auf k mit dem Relativgrad h_u (also ein Unterkörper des Klassenkörpers von k), der zur Untergruppe U der Klassengruppe von k gehört. Ist dann $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal aus k und $\mathfrak{p}^n$ die niedrigste Potenz von $\mathfrak{p}$, die in die Untergruppe U fällt, so zerfällt $\mathfrak{p}$ in UKk in $\frac{h_u}{n}$ verschiedene Primideale.

Die Aequivalenz kann wieder in schärferem oder weiterem Sinne genommen werden; nur muß man natürlich denselben Aequivalenzbegriff bei der Charakterisierung der Untergruppe U, resp. des Körpers UKk und der Bestimmung des Exponenten n honsequent beibehalten.

Aus der bisher entwickelten Theorie des Klassenkörpers folgt bereits, daß es unendlich viele Primideale in k gibt, die gemäß unseren Sätzen zerlegt werden; sie lehrt sogar weiter noch, daß, um es kurz auszudrücken, die Menge der Primideale, die unseren Sätzen folgen, unendlich groß ist im Verhältnis zur Menge derjenigen Primideale, die dies eventuell nicht tun. Aber die bisherigen Entwicklungen lassen doch die Möglichkeit offen, daß unendlich viele Primideale in k den angeführten Sätzen nicht folgen. Es ist nachzuweisen, daß solche Ausnahmen nicht existieren.

Der Beweisgang sei zunächst kurz skizziert. Ebenso wie man den Klassenkörper entsprechend den einzelnen Primzahlpotenzen, die in der Klassenzahl h aufgehen, sukzessive aufbauen kann, genügt es auch hier, in der Klassengruppe des Grundkörpers jeweils alle Klassen, deren Exponent zu einer bestimmten in h aufgehenden Primzahl relativ prim ist, als Einheitselement der Klassengruppe zu nehmen. Es wird daher zunächst der einfachste Fall einer Untergruppe betrachtet, deren Index eine ungerade Primzahl l ist und für den dieser Untergruppe entsprechenden Unterkörper des Klassenkörpers die Zerlegung aller zu l primen Primideale von k bestimmt (§ 1). Die Untersuchung wird im § 2 auf den Fall ausgedehnt, daß der Index der betrachteten Untergruppe eine Potenz von l ist. Herr Hilbert hat sich in dem anfangs genannten

speziellen Fall $h = 2$ auf die Tatsache gestützt, daß die Klassenzahl des Klassenkörpers zu 2 prim ist, was im allgemeinen Falle, wenn die Klassenzahl des Grundkörpers durch eine Potenz von 2 teilbar ist, nicht immer zutrifft. Da dasselbe für ungerade Primzahlen l gilt, würde eine direkte Uebertragung des Hilbert'schen Beweisganges auf den Fall einer ungeraden Primzahl l im allgemeinen nur dann möglich sein, wenn die Klassenzahl des Grundkörpers durch keine höhere Potenz von l als die erste teilbar ist. Der hier eingeschlagene Beweisgang stützt sich wesentlich auf die bereits erwähnte Tatsache, daß es unendlich viele Primideale gibt, deren Zerlegung unseren Sätzen gehorcht; es wird dann gezeigt, daß alle Primideale der jeweils betrachteten Untergruppe in gleicher Weise zerlegt werden.

Eine besondere Stellung nehmen, ebenso wie bei den Reziprozitätsgesetzen, die in l aufgehenden Primideale ein, die umfangreichere Betrachtungen nötig machen (§ 3—5). Bei den bisherigen Entwicklungen war es zunächst erforderlich anzunehmen, daß der Körper k eine primitive l^{te} Einheitswurzel enthalte; diese Annahme läßt sich unschwer beseitigen (§ 6). Eine besondere Betrachtung erfordert noch eine in der Klassenzahl von k aufgehende Potenz von 2, wenn unter den konjugierten Körpern des Körpers k reelle vorhanden sind, wie dies ebenfalls schon bei den früheren Untersuchungen hervorgetreten ist (§ 7 und 8).

§ 1.

Wir nehmen zunächst an, daß der Grundkörper k, dessen Klassenzahl durch die ungerade Primzahl l teilbar sei, eine primitive l^{te} Einheitswurzel ζ enthalte und beweisen unter dieser Annahme den folgenden Satz, der offenbar ein Spezialfall von Satz II ist:

Satz III. Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, dessen Klassenzahl durch die ungerade Primzahl l teilbar ist und der eine primitive l^{te} Einheitswurzel ζ enthält. Stellt man dann das Klassensystem von k in der Gestalt:

$$c^x\, U \,(x = 0, 1, \ldots l-1)$$

dar, wo U eine Untergruppe der Klassengruppe vom Index l bedeutet und ist K der zu U gehörige Unterkörper des Klassenkörpers von k, so zerfallen in K alle zu l primen Primideale aus U in l verschiedene Primideale, während alle übrigen zu l primen Primideale aus k auch in K Primideale bleiben.

Zum Beweise dieses Satzes sind Entwicklungen zu benutzen, die ich in einer früheren Arbeit über die Reziprozitätsgesetze[1]) durchgeführt habe. Es sei aber ausdrücklich bemerkt, daß es sich dabei nur um solche Entwicklungen handelt, die zu den Reziprozitätsgesetzen in „beschränkter Fassung“ führen, d. h. es braucht dabei nicht zwischen den verschiedenen Kategorieen von Nichtresten, die resp. den Einheitswurzeln $\zeta, \zeta^2, \ldots \zeta^{l-1}$ entsprechen, unterschieden zu werden, sondern nur zwischen Resten und Nichtresten. Um bestimmt anzugeben, was hier zu benutzen ist, formuliere ich die beiden Sätze besonders, die im Folgenden gebraucht werden:

Satz IV[2]). Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal in k, so läßt sich ein Ideal $\mathfrak{p}'$ in k so bestimmen, daß die Zahl

$$\pi = \mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'^{l}$$

eine primäre Zahl wird. Sie soll eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärzahl heißen.

Satz V[3]). Ist μ eine primäre Zahl aus k von der Gestalt

$$\mu = \mathfrak{d}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{d}_t^{e_t} \mathfrak{q}^l, \qquad (e_1, \ldots e_t \text{ zu } l \text{ prim})$$

wo $\mathfrak{d}_1, \ldots \mathfrak{d}_t$ primäre Primideale aus k bedeuten, so existieren für die Geschlechter in $K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ t Hauptcharaktere $\chi_1, \ldots \chi_t$ und e Nebencharaktere $\psi_1, \ldots \psi_e$, zwischen denen eine bestimmte Relation besteht:

$$(1) \qquad \chi_1^{n_1} \cdots \chi_t^{n_t}\, \psi_1^{m_1} \cdots \psi_e^{m_e} = 1.$$

In dieser Relation sind sämtliche Exponenten n_i zu l prim.

Auf Grund dieser beiden Sätze gelingt es nun, den zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Satz III zu beweisen. Es sei $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal aus der Untergruppe U, das ebenso wie alle übrigen in diesem § erwähnten Primideale zu l prim ist. Unter den gemachten Voraussetzungen wird der Körper K, der zu U gehört, durch Adjunktion von $\sqrt[l]{\omega}$ zu k erzeugt, wo ω eine

1) Ph. Furtwängler, Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern (Erster Teil). Math. Ann. 67 (1909), p. 1—31.

2) Ebenda, § 6 Satz 7, § 15.

3) Ebenda, § 7 und § 8.

singuläre Primärzahl bedeutet. Aus der Theorie des Klassenkörpers[1]) folgt nun, daß jedes Primideal $\mathfrak{q}$, für das $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{q}}\right) = 1$ ist, in U liegt. Es ist daher jetzt nur noch umgekehrt nachzuweisen, daß auch für jedes Primideal $\mathfrak{r}$ aus U die Gleichung

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right) = 1$$

besteht. Ist $\mathfrak{r}$ ein beliebiges Primideal aus U, so läßt sich in jedem Falle ein Ideal $\mathfrak{r}'$ von der Gestalt

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_1^m \mathfrak{q}^l$$

bestimmen, so daß

(2) $$\varrho = \mathfrak{r}\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\mathfrak{r}_1^m \mathfrak{q}$$

in der Hauptklasse liegt. Dabei bedeutet $\mathfrak{r}_1$ ein geeignetes zu $\mathfrak{r}$ primes Primideal, für das

(3) $$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1$$

ist, oder das Ideal 1, während $\mathfrak{q}$ irgend ein geeignetes Ideal ist. Liegt $\mathfrak{r}$ im Klassenhauptverbande, d. h. in einer Klasse, die l^{te} Potenz einer Klasse ist, so ist evident, daß man mit $\mathfrak{r}_1 = 1$ eine Beziehung von der Art (2) herstellen kann. Es soll in diesem Falle auch stets $\mathfrak{r}_1 = 1$ genommen werden. Liegt $\mathfrak{r}$ nicht im Klassenhauptverbande, so stelle man die Untergruppe U in der Gestalt dar:

(4) $$c_1^{x_1} \ldots c_{e-1}^{x_{e-1}} H, \quad (x = 0, 1, \ldots l-1)$$

wo H den Klassenhauptverband bedeutet. Liegt dann $\mathfrak{r}$ etwa in c_1, was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, so wähle man aus dem Klassensystem:

(5) $$c_1^{x_1} H \quad (x_1 = 1, \ldots l-1)$$

ein beliebiges Primideal $\mathfrak{r}_1$, das die Bedingung (3) befriedigt. Derartige Primideale existieren, wie ohne weiteres aus dem Existenzbeweis für den Klassenkörper folgt, in unendlicher Anzahl. Mit Hülfe eines solchen Primideals ist es offenbar möglich, eine Beziehung von der Art (2) herzustellen.

Es sei nun $\mathfrak{p}$ ein beliebiges primäres Primideal aus k und π eine zugehörige Primärzahl. Für diese gelten dann die beiden folgenden Behauptungen:

---

1) Ph. Furtwängler, Math. Ann. 63 (1906), p. 1, Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers; § 6 Satz 5.

a) Ist $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = 1$, $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1$, so ist auch $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = 1$.

b) Ist $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1$, $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1$, so ist $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$.

Um die erste Behauptung zu beweisen, betrachte man den Körper $(\sqrt[l]{\pi}, k)$. In diesem wird ϱ die Relativnorm eines Ideals $\mathfrak{R}$. Bestimmt man das Geschlecht von $\mathfrak{R}$, so folgt, weil alle Nebencharaktere den Wert 1 haben, aus der Charakterenrelation (1), daß auch

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

ist. Zum Beweise der zweiten Behauptung wähle man ein primäres Primideal $\mathfrak{p}'$ so, daß $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}'}\right) \neq 1$ ist. Das ist stets möglich, weil ϱ nicht l^{te} Potenz eines Ideals ist. Eine zu $\mathfrak{p}'$ gehörige Primärzahl π' bestimme man so, daß

$$\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1.$$

Das ist ebenfalls stets möglich, weil man π' mit einer beliebigen singulären Primärzahl multiplizieren kann, ohne daß es aufhört, eine zu $\mathfrak{p}'$ gehörige Primärzahl zu sein. Es folgt dann:

$$\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1,$$

weil man andernfalls mit a) in Widerspruch geraten würde. Denn aus $\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1$, $\left(\frac{\pi'}{\mathfrak{r}}\right) = 1$ würde nach a) folgen: $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}'}\right) = 1$, was der Wahl von $\mathfrak{p}'$ widerspricht. Man kann daher stets einen zu l primen Exponenten f bestimmen, sodaß

$$\left(\frac{\pi\pi'^f}{\mathfrak{r}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\pi\pi'^f}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1. \tag{6}$$

Im Körper $(\sqrt[l]{\pi\pi'^f}, k)$ wird dann ϱ die Relativnorm eines Ideals $\mathfrak{R}$. Bestimmt man wieder das Geschlecht dieses Ideals, so folgt, weil alle Nebencharaktere den Wert 1 haben, aus der Charakterenrelation (1):

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}'}\right)^{n_2 f} = 1 \quad (n_1 \text{ und } n_2 \text{ zu } l \text{ prim}). \tag{7}$$

Es ist demnach, wie behauptet, $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$.

Man kann jetzt ohne Schwierigkeit nachweisen, daß stets $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right) = 1$ sein muß, wo $\mathfrak{r}$ ein beliebiges zu l primes Primideal aus U bedeutet. Man wähle zu dem Zweck ein primäres Primideal $\mathfrak{p}$ so, daß $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ und bestimme eine zugehörige Primärzahl π so, daß $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1$, was stets möglich ist. Wäre nun $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1$, so könnte man offenbar stets einen Exponenten g angeben, sodaß

$$(8) \qquad \left(\frac{\pi\,\omega^g}{\mathfrak{r}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\pi\,\omega^g}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1.$$

Es würde dann nach b) folgen $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$, was der Wahl von $\mathfrak{p}$ widerspricht. Der Widerspruch fällt nur fort, wenn wir annehmen, daß $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}}\right) = 1$ ist. Damit ist aber der am Anfang des Paragraphen aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

§ 2.

Wir wollen nun den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz auf beliebige Untergruppen U, deren Index eine Potenz von l ist, ausdehnen; wir wollen also folgendes Theorem beweisen:

Satz VI. Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, dessen Klassenzahl durch die ungerade Primzahl l teilbar ist und der eine primitive l^{te} Einheitswurzel ζ enthält; es sei ferner U_i eine Untergruppe der Klassengruppe von k vom Index l^i und K_i der zu U_i gehörige Unterkörper des Klassenkörpers von k. Ist dann $\mathfrak{r}$ ein zu l primes Primideal aus k und $\mathfrak{r}^{l^n}$ die niedrigste Potenz von $\mathfrak{r}$, die in eine Klasse von U_i fällt, so zerfällt $\mathfrak{r}$ in K_i in l^{i-n} verschiedene Primideale.

Alle in diesem § betrachteten Ideale werden zu l prim angenommen. Unser Satz ist bewiesen für $i = 1$; wir nehmen an, daß er auch für $l^2, \ldots l^{i-1}$ gültig sei und wollen zeigen, daß er dann auch gilt, wenn der Index der betrachteten Untergruppe U_i

gleich l^i ist. Es sei zunächst $\mathfrak{r}$ ein Primideal aus U_i selbst; dann ist nachzuweisen, daß $\mathfrak{r}$ in K_i in l^i verschiedene Primfaktoren zerfällt. Zum Beweise füge ich zu U_i eine Klasse c hinzu, deren l^{te} Potenz erst in U_i liegt, und erhalte so die Untergruppe

(9) $$U_{i-1} = c^x\, U_i, \quad (x = 0, 1, \ldots l-1)$$

zu der der Unterkörper K_{i-1} des Klassenkörpers von k gehören möge. K_{i-1} ist dann auch Unterkörper von K_i. Es fallen nun die Relativnormen aller Klassen aus K_i in k in die Untergruppe U_i und in K_{i-1} in eine Untergruppe der Klassengruppe vom Index l, die mit $U_1^{(i-1)}$ bezeichnet sei. Die Klassengruppe von K_{i-1} läßt sich dann in der Gestalt:

(10) $$C_{i-1}^x\, U_1^{(i-1)} \quad (x = 0, 1, \ldots l-1)$$

darstellen, und die Klasse C_{i-1} so wählen, daß ihre Relativnorm in k in c fällt. Das Primideal $\mathfrak{r}$ liegt nun, da es in U_i liegt, auch in U_{i-1} und zerfällt demnach in K_{i-1} in l^{i-1} verschiedene Primideale, von denen ein beliebiges $\mathfrak{R}_{i-1}$ sei. Dieses liegt in K_{i-1} in der Untergruppe $U_1^{(i-1)}$, und da zu dieser Untergruppe der unverzweigte relativ Abel'sche Körper K_i gehört, so zerfällt $\mathfrak{R}_{i-1}$ in K_i nach Satz III in l verschiedene Primideale. Damit ist gezeigt, daß das Primideal $\mathfrak{r}$, wenn es in U_i liegt, in K_i in l^i verschiedene Primideale zerfällt.

Es sei nun $\mathfrak{r}$ ein Primideal, das nicht in U_i liegt und $\mathfrak{r}^{l^n}$ sei die niedrigste Potenz von $\mathfrak{r}$, die in U_i liegt. Es sei ferner c die Klasse, in der $\mathfrak{r}$ liegt. Wir bilden dann die Untergruppe

(11) $$U_{i-n} = c^x\, U_i, \quad (x = 0, 1, \ldots . l^n - 1)$$

zu der der unverzweigte relativ Abel'sche Körper K_{i-n} gehören möge. Es ist dann K_{i-n} ein Unterkörper von K_i und zwar ist die Relativgruppe zyklisch vom Grade l^n. Bildet man daher die Relativnormen der Klassen von K_i in K_{i-n}, so bilden diese dort eine Untergruppe der Klassengruppe $U_n^{(i-n)}$, deren Komplementärgruppe zyklisch vom Grade l^n ist. Man kann daher die Klassengruppe von K_{i-n} in der Gestalt:

(12) $$C_{i-n}^x\, U_n^{(i-n)} \quad (x = 0, 1, \ldots, l^n - 1)$$

schreiben und dabei C_{i-n} so annehmen, daß die Relativnorm von C_{i-n} in k in die Klasse c fällt. Das Primideal $\mathfrak{r}$ zerfällt nun in K_{i-n} in l^{i-n} verschiedene Primfaktoren. Ist $\mathfrak{R}_{i-n}$ ein beliebiger von diesen, so liegt er in K_{i-n} in einer Klasse, deren zugehöriges x bei Darstellung des Klassensystems von K_{i-n} in der Gestalt (12)

zu l prim ist. Da der unverzweigte relativ Abel'sche Körper K_i in Bezug auf K_{i-n} zur Untergruppe $U_n^{(i-n)}$ gehört, bleibt $\mathfrak{R}_{i-n}$ in K_i Primideal. Da dies für jeden Primfaktor von $\mathfrak{r}$ in K_{i-n} gilt, ist unser Satz vollständig bewiesen.

§ 3.

In den vorhergehenden Paragraphen waren die in l aufgehenden Primideale auszuschließen; es ist jetzt nachzuweisen, daß auch die Zerlegung dieser Primideale dem Satz VI folgt.

Wir bemerken zunächst, daß alle zu l primen Primideale eines Klassensystems

$$c^x, \quad (x \text{ zu } l \text{ prim}) \tag{13}$$

wo c eine beliebige Klasse aus k bedeutet, dieselbe Zerlegung erfahren, solange wir nur die in der Klassenzahl von k aufgehende Potenz von l beachten, d. h. nur solche unverzweigte relativ Abelsche Körper in Bezug auf k betrachten, deren Relativgrad eine Potenz von l ist. Daß in einem Klassensystem (13) unendlich viele zu l prime Primideale liegen, erkennt man, wenn man die beiden Untergruppen der Klassengruppe von k betrachtet:

$$c^y \quad (y = 0, 1, \ldots l^m - 1) \tag{14}$$

$$c^{ly} \quad (y = 0, 1, \ldots l^{m-1} - 1), \tag{15}$$

wobei angenommen wird, daß $c^{l^m} \sim 1$ und $c^{l^{m-1}}$ nicht ~ 1 $(m > 0)$. Wie aus der Existenz des Klassenkörpers folgt, gibt es unendlich viele zu l prime Primideale, die in (14) und nicht in (15) liegen. Daraus folgt aber, daß auch in (13) unendlich viele zu l prime Primideale liegen. Ist $m = 0$, also $c \sim 1$, so fallen (14) und (15) zusammen. Es reduziert sich dann (13) auf die Hauptklasse von k; daß in dieser unendlich viele zu l prime Primideale liegen, folgt wieder unmittelbar aus der Existenz des Klassenkörpers. Um die in l aufgehenden Primideale zu erledigen, genügt es daher nachzuweisen, daß ein solches Primideal $\mathfrak{l}_i$, das etwa in c_i liegt, ebenso zerlegt wird wie die in dem Klassensystem

$$c_i^x \quad (x \text{ zu } l \text{ prim}) \tag{16}$$

enthaltenen zu l primen Primideale.

Es sei nun $\mathfrak{l} = 1 - \zeta$ und

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s} \tag{17}$$

die Zerlegung von $\mathfrak{l}$ in Primideale im Körper k. Das Klassensystem von k werde mit

$$(18) \qquad c_1^{x_1} \dots c_z^{x_z} H \quad (x_i = 0, 1, \dots l-1)$$

bezeichnet, wo H der Klassenhauptverband ist. Man wähle nun unter den Primidealen $\mathfrak{l}_i$ eine Anzahl $z - z'$, etwa $\mathfrak{l}_{z'+1}, \dots \mathfrak{l}_z$ so aus, daß die Aequivalenzen:

$$(19) \qquad \mathfrak{l}_i \sim \mathfrak{l}_{z'+1}^{a_1^{(i)}} \dots \mathfrak{l}_z^{a_{z-z'}^{(i)}} \mathfrak{q}_i^l \quad (i = 1, 2, \dots z')$$

gelten; dagegen soll keine Aequivalenz von der Gestalt:

$$(20) \qquad \mathfrak{l}_{z'+1}^{n_1} \dots \mathfrak{l}_z^{n_{z-z'}} \sim \mathfrak{q}'^l$$

bestehen, außer wenn sämtliche Exponenten n durch l teilbar sind. Die z'' Primideale $\mathfrak{l}_{z'+1}, \dots \mathfrak{l}_z$ $(z'' = z - z')$ bestimmen dann z'' unabhängige Klassenverbände. Die Bezeichnung der Klassen in dem Klassensystem von k

$$(21) \qquad c_1^{x_1} \dots c_{z'}^{x_{z'}} c_{z'+1}^{x_{z'+1}} \dots c_z^{x_z} H$$

sei so gewählt, daß

$$\mathfrak{l}_{z'+i} \text{ in } c_i \quad (i = 1, 2, \dots z'')$$

liegt. Zu den z'' Untergruppen der Klassengruppe von k, die durch die Kongruenzen

$$(22) \qquad x_i \equiv 0\,(l) \quad (i = 1, 2, \dots z'')$$

definiert sind, mögen die singulären Primärzahlen $\omega_1, \dots \omega_{z''}$ gehören.

Um mich im Folgenden bequemer ausdrücken zu können, will ich sagen, daß eine zu l prime Zahl μ aus k hyperprimär nach $\mathfrak{l}_i$ ist, wenn die Kongruenz

$$(23) \qquad \mu \equiv \alpha^l \quad (\mathfrak{l}_i^{ll_i+1})$$

in k durch eine ganze Zahl α befriedigt werden kann. Ist die Zahl μ hyperprimär nach sämtlichen $\mathfrak{l}_i$ $(i = 1, 2, \dots z)$, so heißt sie, wie in meinen früheren Untersuchungen, schlechtweg hyperprimär.

Um nun nachzuweisen, daß die Primideale $\mathfrak{l}_i$ zunächst in den unverzweigten relativ Abel'schen Körpern vom Relativgrad l entsprechend dem allgemeinen Satz zerlegt werden, hat man offenbar zu zeigen:

1) daß ω_1 hyperprimär ist nach $\mathfrak{l}_{z'+2}, \mathfrak{l}_{z'+3}, \dots \mathfrak{l}_z$ und ferner nach $\mathfrak{l}_{i_1}, \dots \mathfrak{l}_{i_p}$, wobei die Indizes $i_1, \dots i_p$ dadurch bestimmt sind, daß in den Aequivalenzen (19) die Exponenten

$$(24) \qquad a_1^{(i_1)}, \dots a_1^{(i_p)}$$

durch l teilbar, alle anderen $a_1^{(i)}$ aber zu l prim sind (Analoges ist bezüglich $\omega_2, \dots \omega_{z'}$ nachzuweisen).

2) daß die singulären Primärzahlen

$$\omega_{z'+1}, \dots \omega_z, \tag{25}$$

die zu den durch die Kongruenzen

$$x_{z'+1} \equiv 0, \dots x_z \equiv 0 \ (l) \tag{26}$$

definierten Untergruppen von (21) gehören, hyperprimär schlechtweg sind.

§ 4.

Um die am Ende des vorigen § aufgestellten Behauptungen zu beweisen, müssen wir zunächst einige Kongruenzen betrachten, die für die Zahlen von k gelten. Es mögen $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_{m'}, \varkappa_1, \dots \varkappa_{m'}$ dieselbe Bedeutung wie in meinen früheren Untersuchungen [1]) haben. Wir setzen ferner:

$$\mathfrak{l}_i^{l-1}\,\mathfrak{l}_{z'+1}^{a_1^{(i)}} \dots \mathfrak{l}_z^{a_{z'}^{(i)}}\,\mathfrak{q}_i'^{\,l} = \lambda_i, \quad (i = 1, 2, \dots z') \tag{27}$$

wo die λ_i ganze Zahlen aus k bedeuten und bestimmen dann z' primäre Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_z$ so, daß

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}_i}\right) \neq 1, \ \left(\frac{\lambda_j}{\mathfrak{p}_i}\right) = 1 \quad \left(\begin{matrix} i \neq j \\ i, j = 1, 2, \dots z' \end{matrix}\right). \tag{28}$$

Bezeichnet man dann mit π_i Primärzahlen, die zu den Primidealen $\mathfrak{p}_i$ gehören, so erfüllt jede zu l prime Zahl μ aus k eine Kongruenz:

$$\equiv \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}}\,\varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{m'}^{v_{m'}}\,\omega_1^{w_1} \dots \omega_{z'}^{w_{z'}}\,\pi_1^{y_1} \dots \pi_{z'}^{y_{z'}}\,\alpha^l\,(\mathfrak{l}_1^{ll_1+1} \dots \mathfrak{l}_z^{ll_z+1})\ (u, v, w, y = 0, 1, \dots l-1)$$

Diese Kongruenz ist die Verallgemeinerung einer in meinen früheren Untersuchungen für den Fall, daß die Klassenzahl von k zu l prim ist, aufgestellten Kongruenz [2]).

Wir zeigen zunächst, daß ein Ausdruck

$$\nu = \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}}\,\varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{m'}^{v_{m'}}\,\omega_1^{w_1} \dots \omega_{z''}^{w_{z''}}\,\pi_1^{y_1} \dots \pi_{z'}^{y_{z'}} \tag{30}$$

niemals hyperprimär sein kann, außer wenn sämtliche Exponenten Null sind. Da ν, wenn es hyperprimär sein soll, sicher primär sein muß, folgt zunächst

$$u_1 = \dots = u_{m'} = v_1 \dots v_{m'} = 0.$$

---

1) Vergl. z. B. Math. Ann. 67, p. 14. § 5 und p. 10, § 3.

2) Ph. Furtwängler, Ueber das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste etc., Abhandl. der Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, Neue Folge Bd. II No. 3, Berlin 1902, § 18 Satz 47, p. 53 oder Ph. Furtwängler, Ueber die Reziprozitätsgesetze etc., Math. Ann. 58, § 13 Satz 36.

Angenommen es wäre nun ν hyperprimär und einer der Exponenten w oder y von Null verschieden. Wir betrachten dann den Körper $K = (\sqrt[l]{\nu}, k)$; in ihm zerfallen sämtliche Primideale $\mathfrak{l}_i$ in l verschiedene Primideale. Es sind demnach auch die Zahlen λ_i Relativnormen von Idealen $\mathfrak{L}_i$ aus K. Bestimmt man das Geschlecht dieser Ideale, so ergibt sich aus der Charakterenrelation (1):

$$\left(\frac{\lambda_i}{\mathfrak{p}_i}\right)^{y_i} = 1; \quad (i = 1, 2, \ldots z')$$

es folgt daher nach (28) $y_1 = y_2 = \ldots y_\nu = 0$. Es kann deshalb höchstens ein Exponent w von Null verschieden sein. Der Körper K wäre dann unverzweigt in Bezug auf k und müßte zu einer Untergruppe der Klassengruppe von k gehören, die durch eine Kongruenz:

(31) $$m_1 x_1 + \ldots m_{z'} x_{z'} \equiv 0 \ (l)$$

definiert ist. Bestimmt man dann die ganzen rationalen Zahlen $n_1, \ldots n_{z'}$ so, daß

(32) $$m_1 n_1 + \ldots m_{z'} n_{z'} \not\equiv 0, \ (l)$$

so liegt das Ideal $\mathfrak{l}_{z'+1}^{n_1} \ldots \mathfrak{l}_z^{n_{z'}}$ in einer Klasse, die nicht der durch (31) charakterisierten Untergruppe angehört, müßte aber andererseits in K zerlegt werden, wenn ν hyperprimär wäre. Da man somit zu einem Widerspruch kommt, kann ein Ausdruck (30) nur in dem trivialen Falle $\nu = 1$ hyperprimär sein.

Läßt man nun in (29) α ein System von Zahlen durchlaufen, wie es bei den früheren analogen Entwicklungen angegeben ist[1]) und außerdem die Exponenten u, v, w, y alle Werte $0, 1, \ldots l-1$ annehmen, so erhält man genau $\varphi(\bar{\mathfrak{l}})$ nach $\bar{\mathfrak{l}}$ inkongruente zu l prime Zahlen, wo zur Abkürzung:

(33) $$\bar{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l}_1^{ll_1+1} \ldots \mathfrak{l}_z^{ll_z+1}$$

gesetzt ist. Damit ist aber unsere Behauptung bezüglich der Kongruenz (29) bewiesen.

Außer den in (29) auftretenden singulären Primärzahlen $\omega_1, \ldots \omega_{z''}$ existieren noch $e - z''$ davon unabhängige $\bar{\omega}_{z''+1}, \ldots \bar{\omega}_e$; wir wollen zeigen, daß man diese stets als hyperprimäre Zahlen wählen kann. Nach (29) existiert für $\bar{\omega}_{z''+1}$ eine Kongruenz:

34) $$\bar{\omega}_{z''+1} \equiv \omega_1^{w_1} \ldots \omega_{z''}^{w_{z''}} \pi_1^{y_1} \ldots \pi_z^{y_{z'}} \alpha^l \ (\bar{\mathfrak{l}}).$$

Setzt man $\omega_{z''+1} = \bar{\omega}_{z''+1}^{\,l-1} \omega_1^{w_1} \ldots \omega_{z''}^{w_{z''}} \pi_1^{y_1} \ldots \pi_z^{y_{z'}}$, so ist $\omega_{z''+1}$ eine hyperprimäre Zahl. Durch Betrachtung des Körpers $(\sqrt[l]{\omega_{z''+1}}, k)$ schließt man in analoger Weise wie oben, daß $y_1 = \ldots y_{z'} = 0$.

1) Vergl. die in der vorigen Fußnote zitierten Stellen.

Es ist daher $\omega_{z'+1}$ eine singuläre Primärzahl, die von $\omega_1, \ldots \omega_{z'}$ unabhängig ist und daher an Stelle von $\overline{\omega}_{z'+1}$ gesetzt werden kann, man hat dann eine hyperprimäre Zahl. Ebenso kann man mit $\overline{\omega}_{z'+2}, \ldots \overline{\omega}_{s}$ verfahren. Die Untergruppen der Klassengruppe von k, welche zu den singulären Primärzahlen $\omega_{z'+1}, \ldots \omega_{s}$ gehören, müssen sämtliche in l aufgehenden Primideale enthalten. Man kann daher die Klassenbezeichnung in (21) so gewählt denken, daß die singulären Primärzahlen $\omega_{z'+1}, \ldots \omega_{s}$ resp. zu den durch die Kongruenzen

$$x_{z''+1} \equiv 0, \ldots, \quad x_s \equiv 0 \quad (l)$$

definierten Untergruppen in (21) gehören. Damit ist die unter 2) am Ende von § 3 aufgestellte Behauptung bewiesen.

§ 5.

Um auch die unter 1) am Schlusse von § 3 aufgestellte Behauptung zu beweisen, müssen wir noch eine zweite Kongruenz für die Zahlen von k betrachten. Wir setzen

$$(35) \qquad \overline{\mathfrak{l}}_1 = \mathfrak{l}_1^{ll_1} \mathfrak{l}_2^{ll_2+1} \ldots \mathfrak{l}_z^{ll_z+1}$$

und behaupten, daß für jede zu l prime Zahl μ in k eine Kongruenz:

$$\mu \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \omega_1^{w_1} \ldots \omega_{z'}^{w_{z'}} \pi_2^{y_2} \ldots \pi_{z'}^{y_{z'}} \alpha^l \, (\overline{\mathfrak{l}}_1) \qquad (u, v, w, y = 0, 1, \ldots l-1)$$

gilt, wo jetzt auf der rechten Seite der Faktor $\pi_1^{y_1}$ fehlt. Ein Ausdruck:

$$(37) \qquad \nu = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'}^{v_{m'}} \omega_1^{w_1} \ldots \omega_{z''}^{w_{z'}} \pi_2^{y_2} \ldots \pi_{z'}^{y_{z'}}$$

kann nämlich niemals der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k nach $\overline{\mathfrak{l}}_1$ kongruent sein außer in dem trivialen Falle $\nu = 1$. Denn soll ν diese Eigenschaft haben, so muß zunächst:

$$u_1 = \ldots = u_{m'} = v_1 = \ldots = v_{m'} = 0$$

sein. Im Körper $K(\sqrt[l]{\nu}, k)$ werden dann $\mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_z$ zerlegt und daher $\lambda_2, \ldots \lambda_{z'}$ Relativnormen von Idealen aus K. Bestimmt man dann die Geschlechter dieser Ideale, so folgt aus den betreffenden Charakterenrelationen $y_2 = \ldots = y_{z'} = 0$. Daß auch die Exponenten w gleich Null sein müssen, folgt analog wie oben, wenn man das Ideal

$$(38) \qquad \mathfrak{l}_{z'+1}^{n_1} \ldots \mathfrak{l}_s^{n_{z''}}$$

betrachtet, bei dem die Exponenten n der Relation (32) genügen.

Läßt man nun α in (36) in Bezug auf den Modul $\mathfrak{l}_1^{l_1}$ ein System von $\varphi(\mathfrak{l}_1^{l_1})$ zu l primer nach $\mathfrak{l}_1^{l_1}$ inkongruenter Zahlen durchlaufen und in Bezug auf die Moduln $\mathfrak{l}_2^{l_2+1}, \ldots \mathfrak{l}_z^{l_z+1}$ resp. Systeme von $\frac{\varphi(\mathfrak{l}_2^{l_2+1})}{l}, \ldots \frac{\varphi(\mathfrak{l}_z^{l_z+1})}{l}$ Zahlen, wie sie an der zuletzt zitierten Stelle angegeben sind, so liefert die rechte Seite von (36), wenn man noch die Exponenten u, v, w, y alle zulässigen Werte annehmen läßt, genau

$$l^{2m'+z-1}\varphi(\mathfrak{l}_1^{l_1})\cdot\frac{\varphi(\mathfrak{l}_2^{l_2+1})}{l}\cdots\frac{\varphi(\mathfrak{l}_z^{l_z+1})}{l} = \varphi(\bar{\mathfrak{l}}_1) \tag{39}$$

nach $\bar{\mathfrak{l}}_1$ inkongruente zu l prime Zahlen. Damit ist gezeigt, daß jede zu l prime ganze Zahl aus k eine Kongruenz von der Art (36) befriedigt.

Dies gilt auch für die Zahl π_1; man hat demnach

$$\bar{\pi}_1 = \pi_1\,\omega_1^{-w_1}\ldots\omega_{z''}^{-w_{z''}}\,\pi_2^{-y_2}\ldots\pi_{z_i}^{-y_{z'}} \equiv \beta^l(\bar{\mathfrak{l}}_1) \tag{40}$$

Betrachtet man jetzt wieder den Körper $K(\sqrt[l]{\bar{\pi}_1}, k)$, so folgt aus der Zerlegbarkeit von $\mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_z$ analog wie oben, daß $y_2 = \ldots y_{z'} = 0$ ist. Ersetzt man also π_1 durch $\bar{\pi}_1$, was gestattet ist, so ist das neue π_1 hyperprimär nach $\mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_z$. In entsprechender Weise kann man es erreichen, daß π_i hyperprimär nach

$$\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_{i-1}, \mathfrak{l}_{i+1}, \ldots \mathfrak{l}_z \quad (i = 1, 2, \ldots z')$$

wird. Wir nehmen im Folgenden an, daß die Primärzahlen $\pi_1, \ldots \pi_{z'}$ in der angegebenen Weise gewählt seien.

Wir haben jetzt noch eine dritte Art von Kongruenzen für die Zahlen von k zu betrachten. Setzt man

$$\frac{\bar{\mathfrak{l}}}{\mathfrak{l}_{z'+1}} = \bar{\mathfrak{l}}_{z'+1}, \tag{41}$$

so gilt für jede zu l prime ganze Zahl μ in k eine Kongruenz:

$$\mu \equiv \varepsilon_1^{u_1}\ldots\varepsilon_{m'}^{u_{m'}}\,\varkappa_1^{v_1}\ldots\varkappa_{m'}^{v_{m'}}\,\omega_2^{w_2}\ldots\omega_{z''}^{w_{z''}}\,\pi_1^{y_1}\ldots\pi_{z'}^{y_{z'}}\,\alpha^l(\bar{\mathfrak{l}}_{z'+1}), \tag{42}$$

wo auf der rechten Seite jetzt der Faktor $\omega_1^{w_1}$ fehlt. Zunächst ist nämlich wieder klar, daß ein Ausdruck

$$\nu = \varepsilon_1^{u_1}\ldots\varepsilon_{m'}^{u_{m'}}\,\varkappa_1^{v_1}\ldots\varkappa_{m'}^{v_{m'}}\,\omega_2^{w_2}\ldots\omega_{z''}^{w_{z''}}\,\pi_1^{y_1}\ldots\pi_{z'}^{y_{z'}} \tag{43}$$

außer in dem trivialen Falle $\nu = 1$ nicht der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k nach $\bar{\mathfrak{l}}_{z'+1}$ kongruent sein kann. Denn ν ist in

diesem Falle primär, also $u_1 = \ldots = u_{m'} = v_1 = \ldots = v_{m'} = 0$. Betrachtet man jetzt den Körper $K(\sqrt[l]{\nu}, k)$, so werden in ihm alle Primideale $\mathfrak{l}_i$ außer $\mathfrak{l}_{z+1}$ zerlegt. Gemäß unserer Annahme über $\pi_1, \ldots \pi_z$ müßte dann:

$$\omega' = \omega_2^{w_2} \ldots \omega_{z'}^{w_{z'}} \tag{44}$$

hyperprimär nach $\mathfrak{l}_{z+2}, \ldots \mathfrak{l}_z$ sein; diese Primideale müßten also im Körper $(\sqrt[l]{\omega'}, k)$ sämtlich zerlegt werden. Gehört nun zu ω' eine Untergruppe, die durch die Kongruenz

$$m_2 x_2 + \ldots m_{z'} x_{z'} \equiv 0\,(l) \tag{45}$$

bestimmt wird, und wählt man Exponenten $n_2, \ldots n_{z'}$ so, daß

$$m_2 n_2 + \ldots + m_{z'} n_{z'} \not\equiv 0\,(l), \tag{46}$$

so kann $\mathfrak{l}_{z+2}^{n_2} \ldots \mathfrak{l}_{z'}^{n_{z'}}$ in $(\sqrt[l]{\omega'}, k)$ nicht zerlegt werden. Man kommt daher zu einem Widerspruch, der nur fortfällt, wenn $w_2, \ldots w_z$ in (44) und (43) Null gesetzt wird. Es müßte also

$$\nu = \pi_1^{y_1} \ldots \pi_z^{y_z} \tag{47}$$

der l^{ten} Potenz einer ganzen Zahl aus k nach $\overline{\mathfrak{l}}_{z+1}$ kongruent werden, also ν hyperprimär nach sämtlichen $\mathfrak{l}_i$ mit Ausnahme von $\mathfrak{l}_{z+1}$ sein. Da also $\nu, \pi_2, \ldots \pi_z$ hyperprimär nach $\mathfrak{l}_1$ sein müßten, würde dies auch von $\pi_1^{y_1}$ gelten. Das ist nur möglich, wenn $y_1 = 0$ ist; in derselben Weise folgt $y_2 = \ldots y_z = 0$. Damit ist gezeigt, daß (43) nur in dem trivialen Falle $\nu = 1$ der l^{ten} Potenz einer Zahl aus k nach $\overline{\mathfrak{l}}_{z+1}$ kongruent sein kann. Läßt man jetzt α in (42) ein dem im vorigen Paragraphen angegebenen Zahlsystem (vgl. (39), an Stelle von $\mathfrak{l}_1$ tritt $\mathfrak{l}_{z+1}$) analoges durchlaufen, so ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung bezüglich der Kongruenz (42).

Hiernach hat man, wenn man (42) auf ω_1 anwendet, eine Kongruenz

$$\omega_1 \omega_2^{w_2} \ldots \omega_{z'}^{w_{z'}} \pi_1^{y_1} \ldots \pi_z^{y_z} \equiv \beta^l (\overline{\mathfrak{l}}_{z+1}) \tag{48}$$

Es muß also

$$\omega_1' = \omega_1 \omega_2^{w_2} \ldots \omega_{z'}^{w_{z'}} \tag{49}$$

hyperprimär nach $\mathfrak{l}_{z+2}, \ldots \mathfrak{l}_z$ sein, es müssen daher $\mathfrak{l}_{z+2}, \ldots \mathfrak{l}_z$ im Körper $(\sqrt[l]{\omega_1'}, k)$ zerlegt werden. Dann kann aber ω_1' nur zu der Untergruppe, die durch die Kongruenz $x_1 \equiv 0\,(l)$ definiert ist, gehören, d. h. es muß $w_2 = \ldots = w_{z'} = 0$ in (49) sein. Hiernach ist ω_1 hyperprimär nach $\mathfrak{l}_{z+2}, \ldots \mathfrak{l}_z$, wie wir behauptet hatten. Außerdem muß gelten:

(50) $$\omega_1 \pi_1^{y_1} \ldots \pi_\nu^{y_\nu} \equiv \beta^l \; (\overline{\mathfrak{l}}_{\nu+1})$$

Es ist deshalb $\omega_1'' = \omega_1 \pi_1^{y_1} \ldots \pi_\nu^{y_\nu}$ hyperprimär nach sämtlichen $\mathfrak{l}_i$ außer $\mathfrak{l}_{\nu+1}$. Im Körper $(\sqrt[l]{\omega_1''}, k)$ werden dann $\lambda_{i_1}, \ldots \lambda_{i_p}$ Relativnormen von Idealen und die Bestimmung der Geschlechter dieser Ideale liefert:

(51) $$y_{i_1} = \ldots = y_{i_p} = 0.$$

Beachtet man die über die π_i gemachten Annahmen, so folgt aus (50) und (51), daß ω_1 auch hyperprimär nach $\mathfrak{l}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{l}_{i_p}$ ist.

Damit ist unsere am Ende von § 3 über ω_1 aufgestellte Behauptung bewiesen. Denkt man sich die ganz analogen Entwicklungen für $\omega_2, \ldots \omega_\nu$ durchgeführt, so folgt, daß die Primideale $\mathfrak{l}_i$ in den relativ zyklischen unverzweigten Körpern vom Relativgrad l in Bezug auf k ebenso zerlegt werden wie die zu l primen Primideale, die denselben Klassenexponenten besitzen.

Daraus läßt sich allgemein schließen, daß auch die in l aufgehenden Primideale so zerlegt werden, wie es Satz II angibt. Ist nämlich $\mathfrak{l}_i$ ein beliebiges in l aufgehendes Primideal aus der Klasse c in k und $\mathfrak{p}$ irgend ein zu l primes Primideal aus dem Klassensystem c^x (x zu l prim), so werden $\mathfrak{l}_i$ und $\mathfrak{p}$ im Körper K_1, der unverzweigt und relativ zyklisch vom Relativgrad l in Bezug auf k ist, entweder beide zerlegt oder sie bleiben beide Primideale. Ist dann K_{12} wieder unverzweigt und relativ zyklisch vom Relativgrad l in Bezug auf K_1, also vom Relativgrad l^2 in Bezug auf k, so werden $\mathfrak{l}_i$ und $\mathfrak{p}$, wenn sie in K_1 Primideale geblieben sind, in K_{12} entweder beide Primideale bleiben oder beide zerlegt werden. Wird $\mathfrak{l}_i$ in K_1 zerlegt und ist $\mathfrak{L}_i$ ein Primfaktor von $\mathfrak{l}_i$ in K_1, der in die Klasse C fällt, so fällt die Relativnorm von C in k in c. Wählt man jetzt aus dem Klassensystem C^x (x zu l prim) ein zu l primes Primideal $\mathfrak{P}'$, so wird dies bei dem Uebergang von K_1 zu K_{12} sich ebenso verhalten wie $\mathfrak{L}_i$. Die Relativnorm $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{P}'$ fällt in k in das System c^x (x zu l prim), d. h. es gibt in c^x (x zu l prim) ein zu l primes Primideal, das auch in K_{12} in der gleichen Weise zerlegt wird wie $\mathfrak{l}_i$. In dieser Weise kann man offenbar fortfahren zu schließen und damit zeigen, daß die in l aufgehenden Primideale bei ihrer Zerlegung im Klassenkörper und seinen Unterkörpern dasselbe Verhalten zeigen wie die zu l primen Primideale mit dem gleichen Klassenexponenten.

§ 6.

Wir haben bisher die Annahme gemacht, daß der Körper k eine primitive l^{te} Einheitswurzel enthält. Diese Annahme ist jetzt zu beseitigen, was unschwer zu erreichen ist. Es sei also nunmehr k ein Körper, der keine l^{te} Einheitswurzel enthält und der Körper (k, ζ) gleich k'. Der Relativgrad g von k' in Bezug auf k ist dann als Teiler von $l-1$ zu l prim. Betrachtet man wieder alle Klassen, deren Exponent zu l prim ist, als Einheitselement der Klassengruppe und bezeichnet das Klassensystem von k mit $(c)_k$, so läßt sich das Klassensystem von k' in der Gestalt darstellen:

$$(c)_k \,.\, U,$$

wo U alle Klassen aus k' umfaßt, deren Relativnorm in k in die Hauptklasse fällt. Der Klassenkörper Kk läßt sich dann bekanntlich in der Weise aufstellen[1]), daß man den zur Untergruppe U gehörigen unverzweigten relativ Abel'schen Körper K' in Bezug auf k' aufsucht. Dieser ist dann auch relativ Abel'sch in Bezug auf k und man erhält den gesuchten Klassenkörper Kk, wenn man denjenigen Unterkörper von K' bestimmt, der gegenüber der Relativgruppe von k' bezüglich k invariant bleibt. In entsprechender Weise erhält man einen k enthaltenden Unterkörper K_u von Kk, der zur Gruppe $(c)_u$ in k gehört, indem man den zur Untergruppe $(c)_u\, U$ von k' gehörigen unverzweigten Körper K'_u bestimmt, der natürlich ein Unterkörper von K' ist, und dann den Unterkörper K_u von K'_u aufsucht, der gegenüber der Relativgruppe von k' bez. k invariant bleibt. Es sei nun $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal aus k und $\mathfrak{p}^{l^n}$ die niedrigste Potenz von $\mathfrak{p}$, die in $(c)_u$ hineinfällt. Es ist nachzuweisen, daß $\mathfrak{p}$ in K_u in l^{m-n} verschiedene Primideale zerfällt, wenn l^m der Relativgrad von K_u bez. k ist.

$\mathfrak{p}$ möge in k' in s Primideale zerfallen:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_s,$$

die gleich oder verschieden sein können. Ihre Anzahl s ist jedenfalls als Teiler von $l-1$ zu l prim. Für ein beliebiges von ihnen $\mathfrak{P}_i$ ist dann $\mathfrak{P}_i^{l^n}$ die niedrigste Potenz, die in eine Klasse von $(c)_u\, U$ fällt. Denn zunächst liegt $\mathfrak{P}_i^{l^n}$ sicher in $(c)_u\, U$, weil diese Untergruppe alle Ideale enthält, deren Relativnormen in k in $(c)_u$

1) Ph. Furtwängler, Math. Ann. 63, p. 1, Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, § 9.

liegen. Es liegt aber $\mathfrak{P}_i^{l^{n-1}}$ noch nicht in $(c)_u U$, weil sonst auch $\mathfrak{p}^{l^{n-1}}$ in $(c)_u$ in k läge. $\mathfrak{P}_i$ zerfällt demnach in K'_u in l^{m-n} verschiedene Primfaktoren. Die Anzahl der Primfaktoren von $\mathfrak{p}$ in K'_u ist folglich $s \,.\, l^{m-n}$. Daraus ergibt sich aber, daß $\mathfrak{p}$ in K_u in l^{m-n} verschiedene Primfaktoren zerfällt. Denn ihre Anzahl muß nach dem eben Angeführten, da s und der Relativgrad von K'_u bez. K_u zu l prim sind, genau l^{m-n} sein. Daß sie alle verschieden sind, folgt aus der Unverzweigtheit von K_u in Bezug auf k. Damit ist auch der Fall, daß der Körper k keine l^{te} Einheitswurzel enthält, erledigt.

§ 7.

Für den Fall $l = 2$ sind noch einige besondere Betrachtungen nötig, wenn sich unter den mit k konjugierten Körpern reelle befinden. Ich behalte hier dieselben Bezeichnungen bei, die ich bei meinen früheren Untersuchungen über diesen Fall benutzt habe[1]). Es kommt vor allem darauf an, die Sätze III und IV in dieser Richtung zu verallgemeinern[2]).

Der Grad des Körpers k sei m und unter den konjugierten mögen s reelle sein: $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots k^{(s)}$. Die Anzahl der unabhängigen Einheitenverbände in k ist $m' = \dfrac{m+s}{2}$ und die Vorzeichengruppe der Einheiten von k sei von der Ordnung 2^p. Die Klassenzahl von k sei $2^{h'}$, resp. 2^h bei weiterer, resp. schärferer Aequivalenz, wobei alle Klassen mit ungeraden Klassenexponenten als Einheitselement der Klassengruppe genommen werden. Es gilt dann, wenn $s-p = p'$ gesetzt wird,

$$h = h' + (s-p) = h' + p'.$$

Die Klassenverbände von k bei gewöhnlicher Aequivalenz seien:

$$c_1^{x_1} \ldots c_e^{x_e}\, H \qquad (x = 0, 1) \tag{52}$$

und bei schärferer Aequivalenz

$$c_1^{x_1} \ldots c_e^{x_e}\, d_1^{y_1} \ldots d_{e'}^{y_{e'}}\, H \qquad (x, y = 0, 1). \tag{53}$$

1) Ebenda § 10 und Ph. Furtwängler, diese Nachrichten 1907, Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers, zweite Mitteilnng; § 1 und 2.

2) Ich gebe die folgenden Entwicklungen hier kürzer, weil ich in der Fortsetzung meiner auf S. 296 zitierten Arbeit, die demnächst in den Math. Ann. erscheinen wird, diese Untersuchungen vom Standpunkt der Reziprozitätsgesetze aus ausführlicher darstellen werde.

Ich betrachte jetzt den Körper $K(\sqrt{\mu}, k)$, wobei μ eine primäre Zahl aus k sei, die in n der konjugierten Körper $k^{(i)}$ negativ werde. Haben dann a^*, a, v^*, v, t, e, e_1 die frühere Bedeutung, so gelten die beiden Ungleichungen:

$$(54) \qquad \begin{aligned} a^* &\leqq t - m' + v^* + n + e_1 - 1 \\ a &\leqq a^* + v - v^* + e - e_1, \end{aligned}$$

die in ähnlicher Weise wie die analogen Ungleichungen in meinen früheren Untersuchungen bewiesen werden können[1]).

Ich betrachte jetzt die Geschlechter in $K(\sqrt{\mu}, k)$, wobei μ als primär, aber nicht als singuläre Primärzahl angenommen wird, und will zeigen, daß mindestens stets ein Hauptcharakter existiert. Zur Charakterisierung der Geschlechter kommen zunächst $t+n$ Normenrestsymbole in Betracht, nämlich diejenigen, die den in μ in ungerader Potenz aufgehenden Primidealen $\mathfrak{d}_1, \ldots \mathfrak{d}_t$ entsprechen und außerdem

$$\left(\frac{-, \mu}{1^{(i)}}\right),$$

wobei die Indizes i so zu wählen sind, daß die zu μ konjugierte Zahl im Körper $k^{(i)}$ negativ ist. Von diesen $t+n$ Normenrestsymbolen scheiden in bekannter Weise r^* aus, dadurch daß r^* unabhängige Einheiten oder Quadrate von Idealen in k existieren, die gewisse der Normenrestsymbole zu -1 machen; unter ihnen mögen r' Einheiten sein. Es gibt dann:

$r = t + n - r^* + e$ Charaktere, darunter
$t + n - r^*$ Hauptcharaktere und
e Nebencharaktere,

welche die verschiedenen Klassenverbände in k charakterisieren. Es gilt nun:

$$(55) \qquad \begin{aligned} v + r' &\leqq m' \\ a^* &\leqq t - m' + v^* + n + e_1 - 1 \\ a &\leqq a^* + (v - v^*) + (e - e_1) - (r^* - r') \\ \hline a &\leqq t - r^* + n + e - 1 \end{aligned}$$

$$(56) \qquad t - r^* + n \geqq a - (e-1).$$

Da nun $a > e - 1$ ist, weil der Körper K nach Annahme nicht unverzweigt inbezug auf k ist, so folgt:

$$(57) \qquad t - r^* + n \geqq 1,$$

d. h. es existiert stets mindestens ein Hauptcharakter.

1) Diese Nachrichten 1904, p. 184 ff.

Wir wollen jetzt eine Kongruenz nach dem Modul 4, der alle zu 2 primen Zahlen aus k genügen müssen, ableiten. Wir hatten die Zahl der unabhängigen Klassenverbände in k bei gewöhnlicher Aequivalenz mit e bezeichnet; bei Einführung der schärferen Aequivalenz sollen e' unabhängige Klassenverbände neu hinzutreten und e'' Grundklassen eine Verdoppelung ihres Exponenten erfahren; es ist dann

$$(58) \qquad e' + e'' = p.$$

Unter den Verbänden

$$(59) \qquad \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \, \varepsilon_{m'+1}^{v_1} \dots \varepsilon_{m'+e}^{v_e} \, \alpha^2,$$

wo $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_{m'}$ Einheiten und $\varepsilon_{m'+1} \dots \varepsilon_{m'+e}$ Quadrate von Idealen aus den e unabhängigen Klassenverbänden sind, die k gegenüber gewöhnlicher Aequivalenz besitzt, sind $e + e'$ unabhängige primäre und $m' - e'$ nicht primäre. Ich schreibe (mit geringer Aenderung der Bezeichnung) das System (59) in der Gestalt:

$$(60) \qquad \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'-e'}^{u_{m'-e'}} \, \omega_1^{v_1} \dots \omega_e^{v_e} \, \omega_{e+1}^{v_{e+1}} \dots \omega_{e+e'}^{v_{e+e'}} \, \alpha^2,$$

indem ich $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_{m'-e'}$ als nicht primär und $\omega_1, \dots \omega_{e+e'}$ als primär annehme. Ich bestimme dann $m' - e'$ Primideale $\mathfrak{q}_i$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(61) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1, \quad \left(\dfrac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \quad \begin{pmatrix} j \neq i \\ i, j = 1, 2, \dots m' - e' \end{pmatrix} \\ \left(\dfrac{\omega_1}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1, \dots \left(\dfrac{\omega_{e+e'}}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \end{cases}$$

und wähle Ideale $\mathfrak{q}_i'$ so, daß

$$(62) \qquad \varkappa_i = \mathfrak{q}_i \mathfrak{q}_i'^2$$

in der Hauptklasse im engern Sinne liegt, also $\varkappa_i$ total positiv wird, was stets möglich ist.

Unter den Verbänden (59) oder (60) sind $m' - p + e - e''$ total positive unabhängige Verbände; unter diesen gibt es höchstens 2^e primäre und auch wirklich 2^e primäre Verbände. Denn die singulären Primärzahlen $\omega_1, \dots \omega_e$, die zu den durch die Kongruenzen

$$x_i \equiv 0 \, (2) \qquad (i = 1, 2, \dots e)$$

definierten Untergruppen von (53) gehören, sind total positiv, wie sich nachher ergeben wird und wie man auch direkt aus meinen früheren Entwicklungen hätte schließen können. Es gibt daher in (60) mindestens $m' - p - e''$ total positive nichtprimäre unab-

hängige Verbände. Ihre genaue Zahl sei m'' und sie seien durch $\bar{\varepsilon}_1, \dots \bar{\varepsilon}_{m''}$ charakterisiert. Es gilt dann der

Satz VII: Jede zu 2 prime Zahl aus k befriedigt eine Kongruenz:

$$(63) \qquad \mu \equiv \bar{\varepsilon}_1^{u_1} \dots \bar{\varepsilon}_{m''}^{u_{m''}} \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{m'-e'}^{v_{m'-e'}} \alpha^2 (4), \qquad (u, v = 0, 1)$$

wo $m'' = m' - p - e'' = \frac{m-s}{2} + e'$ ist.

Zunächst ist klar, daß eine Zahl

$$(64) \qquad \nu = \bar{\varepsilon}_1^{u_1} \dots \bar{\varepsilon}_{m''}^{u_{m''}} \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{m'-e'}^{v_{m'-e'}} \qquad (u, v = 0, 1)$$

außer in dem trivialen Falle $\nu = 1$ niemals primär sein kann. Denn andernfalls würde, da ν total positiv ist, ein Körper $K(\sqrt{\nu}, k)$ existieren, dessen Geschlechter keinen Hauptcharakter besäßen, was oben als unmöglich erkannt ist. Läßt man auf der rechten Seite von (63) α ein volles System von $\varphi(2)$ zu 2 primer nach 2 inkongruenter Zahlen durchlaufen, so erhält man

$$(65) \qquad 2^{m''} . 2^{m'-e'} \varphi(2)$$

mod. 4 inkongruente Zahlen. Da höchstens $2^m \varphi(2)$ solcher Zahlen existieren, folgt

$$(66) \qquad m'' + m' - e' \leqq m:$$

Andererseits ist, wie wir oben sahen:

$$(67) \qquad m'' \geqq m' - p - e'' = m - m' + e'.$$

Daraus folgt:

$$(68) \qquad m'' = m' - p - e'' = m - m' + e' = \frac{m-s}{2} + e'$$

und Satz VII ist bewiesen.

Daß die singulären Primärzahlen $\omega_1, \dots \omega_e$ total positiv sind, hätte man auch direkt durch eine kleine Abänderung meiner früheren Entwicklungen über den Klassenkörper schließen können. Man definiere an der zitierten Stelle[1]) $m' + e$ Primideale $\mathfrak{q}_i$ derart, daß

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = -1, \quad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \quad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \dots m' + e \\ i \neq j \end{pmatrix}$$

und erhält dann wie dort das Zahlensystem:

$$\varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}$$

1) Diese Nachrichten 1904, p. 184 oder Math. Ann. 63 (1906), p. 26.

in dem $e+s$ unabhängige primäre Zahlen vorhanden sein müssen, weil im ganzen nur $2^{2m'-s}$ Arten von Zahlen in k existieren. Man kann daher an der genannten Stelle ω_1 und ebenso $\omega_2, \ldots \omega_e$ total positiv wählen.

Auf Grund des Satzes VII beweist man nun in bekannter Weise

Satz VIII: Ist $\mathfrak{p}$ ein primäres Primideal aus k, d. h. jede Zahl aus k, die Quadrat eines Ideals ist, Rest von $\mathfrak{p}$, so kann man stets ein Ideal $\mathfrak{p}'$ so wählen, daß

$$(\pi) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'^2$$

wird und π eine total positive primäre Zahl ist.

Ebenso läßt sich auf Grund der vorstehenden Entwicklungen ohne Schwierigkeit der Satz V auf den Fall $l = 2$ in folgender Fassung übertragen:

Satz IX: Ist μ eine total positive primäre Zahl aus k von der Gestalt

$$\mu = \mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{d}_t \mathfrak{q}^2,$$

wo $\mathfrak{d}_1, \ldots \mathfrak{d}_t$ primäre Primideale aus k bedeuten, so existieren für die Geschlechter in $K(\sqrt{\mu}, k)$ t Hauptcharaktere $\chi_1, \ldots \chi_t$ und e Nebencharaktere $\psi_1, \ldots \psi_e$, zwischen denen eine Relation:

$$\chi_1 \cdot \chi_2 \cdots \chi_t \cdot \psi_1^{m_1} \ldots \psi_e^{m_e} = 1 \tag{69}$$

besteht. Ist μ primär, aber nicht total positiv, so treten ebenfalls in der zugehörigen Charakterenrelation des Körpers $K(\sqrt{\mu}, k)$ stets die Hauptcharaktere, die den Primfaktoren $\mathfrak{d}_1, \ldots \mathfrak{d}_t$ entsprechen, mit dem Exponenten 1 auf.

§ 8.

Mit Hülfe der beiden letzten Sätze kann man nun die Entwicklungen der §§ 2—5 für den Fall $l = 2$ durchführen. Dabei können die zu 2 primen Primideale ganz analog wie in § 2 behandelt werden. Bezüglich der in 2 aufgehenden Primideale wenden wir die analoge Bezeichnung wie in §§ 3—5 an; wir setzen also:

$$2 = \mathfrak{l}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{l}_z^{l_z}$$

und stellen dann die (19) entsprechenden Aequivalenzen auf, wobei der weitere Aequivalenzbegriff zu benutzen ist. Die Klassenbezeichnung in (53) nehmen wir ferner so gewählt an, daß $\mathfrak{l}_{r+1}$ in

c_i $(i = 1, 2, \ldots s'')$ liegt. Wir bestimmen dann die λ_i gemäß (27) und wählen primäre Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_{s'}$ entsprechend (28). Die zugehörigen Primärzahlen $\pi_1, \ldots \pi_{s'}$ sollen total positiv angenommen werden. Jede zu 2 prime Zahl μ aus k befriedigt dann Kongruenzen folgender Art:

$$(70) \quad \mu \equiv (\varepsilon)(\varkappa) \cdot \omega_1^{w_1} \ldots \omega_{s''}^{w_{s''}} \pi_1^{y_1} \ldots \pi_{s'}^{y_{s'}} \alpha^2 (\overline{\mathfrak{l}}) \quad (w, y = 0, 1)$$

$$(71) \quad \mu \equiv (\varepsilon)(\varkappa) \cdot \omega_1^{w_1} \ldots \omega_{s''}^{w_{s''}} \pi_2^{y_2} \ldots \pi_{s'}^{y_{s'}} \alpha^2 (\overline{\mathfrak{l}_1}) \quad (w, y = 0, 1)$$

$$(72) \quad \mu \equiv (\varepsilon)(\varkappa) \cdot \omega_2^{w_2} \ldots \omega_{s''}^{w_{s''}} \pi_1^{y_1} \ldots \pi_{s'}^{y_{s'}} \alpha^2 (\overline{\mathfrak{l}_{s'+1}}) \quad (w, y = 0, 1,$$

wobei zur Abkürzung

$$(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_1^{u_1} \ldots \bar{\varepsilon}_{m'}^{u_{m'}} \quad (u = 0, 1)$$

$$(\varkappa) = \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'-\sigma}^{v_{m'-\sigma}} \quad (v = 0, 1)$$

$$\overline{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l}_1^{2l_1+1} \ldots \mathfrak{l}_z^{2l_z+1}$$

$$\mathfrak{l}_1 \overline{\mathfrak{l}_1} = \overline{\mathfrak{l}}, \quad \mathfrak{l}_{s'+1} \overline{\mathfrak{l}_{s'+1}} = \overline{\mathfrak{l}}$$

gesetzt ist. In diesen Kongruenzen sind auf der rechten Seite sämtliche Faktoren total positiv. Wir können überdies wie an der früheren Stelle (§ 5) zeigen, daß man π_1 stets hyperprimär nach $\mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_z$ und entsprechend π_i hyperprimär nach $\mathfrak{l}_1, \ldots \mathfrak{l}_{i-1}, \mathfrak{l}_{i+1}, \ldots \mathfrak{l}_z$ wählen kann.

Bezüglich der unverzweigten Körper, die durch Adjunktion von $\sqrt{\omega_1}, \ldots, \sqrt{\omega_e}$ zu k entstehen, sind nun die Entwicklungen ganz analog wie früher, sodaß der einfache Hinweis genügt. Eine besondere Betrachtung erfordern nur noch die singulären Primärzahlen $\omega_{e+1}, \ldots, \omega_{e+\sigma}$, die resp. zu den durch die Kongruenzen:

$$y_1 \equiv 0, \ldots y_\sigma \equiv 0\,(2)$$

definierten Untergruppen in (53) gehören, also erst bei Einführung des schärferen Aequivalenzbegriffes auftreten. Wir wollen uns die Bezeichnung der Klassen d in (53) und die Wahl der Indizes der Primfaktoren von 2 so vorgenommen denken, daß $\mathfrak{l}_1$ in $d_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$ in d_s liegt; das System der übrigen Klassen $d_{s+1}^{y_{s+1}} \ldots d_\sigma^{y_\sigma}$ soll keine Klasse außer etwa der Hauptklasse enthalten, in der Primfaktoren von 2 als Ideale liegen. Wir können unter diesen Umständen offenbar annehmen, daß $\lambda_{s+1}, \ldots \lambda_s$ total positiv seien, während $\lambda_1, \ldots \lambda_s$ dies sicher nicht sind.

Es ist zunächst zu zeigen, daß $\omega_{e+s+1}, \ldots \omega_{e+s}$ hyperprimär sind. Es gelten nach (70) die Kongruenzen:

(73) $\bar{\omega}_{e+i} = \omega_{e+i}\,\omega_1^{w_1^{(i)}}\ldots\omega_{g'}^{w_{g'}^{(i)}}\pi_1^{y_1^{(i)}}\ldots\pi_g^{y_g^{(i)}} \equiv \beta_i^2\,(\bar{\mathfrak{l}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots e')$

In den Körpern $(\sqrt{\bar{\omega}_{e+i}}, k)$ werden alle Primfaktoren $\mathfrak{l}$ zerlegt, also auch die total positiven Zahlen $\lambda_{s+1}, \ldots \lambda_z$ Relativnormen von Idealen. Bestimmt man die Geschlechter dieser Ideale, so folgt aus den entsprechenden Charakterenrelationen:

(74) $$y_{s+1}^{(i)} = \ldots = y_{z'}^{(i)} = 0.$$

Betrachtet man jetzt die Zahlen

(75) $$\omega'_{e+i} = \omega_{e+i}\,\omega_1^{w_1^{(i)}}\ldots\omega_{g'}^{w_{g'}^{(i)}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots e')$$

so folgt aus (73) und (74), daß sie hyperprimär nach $\mathfrak{l}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{l}_z$ sind. Sie gehören zu den Untergruppen der Klassengruppe (53), die durch die Kongruenzen

(76) $$w_1^{(i)} x_1 + \ldots w_{g'}^{(i)} x_{g'} + y_i \equiv 0\,(2) \qquad (i = 1, 2, \ldots e')$$

definiert werden. Da die Klassen, in denen $\mathfrak{l}_{s+1}, \ldots \mathfrak{l}_z$ liegen, zu diesen Untergruppen gehören müssen, folgt:

(77) $$w_1^{(i)} = \ldots = w_{g'}^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots e').$$

Es werden demnach aus den Kongruenzen (73) die folgenden:

(78) $$\bar{\omega}_{e+i} = \omega_{e+i}\,\pi_1^{y_1^{(i)}}\ldots\pi_s^{y_s^{(i)}} \equiv \beta_i^2\,(\bar{\mathfrak{l}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots e')$$

Ist ihre Anzahl e' größer als s, so kann man durch Elimination von $\pi_1, \ldots \pi_s$ $e'-s$ Kongruenzen folgender Art ableiten:

(79) $$\omega'_{e+s+i} = \omega_{e+s+i}\,\omega_{e+1}^{m_1^{(i)}}\ldots\omega_{e+s}^{m_s^{(i)}} \equiv \gamma_i^2\,(\bar{\mathfrak{l}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots e'-s)$$

In den Körpern $(\sqrt{\omega'_{e+s+i}}, k)$ werden dann sämtliche Primfaktoren $\mathfrak{l}$ zerlegt; ihnen entsprechen andererseits die Kongruenzen:

$$m_1^{(i)} y_1 + \ldots m_s^{(i)} y_s + y_{s+i} \equiv 0\,(2) \qquad (i = 1, 2, \ldots e'-s).$$

Daraus folgt aber nach unserer Verabredung über die Klassen d:

$$m_1^{(i)} = \ldots = m_s^{(i)} = 0.$$

Es sind also die Zahlen $\omega_{e+s+1}, \ldots \omega_{e+e'}$ hyperprimär.

Aus den Kongruenzen (78) kann man ferner, wenn $s > 0$, durch Elimination von $\pi_2, \ldots \pi_s$ eine Kongruenz

$$\omega_{e+1}\,\omega_{e+2}^{n_2}\ldots\omega_{e+s}^{n_s}\,\pi_1^{y_1} \equiv \alpha_1^2\,(\bar{\mathfrak{l}})$$

herleiten. Es ist demnach $\omega'_{e+1} = \omega_{e+1}\,\omega_{e+2}^{n_2}\ldots\omega_{e+s}^{n_s}$ hyperprimär

nach $\mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$. Andererseits gehört der Körper $(\sqrt{\omega'_{s+1}}, k)$ zu der Untergruppe von (53), die durch die Kongruenz:

$$y_1 + n_2 y_2 + \ldots n_s y_s \equiv 0\,(2)$$

charakterisiert wird. Daraus folgt $n_2 = \ldots = n_s = 0$. Es ist also ω_{s+1} selbst hyperprimär nach $\mathfrak{l}_2, \ldots \mathfrak{l}_s$. Führt man ensprechende Schlüsse bezüglich $\omega_{s+2}, \ldots \omega_s$ aus, so ist auch der Fall $l = 2$ vollständig erledigt. Damit haben wir aber das Ziel unserer Entwicklungen erreicht.

Ueber die Struktur des Magnetit und seine Umbildung in Eisenglanz.

Von

O. Mügge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Juni 1911.

Gelegentlich der Untersuchung von Ätzfiguren bemerkte F. Becke[1]) auf den Octaederflächen von Magnetitkrystallen nach dem Schmelzen mit saurem schwefelsaurem Kali einen moiréeartigen Schimmer welcher von kleinen Flächenelementen rhombendodekaedrischer Lage auszugehen schien und von Becke als Reflex von Ätzflächen gedeutet wurde. Eine nähere Untersuchung ergab indessen, daß dieser Schimmer auf den durch das saure schwefelsaure Kali allerdings stark korradierten Octaederflächen veranlaßt wird durch den Reflex einer auch unter dem Mikroskop ihrer Form nach nicht mehr erkennbaren, anscheinend sehr feinblättrigen Substanz welche sich von der Oberfläche abschaben läßt und die chemischen und optischen Eigenschaften von Eisenglanz hat. Nimmt man an, daß seine Blättchen, wie gewöhnlich, taflig nach der Basis sind, so können sie nach dem moiréeartigen Schimmer auf jeder Octaederfläche, z. B (111), so verteilt sein, daß an der einen Stelle zahlreiche Blättchen unter einander und mit ihrer Basisfläche parallel (101) liegen, an einer andern Stelle parallel (011), an einer dritten parallel (110), und zugleich derart, daß diese drei Orientierungen felderweise auf derselben Octaederfläche abwechseln. Der Umriß dieser kleinen Felder ist äußerst unregelmäßig, meist umschließen sie sich vielfach wechselseitig, ihre Größe schwankt sehr, oft sind sie makroskopisch nur noch eben zu erkennen.

1) Tschermak's mineralog. u. petr. Mitt. 7, 215, 1886.

Bemerkenswert ist, daß Felder deren Blättchen parallel den drei zur geätzten Octaederfläche senkrechten Flächen des Rhombendodekaeders liegen würden und die sich also bei tafliger Ausbildung der Blättchen nach der Basis durch Reflex nicht würden bemerklich machen können, sondern in allen Azimuthen dunkel bleiben müßten zu fehlen scheinen, daß vielmehr die von Blättchen der drei oben genannten Orientierungen erfüllten Felder lückenlos oder nahezu lückenlos aneinander schließen.

Würfelflächen von Magnetit ebenso behandelt nehmen ebenfalls einen Schimmer an der wieder felderweise und moiréeartig auf derselben Fläche wechselt, und zwar meist derart, als ob die reflektierenden untereinander parallelen Elemente desselben Feldes die Lage von flach zur Würfelfläche geneigten Ikositetraederflächen hätten, sodaß also eine derartig behandelte Würfelfläche in 4 Azimuthen bei schräger Beleuchtung aufschimmert; indessen kommen bei Krystallen gewisser Fundorte auch Reflexe von der Lage flach zur geätzten Würfelfläche geneigter Tetrakishexaeder vor.

Ein von dem oben beschriebenen, die meisten Magnetitvorkommen charakterisierendes abweichendes Verhalten zeigen Krystalle aus dem Goldsand von Miask. Die reflektierenden Felder auf den Octaederflächen sind hier zum großen Teil dadurch ausgezeichnet, daß jedes nicht nur in e i n e m, sondern in z w e i um 120° verschiedenen Azimuthen aufschimmert. Indessen sind diese Felder weniger hell als jene bei welchen der Schimmer auf nur e i n Azimuth beschränkt ist; man darf daher annehmen, daß hier zweien Octaederkanten parallel liegende reflektierende Elemente in demselben Felde innig gemischt sind. Auf eine solche Mischung weist auch der von den Würfelflächen bei Krystallen desselben Vorkommens ausgehende Schimmer hin.

Diesen eigentümlichen Schimmer zeigen nicht nur einige sondern die meisten untersuchten Vorkommen, auch künstlich dargestellte Krystalle von Magnetit. Von anderen Gliedern der Spinellgruppe verhielt sich ähnlich nur der F r a n k l i n i t. Indessen tritt hier auf Platten nach dem Octaeder zu den drei Feldern welche im schräg reflektierten Licht den moiréeartigen Schimmer geben noch ein viertes Feld, dessen reflektierende Elemente parallel der geätzten Fläche selbst liegen; ferner erhält man außer dem Schimmer der auf Elemente von rhombendodekaedrischer Lage hindeutet bei sehr flachem Einfallen des Lichtes zur Octaederfläche von derselben auch noch Schimmerreflexe von der Lage der drei andern Octaederflächen und zwar von anscheinend größerer Intensität als die erstgenannten. Auch der Schimmer auf geätzten

Platten von würfliger Lage weist auf schimmernde Elemente parallel den Octaederflächen hin. Schabt man die schimmernden Elemente von den Flächen herunter, so erscheinen sie unter dem Mikroskop ebenfalls ähnlich wie Eisenglanz, dem aber nach der stärker braunen Färbung zu urteilen mehr Manganoxyd beigemischt zu sein scheint.

Da die einheitlich schimmernden Felder groß sind gegenüber den Dimensionen der reflektierenden Elemente, in dem abweichenden Verhalten der Krystalle von Miask gleichzeitig auf den Octaeder- und Würfelflächen auch eine Abhängigkeit der Orientierung der schimmernden Blättchen vom inneren Bau der Krystalle zum Ausdruck kommt, ebenso auch in ihrer Verteilung in den Anwachszonen mancher Magnetit-Krystalle von Morawicza, können alle Krystalle, welche die Felderteilung zeigen nicht mehr physikalisch homogen sein; es wird das auch bestätigt durch die Aehnlichkeit der Felderteilung in manchen unmittelbar benachbarten Teilen desselben Krystalls. Da die Beobachtung ergab, daß eine Ausscheidung von Eisenoxyd oder andern Oxydationsstufen des Eisens aus der Schmelze bei der Abkühlung nicht stattfindet, kann die Ueberwachsung der Krystalloberfläche mit Eisenglanzblättchen nur dadurch zustande kommen, daß ein Teil des im Krystall vorhandenen Eisenoxyduls (oder anderer niederer Oxydationsstufen) höher oxydiert wird, und dann erscheint als einfachste Annahme zur Erklärung der felderweise wechselnden Orientierung der schimmernden Blättchen die, daß das neu gebildete Eisenoxyd in Parallelstellung zu schon im ursprünglichen Krystall vor der Aetzung vorhandenen Eisenglanzblättchen sich orientiert, letztere also einfach weiter wachsen. In den scheinbar homogenen Magnetitkrystallen müßte also ein sehr inniges Gemenge von Eisenoxyd und Eisenoxydul (oder anderen niederen Oxydationsstufen des Eisens) und zwar in regelmäßiger Stellung vorliegen.

Derartige Verwachsungen sind bereits bekannt in den als Martit bezeichneten Pseudomorphosen von Eisenglanz nach Magnetit und den ähnlichen Verwachsungen von Magnesioferrit und Eisenglanz vom Vesuv u. a. O.

In den octaedrischen Krystallen dieser letzteren wie in den octaedrischen Martiten sind indessen die ebenfalls nach der Basis tafligen Eisenglanzblättchen nicht parallel den Rhombendodekaeder-, sondern parallel den Octaederflächen gestellt, analog auch die Einlagerungen braunvioletten (?) Ilmenits in manchen eisenarmen Spinellen; auch manche Magnetitkrystalle von Pfitsch welche Anfänge dieser Pseudomorphosierung zeigen, enthalten nach der mikrosko-

pischen Untersuchung wie nach den Absonderungsflächen zu urteilen den Eisenglanz nach Octaederflächen eingelagert. Bei rhombendodekaedrischen Krystallen von Rittersgrün und Villa de Frades, Alemtejo, Portugal, welche die Eisenglanzblättchen besonders reichlich und fein, und zwar ebenfalls parallel Octaederflächen felderweise wechselnd enthalten, zeigt sich nun aber, daß der Reflex zweier Lamellensysteme, z. B. nach (111) und ($1\bar{1}1$) öfter infolge Beugung zu Scheinreflexen von der Lage der Rhombendodekaederfläche, z. B. (101) Veranlassung gibt und daß diese letzteren an manchen Stellen kräftiger sind als die Reflexe von octaedrischer Lage. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, daß der von geätzten octaedrischen Magnetitplatten ausgehende Schimmer von rhombendodekaedrischer Lage, z. B. (101), durch Addition der Beugungsreflexe von zwei Systemen octaedrischer Lage, z. B. (111) und ($1\bar{1}1$), zustande kommt; Schimmerreflexe von der Lage der geätzten Octaederfläche selbst werden vielleicht deshalb fehlen, weil die schimmernden Elemente so klein sind, daß sie von den aus der geätzten Fläche herausgewachsenen z. T. überschattet werden, wobei zugleich die Blättchen nicht von ebenen Basisflächen sondern von Flächen benachbarter flacher Rhomboeder begrenzt sein mögen, wodurch das Reflexmaximum nach der Richtung der Rhombendodekaederflächennormalen hin verschoben wird[1]). Damit stimmt, daß beim Franklinit, wo mittelst Vertikalilluminator unter dem Mikroskop reflektierende Elemente von octaedrischer Lage erkannt werden konnten, außer dem auch hier vorhandenen Schimmer von rhombendodekaedrischer Lage ein stärkerer von octaedrischer Lage erhalten werden konnte. Das Fehlen von Reflexen auf (111) von der Lage der anvisierten Fläche selbst bei Magnetit spricht nicht zugunsten von Einlagerungsebenen nach dem Rhombendodekaeder; denn einmal wird beim Anvisieren von Rhombendodekaederflächen ebenfalls ein Reflex dieser Lage nicht erhalten, zweitens aber sollten dann auf den Octaederflächen Felder nicht nur von dreierlei sondern von sechserlei Orientierung vorhanden sein, die beobachteten 3 reflektierenden Felder könnten also nicht lückenlos aneinander schließen sondern nur die Hälfte der Fläche erfüllen. Ebenso müßten dann auf den Würfelflächen außer den vier beobachteten Feldern noch zwei weitere in keiner Stellung reflektierende vorhanden sein und

1) Auf eine solche Form der reflektierenden Elemente weist auch der Umstand hin, daß bei manchen Martiten die beiden nach der mikroskopischen Untersuchung senkrecht zu einer Rhombendodekaederfläche eingelagerten Systeme von Eisenglanzblättchen deutliche, wenn auch schwache Reflexe geben; dies könnte nicht der Fall sein, wenn an ihnen wesentlich nur die Basis als Begrenzung aufträte.

die Reflexe der auf (001) beobachteten Felder sollten dann nicht flach zu (001) geneigten Ikositetraedern sondern flachen Pyramidenwürfeln angehören. Endlich ist mit der Annahme schimmernder Elemente parallel den Octaederflächen im Einklang die Beobachtung, daß auf geätzten Rhombendodekaederflächen Reflexe aus der Zone der ihnen anliegenden und zu ihnen senkrechten Octaederflächen gefunden wurden.

Durch längeres Erhitzen scheint sich übrigens die Struktur der gewöhnlichen Magnetite hinsichtlich der Korngröße des in ihnen enthaltenen Eisenoxyds (und bei Zutritt der Luft auch hinsichtlich seiner Menge) der der Martite zunähern; es entstehen in ihnen streifenförmige Schimmerfelder parallel den Octaederkanten und im Vertikalilluminator werden auf der Octaederfläche Reflexe von Elementen parallel dieser Fläche ähnlich wie beim Franklinit sichtbar.

Handelt es sich beim Magnetit allem Anschein nach um ein (vielleicht durch Zerfall von $Fe Fe_2 O_4$ entstandenes) sehr feinkörniges Conglomerat von $Fe_2 O_3$ und $Fe O$ (oder einer andern niederen Oxydationsstufe) in regelmäßiger Stellung, und zwar beim gewöhnlichen Magnetit unter teilweiser, beim Martit unter mehr oder weniger vollständiger Oxydation des entstandenen $Fe O$, so scheint es von Interesse, auch den umgekehrten Vorgang, die Entstehung von Magnetit aus Eisenglanz und dann auch die Rückbildung des letzteren zu verfolgen. Unter Sauerstoffabschluß oder auch an der Luft hoch erhitzte[1]) Eisenglanzblättchen gaben vor dem Schmelzen Sauerstoff ab; die Schmelze selbst ist stark magnetisch, enthält aber noch mehr Sauerstoff als der Formel $Fe Fe_2 O_4$ entspricht. Nicht geschmolzene, nach der Basis taflige, seitlich von Rhomboedern begrenzte durchsichtige Blättchen zeigen nach der Abkühlung senkrecht zum Umriß, seltener parallel demselben verlaufende Streifen welche in Allem mit dem ursprünglichen Eisenglanz übereinstimmen, aber anders orientiert sind, nämlich ihr (0001) parallel einer Fläche $(h . h . \overline{2h} . i)$ des ursprünglichen Blättchens. Man erhält dieselben Streifen auch beim raschen Erhitzen dünner Blättchen in der Bunsenflamme, wobei wahrscheinlich reduzierende Wirkungen der Flammengase mit im Spiel sind. Neben diesen Streifen in den roten Eisenglanzblättchen entstehen fast stets, zuweilen auch ausschließlich, schwärzliche Blättchen, noch mit den Umrissen des Eisenglanzes, welche stark magnetisch sind, von Säuren rascher als Eisenglanz gelöst werden und allen

1) Bis etwa 1500°; Quarzglas erweicht; Platin schmilzt in feinen Blättchen.

Anzeichen nach Magnetit sind, dabei aber bei hinreichender Dünne tiefbraun bis hellbräunlichgrau durchsichtig und isotrop sind und durch vielfache Corrosion der Ränder und siebförmige Durchlöcherung (ebenso wie manche der Eisenglanzblättchen mit Streifen) eine Substanzverminderung bei ihrer Entstehung bezeugen. Diese grau bis braun durchsichtigen Blättchen gehen ebenso wie die undurchsichtigen schwarzen beim Glühen an der Luft sehr schnell wieder in Eisenglanz, meist von der ursprünglichen Orientierung über, ebenso schon ganz langsam und anscheinend durchaus stetig bei längerem Erhitzen auf Temperaturen bis etwa 200° herunter. Zuweilen entstehn dabei in ihnen die oben erwähnten doppelbrechenden zum ursprünglichen Eisenglanzblättchen gesetzmäßig orientierten Streifen von Eisenglanz. Dies erklärt sich durch die Ueberlegung, daß der Magnetit bei seiner Entstehung aus dem Eisenglanz sich gesetzmäßig zu ihm orientiert, nämlich so, wie es auch bei den natürlichen Vorkommen beobachtet ist: Octaederfläche parallel der Basis, Octaederkante entweder senkrecht oder (seltener) parallel zur Kante von Rhomboeder zur Basis; daß dann bei der Rückbildung der Eisenglanz sich nach demselben Gesetze zum Magnetit orientiert, aber seine Basis parallel nicht nur der einen Octaederfläche des Magnetit, welche der ursprünglichen Basisfläche des Eisenglanzes parallel liegt, sondern auch parallel den andern drei, sodaß also der Eisenglanz noch in den oben angegebenen drei weiteren optisch verschiedenen (seltener auch noch in drei anderen) Orientierungen vorliegt.

Der Umstand, daß die aus dem Eisenglanz hergestellten Magnetitblättchen schon bei fünfstündiger Erhitzung auf ca. 290° oder mehrtägiger Erhitzung auf nur ca. 200° sich wieder oxydieren, läßt vermuten, daß der Magnetit in der Natur in stetiger allerdings sehr langsamer Oxydation, Martitisierung, begriffen ist (soweit er nicht mit reduzierenden Substanzen in Berührung ist zumal bei erhöhter Temperatur wie z. B. in Kontaktzonen kohlehaltiger Schiefer); aus dem Vorstehenden ergibt sich aber weiter, daß dieser Oxydation meist ein Zerfall in Fe_2O_3 und FeO (oder ein anderes niederes Oxyd) vorausgegangen ist, wobei ersteres sich felderweise zu einheitlichen Individuen umbildet, deren komplizierte Grenzen beim Schmelzen in saurem schwefelsaurem Kali sichtbar werden; es liegt ein Prozeß der Kornvergrößerung vor wie er für viele Gemengteile langsam sich umbildender Gesteine charakteristisch ist. Ein analoger Zerfall zeigt sich auch im Franklinit $(Fe, Zn, Mn)(Fe, Mn)_2O_4$, und Spuren davon vielleicht auch in den Häutchen und kompakteren Einlagerungen von Titaneisen in manchen Spinellen.

Da anzunehmen ist, daß Fe O, wie Mg O, Ni O und Mn O in Octaedern krystallisieren würde, sind die Magnetitkrystalle wahrscheinlich aufzufassen als im Zerfall begriffene feste Lösungen oder „anomale“ Mischkrystalle von Fe O mit $Fe_2 O_3$ und die völlige Undurchsichtigkeit des natürlichen Magnetit mag im Wesentlichen auf der durch die Entmischung herbeigeführten Trübung, die relativ leichte Durchsichtigkeit des Reduktionsproduktes der Eisenglanzblättchen aber darauf beruhen, daß in ihnen eine Uebersättigung mit dem Reduktionsprodukt und also Trübung durch Ausscheidung desselben noch nicht stattgefunden hat. Bei den künstlichen neuerdings hergestellten magnetischen Legierungen wird die Ursache der magnetischen Susceptibilität von Ross und Gray[1]) in der Bildung fester Lösungen gesucht. Dieser Gruppe von Körpern würde sich demnach auch der Magnetit einigermaßen anschließen und da erscheint es bemerkenswert, daß beim Zerfall des Magnetit die magnetischen Ebenen der entstehenden Eisenglanze, nämlich ihre Basisflächen, parallel den magnetischen Ebenen des Magnetit, das sind nach der Deutung von Beckenkamp die Octaederflächen, liegen.

---

1) Proc. Roy. Soc. Edinburgh **31**, 99, 1910.

Zur Thermodynamik der Gleichgewichte in Einstoffsystemen.

Von

G. Tammann.

Mit 14 Figuren im Text.

Vorgelegt in der Sitzung vom 15. Juli 1911.

II.

Der Polymorphismus.

Die Erfahrungen der letzten Jahre, die Ausarbeitung von Zustandsdiagrammen der Einstoffsysteme und die eingehende Untersuchung der spontanen Krystallisation, haben gelehrt, daß der Polymorphismus eine sehr häufig auftretende Erscheinung ist.

Man geht daher kaum fehl, wenn man annimmt, daß jeder Stoff in verschiedenen Formen auftreten kann. Denn die Erfahrung hat gelehrt, daß, wenn eine Flüssigkeit sich unterkühlen läßt, sich in der Regel aus derselben außer einer stabilen Form noch eine oder mehrere instabile Formen bilden. Während die Zahl dieser Formen, welche uns nur als instabil bekannt sind, sehr groß zu sein scheint, krystallisieren aus einigen, durchaus nicht aus allen Flüssigkeiten 2 und mehr Formen, von denen jede ein gewisses Zustandsfeld, in dem sie absolut stabil ist, besitzt. Wir haben also zwischen total und partiell instabilen Formen zu unterscheiden, und es wird von größter Wichtigkeit sein, möglichst viele und sichere Kriterien zu besitzen, um die beiden Gruppen von Formen von einander unterscheiden zu können.

Der Begriff der „Form" (Phase) deckt sich bekanntlich mit dem Begriff der krystallographischen Krystallform nicht. Als „Formen" werden thermisch verschiedene Krystallformen, die sich

betreffs ihres Volumens, ihres Wärmeinhaltes und ihrer Gleichgewichtskurven von einander unterscheiden, bezeichnet werden.

Im allgemeinen wird die krystallographische Krystallform verschiedener Phasen verschieden sein, doch scheint die Erfahrung zu lehren, daß zwei thermisch verschiedene Formen krystallographisch demselben System angehören können, und dann ihrer krystallographischen Form nach von einander nicht zu unterscheiden sind[1]).

Dagegen brauchen Krystalle desselben Stoffes, die von verschiedenem krystallographischen Habitus sind, thermisch nicht verschieden zu sein. Der Habitus eines Krystals wird durch die lineare Krystallisationsgeschwindigkeit bestimmt. Dieser Vector wird aber von dem Wärmefluß bei der Krystallisation, von Beimengungen in der Schmelze etc. in verschiedenen Richtungen verschieden beeinflußt, so daß die Ausbildung eines Teiles der Krystallflächen gehemmt werden kann. Die Verschiedenheit des Habitus ist also eine Folge von Einflüssen während der Krystallbildung und daher auf das spezifische Volumen und den Wärmeinhalt und in Folge dessen auch auf die Gleichgewichtskurven des Krystalles ohne Einfluß, jedenfalls so lange, als es sich nicht um submikroskopische Krystalle handelt.

Daß zwei thermisch verschiedene Formen ihrer krystallographischen Form nach identisch sein können, ist atomistisch verständlich. Denn dasselbe Raumgitter kann von verschiedenen Molekülen desselben Stoffes besetzt sein.

Wenn sich also der Begriff „Phase" und der der krystallographischen Form nicht decken, so liegt das daran, daß der Thermodynamik der Begriff der krystallographischen Form fremd ist, und sie daher die Frage, ob zwei thermisch differente Krystalle desselben Stoffes gleiche krystallographische Formen haben, offen läßt. Die Atomistik, als die speziellere Hypothese, gibt uns ein Bild, wie wir uns die Möglichkeit der Existenz thermisch verschiedener Formen von gleicher Krystallgestalt zu denken haben, und die genauere Untersuchung krystallographisch identischer, thermisch differenter Formen müßte zu einer weiteren Befestigung der Atomistik führen.

---

1) Solche Fälle scheinen bei den Umwandlungen ferro-magnetischer Metalle, und möglicher Weise auch beim NH_4Cl und NH_4Br (R. Wallace, Centralbl. f. Min. Geol. u. Paläont. 1910 S. 33) vorzuliegen.

a) Die Lage der Gleichgewichtskurven stabiler und instabiler Formen zu einander.

Nur über die Lage der Sublimationskurven verschiedener Formen zu einander und zur Dampfdruckkurve besitzen wir einige wertvolle Regeln, welche sich aus dem Prinzip ergeben, daß die instabilere Phase den größeren Gleichgewichtsdruck hat als die stabilere und in Folge dessen in die stabilere Phase destillieren muß. Es lassen sich aber mit Hilfe des thermodynamischen Potentials, der ζ-Funktion, auch für die anderen Gleichgewichtskurven ähnliche Regeln ableiten, und die bekannten Regeln können durch Vergleich mit den neuen Regeln erweitert werden.

Für die folgenden Untersuchungen wird die Unterscheidung zwischen totaler und partieller Stabilität von Bedeutung sein. Auf diese Unterscheidung kann folgende thermodynamische Systematik des Polymorphismus gegründet werden.

Der Stabilität nach sind folgende vier Klassen von Krystallen zu unterscheiden:

1) Die total und absolut stabilen Formen.

Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie im ganzen Zustandsfelde, welches von ihrer Schmelz- und Sublimationskurve begrenzt ist, das heißt in dem sie überhaupt existenzfähig sind, absolut stabil sind. Damit das der Fall ist, muß die ζ-Fläche einer solchen Form über diesem Zustandsfelde vollständig unter den ζ-Flächen aller anderen Formen liegen, oder die ζ-Fläche der total stabilen Krystallform darf von der ζ-Fläche einer anderen Form nicht geschnitten werden.

2) Die partiell und absolut stabilen Formen.

Jede dieser Formen hat ihr eigenes Zustandsfeld absoluter Stabilität, das aber nicht das ganze Gebiet ihrer Existenzfähigkeit umfaßt. Die ζ-Fläche der partiell und absolut stabilen Form liegt über ihrem Zustandsfelde tiefer als die jeder anderen Form und insbesondere auch tiefer als die ζ-Flächen, von denen sie über den Grenzen ihres Zustandsfeldes geschnitten wird.

3) Die total instabilen Formen.

Die ζ-Flächen dieser Formen überlagern die ζ-Flächen der total und absolut stabilen Form; nach der Reihenfolge, in der sie über den ζ-Flächen der absolut stabilen Formen sich lagern, hat man Formen verschiedenen Grades der Instabilität zu unterscheiden.

4) Die partiell instabilen Formen.

Ihre ζ-Flächen überlagern im Zustandsfelde der partiell und

absolut stabilen Formen die ζ-Fläche dieser Formen. Auch hier hat man Formen verschiedenen Grades der Instabilität zu unterscheiden.

Wir werden also die partiell und absolut stabilen Formen, welche außerhalb ihres Zustandsfeldes auch partiell instabil sind, nie entsprechend dieser Eigenschaft bezeichnen, sondern diese Bezeichnung für die Formen reservieren, deren ζ-Flächen über den ζ-Flächen partiell und absolut stabiler Formen liegen.

Die Thermodynamik gibt eine Beziehung der Lage der ζ-Flächen zur Stabilität und damit auch zur Verwandlungsfähigkeit der verschiedenen Formen; sie läßt aber die Anzahl der Formen, die sich aus einer Flüssigkeit bilden können, unbestimmt, ebenso das Verhältnis zwischen der Anzahl der absolut stabilen zu der der instabilen Formen; auch sagt sie nichts über speziellere Beziehungen der ζ-Flächen verschiedener Formen zu einander aus. Zur Erledigung dieser Fragen müßte eine speziellere Theorie, offenbar atomistischer Natur, auf Grund von Erfahrungssätzen heranzuziehen sein, um den weiten Kreis thermodynamischer Möglichkeiten zu verengern. Solche Erfahrungssätze werden wir zum Schluß kennen lernen und die Konsequenzen aus diesen Sätzen zu ziehen haben.

Vor allem aber wird es darauf ankommen, die Lage der Gleichgewichtskurven für die 4 Klassen von Formen zu einander zu bestimmen und dann die Kennzeichen totaler und partieller Instabilität thermodynamisch festzustellen.

1. Die Lage der Schmelzkurve einer total instabilen zu der einer total und absolut stabilen Form.

Es kann gezeigt werden, daß die Schmelzkurve einer total instabilen Form von der einer stabileren umschlossen wird, daß also die Schmelzkurven der Formen verschiedenen Grades der Stabilität sich nicht schneiden, wenn nur im ganzen Zustandsfelde der stabilsten Form eine Änderung in der Reihenfolge der Stabilitätsgrade nicht eintritt.

Um das einzusehen, sind in Fig. 1 durch die ζ-Flächen der stabileren Form 3, der total instabilen Form 3′ und der isotropen Phase 2 zwei Schnitte, der Schnitt T_x und der Schnitt p_x gelegt worden. Um Komplikationen, die hier nicht erörtert zu werden brauchen, zu vermeiden, ist angenommen worden, daß die genannten ζ-Flächen von den ζ-Flächen anderer Phasen nicht geschnitten werden. Der Pfeil an der T-Achse weist nach fallender Temperaturen hin; in dieser Richtung wachsen die ζ-Werte de

ζ-Isobaren, dagegen wachsen die ζ-Werte der ζ-Isothermen mit steigendem Druck. Die ζ-Fläche der Flüssigkeit schneidet die ζ-Fläche der Form 3′ in der Raumkurve 2 3′ und die ζ-Fläche der Form 3 in der Raumkurve 2 3. Die Projektionen dieser beiden Raumkurven auf die *p T*-Ebene sind die Gleichgewichtskurven 2 3′ und 2 3.

Da die ζ-Fläche der Form 3′ über der ζ-Fläche der Form 3 liegt, weil die Form 3′, entsprechend der Annahme, in Bezug auf die Form 3 total instabil sein soll, so wird die Projektion der Raumkurve 2 3 die Projektion der Raumkurve 2 3′ umschließen müssen und die beiden Gleichgewichtskurven dürfen sich nicht schneiden. Es fällt also das Zustandsfeld der total instabilen Form vollständig in das Zustandsfeld der stabileren, erst recht in das der total und absolut stabilen Form.

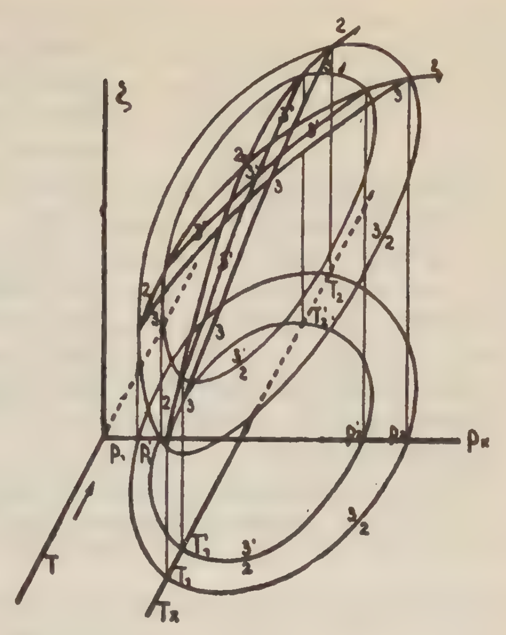


Fig. 1.

An den Schnitten p_x und T_x kann man sich direkt von der Richtigkeit dieser Folgerung überzeugen. Man ersieht, daß die beiden Gleichgewichtstemperaturen der Form 3′ mit der isotropen Phase 2 T_1' und T_2' zwischen die Gleichgewichtstemperaturen T_1 und T_2 der Form 3 mit der isotropen Phase 2 fallen. Ebenso fallen die Gleichgewichtsdrucke der total instabilen Form 3′, die Drucke p_1' und p_2', zwischen die Gleichgewichtsdrucke der stabilen Phase p_1 und p_2.

Denkt man sich die Schmelzkurve der total instabilen Form durch die beiden neutralen Kurven in ihre 4 Quadranten geteilt, so kann man (Fig. 2), gleichgültig wie die neutralen Kurven der beiden Formen zu einander liegen, die Regel spezieller formulieren: Im ersten und vierten Quadranten ist der Schmelzdruck der stabilen Form kleiner als der der instabileren Form, im zweiten und dritten Quadranten kehrt sich diese Beziehung um. Die Schmelztemperatur der instabileren Form liegt im ersten und zweiten

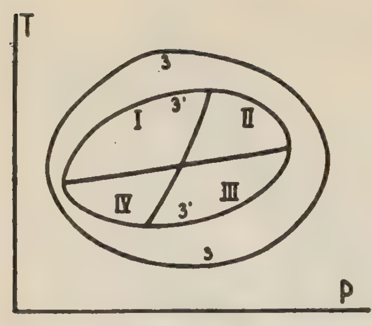


Fig. 2.

Quadranten der Schmelzkurve der instabileren Form immer unterhalb der Schmelztemperatur der stabileren Form und im dritten und vierten Quadranten immer über der Schmelztemperatur der stabileren Form.

Es ist also möglich, daß, wenn der vierte Quadrant der Schmelzkurve der stabileren Form in das Gebiet nicht realisierbarer, negativer absoluter Temperaturen und negativer Drucke rückt, die Schmelzkurve der instabileren Form im Gebiete realisierbarer Zustandspunkte bleibt.

Von diesem Gesichtspunkte aus verdienen die instabilen Formen mit möglichst großen Differenzen des Schmelzpunktes gegen den ihrer stabilsten Form eine eingehendere Untersuchung.

2. Die Lage der Schmelzkurven partiell stabiler Formen.

Wenn zwei Formen partiell stabil sind, so schneiden sich ihre ζ-Flächen in einer Raumkurve, die Projektion dieser Raumkurve auf die p T-Ebene ist die Gleichgewichtskurve der beiden Formen, ihre Umwandlungskurve. Auf dieser Raumkurve muß es einen oder zwei Punkte geben, in denen die Raumkurve von der ζ-Fläche der isotropen Phase geschnitten wird. In jedem dieser Punkte treffen drei ζ-Flächen zusammen. Es schneiden sich in diesen Punkten die ζ-Flächen der beiden Formen und die ihrer isotropen Phase, also auch ihre drei räumlichen Schnittkurven. Die Projektion dieser drei Schnittkurven auf die p T-Ebene gibt die drei Gleichgewichtskurven, welche sich in einem Punkte, einem Tripelpunkte, in dem drei Phasen mit einander im Gleichgewicht sind, treffen.

Damit ein Tripelpunkt mit einer Umwandlungskurve auftritt, müssen sich im Raume drei ζ-Flächen schneiden.

Schneiden sich in der p T-Ebene zwei Gleichgewichtskurven, so trifft fast in allen bisher bekannten Fällen in diesen Schnittpunkt eine dritte Gleichgewichtskurve; unser Schnittpunkt ist dann ein Tripelpunkt. Es kann aber sehr wohl der Fall eintreten, daß sich zwei Gleichgewichtskurven schneiden, ohne daß vom Schnittpunkt eine dritte Gleichgewichtskurve ausgeht, nämlich in dem Falle, daß über dem Schnittpunkt nicht drei ζ-Flächen zusammenstoßen. Es wird dies der Fall sein, wenn eine Gleichgewichtskurve

zwischen zwei Phasen zum Schnitt kommt mit einer anderen Gleichgewichtskurve zwischen zwei ganz anderen Phasen; die beiden Schnittkurven der ζ-Flächen werden sich in diesem Falle im Raume nicht schneiden, auch wenn ihre Projektionen auf die $p\,T$-Ebene sich schneiden.

Wenn aber den beiden Systemen zweier sich schneidenden Gleichgewichtskurven eine Phase gemeinsam ist, so muß über dem Schnittpunkt der beiden Gleichgewichtskurven auf der $p\,T$-Ebene der Schnittpunkt dreier ζ-Flächen liegen, und dem entsprechend muß der Schnittpunkt der beiden Gleichgewichtskurven ein Tripelpunkt sein. Die Erfüllung der Bedingung, daß den Systemen zweier sich schneidenden Gleichgewichtskurven eine Phase gemeinsam sei, ist notwendig aber auch hinreichend dafür, daß der Schnittpunkt die Eigenschaft eines Tripelpunktes besitzt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann können zwei Gleichgewichtskurven sich ebenfalls schneiden, ihr Schnittpunkt wird aber dann nicht ein Tripelpunkt sein.

Da zwei sich schneidende Sublimationskurven oder die Dampfdruckkurve und eine Sublimationskurve, sowie zwei Schmelzkurven in ihren Systemen eine Phase, den Dampf oder die Flüssigkeit gemein haben, so muß, wenn sich zwei dieser Gleichgewichtskurven schneiden, ihrem Schnittpunkt ein Tripelpunkt entsprechen. Dabei ist es gleichgültig, ob in den zu den Gleichgewichtskurven gehörigen Systemen nur absolut stabile Phasen oder auch Phasen verschiedenen Grades der Instabilität auftreten. Bei den Umwandlungskurven kann aber, wenn außer partiell und absolut stabilen Formen auch partiell instabile Formen in den Systemen auftreten, der Fall vorkommen, daß zwei Umwandlungskurven sich schneiden, deren Systemen keine Phase gemeinsam ist, dann hat aber auch, wie wir sehen werden, der Schnittpunkt der beiden Umwandlungskurven nicht die Eigenschaft eines Tripelpunktes.

3. Die Lage der Umwandlungskurven der Formen zweier Krystallgruppen.

Die Formen, deren ζ-Flächen einander nicht schneiden, wollen wir zu einer Gruppe zusammenfassen und eine solche Gruppe von Formen eine Krystallgruppe nennen. Zu einer Krystallgruppe gehören einerseits eine total und absolut stabile Form nebst einer Reihe von total instabilen Formen verschiedenen Grades der Instabilität, andererseits aber auch eine partiell und absolut stabile Form mit ihren instabilen Formen, deren ζ-Flächen sich weder

untereinander noch mit der ζ-Fläche der absolut stabilen Form schneiden.

Untersuchen wir nun die Lage der vier Umwandlungskurven, welche auftreten können, wenn im System zweier absolut und partiell stabiler Formen je eine oder auch beide Formen durch eine instabilere der zugehörigen Krystallgruppe ersetzt werden. Es sind also zwei partiell stabile Formen 3 und 4 und zwei instabile Formen 3′ und 4′ gegeben. Die ζ-Flächen der Formen 3 und 3′ sowie die der Formen 4 und 4′ sollen einander nicht schneiden, dagegen sollen sich die ζ-Flächen der Formen 3 und 4, 3′ und 4, 3 und 4′ sowie die der Formen 3′ und 4′ schneiden.

Das Zustandsfeld der Form 4 möge von dem der Form 3 vollständig umschlossen werden. Wenn auch in Wirklichkeit dieser Fall vielleicht nicht vorkommt, so lassen sich doch aus diesem Fall leicht die realen Fälle durch Verschiebung der pT-Achsen gegen die festliegend gedachten Gleichgewichtskurven ableiten.

Fig. 3 stellt einen Schnitt durch die ζ-Flächen der vier Formen 3, 3′, 4 und 4′ für eine konstante Temperatur dar. Außerdem

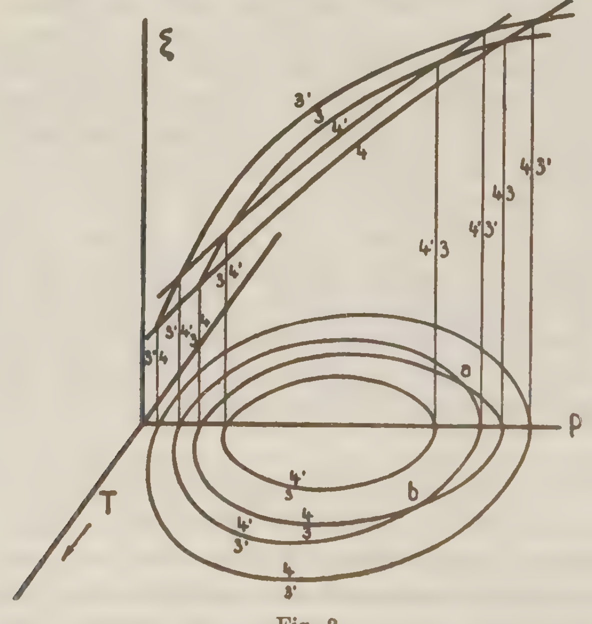


Fig. 3.

sind auf der pT-Ebene die vier möglichen Gleichgewichtskurven gezeichnet. Jede dieser Gleichgewichtskurven durchschneidet die der p-Achse parallele Gerade p_1 in 2 Punkten. Diese Punkte sind die Projektionen der Schnittpunkte zweier ζ-Isothermen, und durch

diese Punkte müssen notwendiger Weise die Gleichgewichtskurven der Zwei-Phasensysteme gehen.

Man ersieht, daß die Gleichgewichtskurve der beiden stabilsten Formen, 3 und 4, zweier Krystallgruppen, die Kurve 3 4, von der Gleichgewichtskurve der stabilen Form 4 und der instabilen Form 3′, von der Kurve 4 3′, umschlossen wird, weil die ζ-Fläche der Form 3′ über der der Form 3 liegt und beide Flächen von der tiefer liegenden ζ-Fläche ein und derselben Form 4 geschnitten werden. Daher können auch die Projektionen der beiden räumlichen Schnittkurven der ζ-Flächen 3 und 4 sowie 3′ und 4 sich nicht schneiden.

Wenn aber die beiden ζ-Flächen der Formen einer Krystallgruppe, die über einander liegen, von der ζ-Fläche der stabilsten Form einer anderen Krystallgruppe geschnitten werden, und das Zustandsfeld dieser Form die der beiden anderen Formen umschließt, dann kehrt sich die Lage der beiden Gleichgewichtskurven um. Die Gleichgewichtskurve der beiden stabileren Formen 3 und 4 umschließt die Gleichgewichtskurve der beiden Formen 3 und 4′, weil jetzt die beiden ζ-Flächen der Formen 4 und 4′ von einer Fläche geschnitten werden, die über ihnen liegt, während im ersten Fall die beiden ζ-Flächen 3 und 3′ von der Fläche 4, die unter ihnen liegt, geschnitten werden.

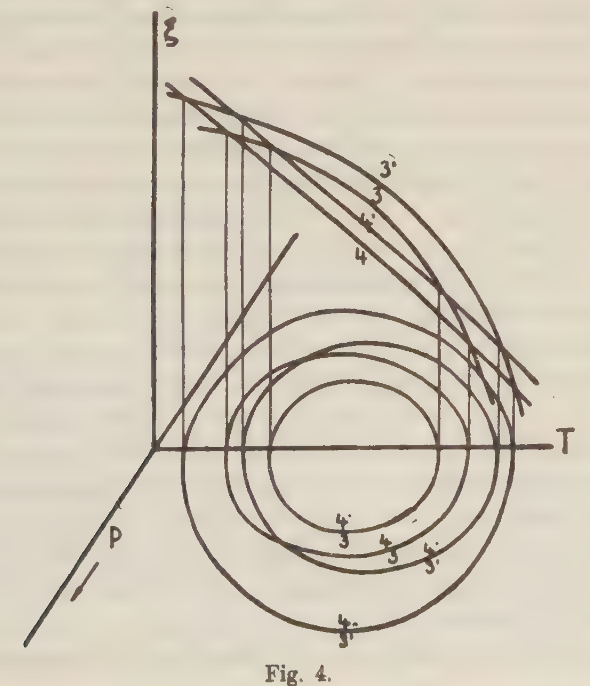


Fig. 4.

Aus Fig. 4, einem Schnitt senkrecht zur p-Achse bei konstantem Druck durch die ζ-Flächen derselben vier Formen, ist naturgemäß dasselbe wie aus dem Schnitt senkrecht zur T-Achse durch die vier ζ-Flächen Fig. 3 zu ersehen.

Wenn also in einem Zwei-Phasensystem die eine der beiden Formen, deren Zustandsfeld von dem der anderen umschlossen wird, durch eine instabilere Form derselben Krystallgruppe ersetzt wird, so fällt das Zustandsfeld der instabileren Form vollständig in das der stabileren Form, und wenn von den beiden Formen die andere durch eine instabilere ersetzt wird, so wird das Zustandsfeld der instabileren Form nie an die Grenzen des der stabileren Form heranreichen. Es kann also eine instabile Form mit einer stabileren Form einer anderen Krystallgruppe nur in solchen Zustandspunkten ins Gleichgewicht kommen, die außerhalb des Zustandsfeldes der stabileren Form liegen. Oder eine absolut stabile Form kann mit einer nicht absolut stabilen Form einer anderen Krystallgruppe nur in Zustandspunkten ins Gleichgewicht kommen, in denen die absolut stabile Form ihre absolute Stabilität verloren hat.

Wir haben soeben eingesehen, daß bei Ersetzung einer der stabileren Formen durch je eine instabilere die Gleichgewichtskurven der drei möglichen Systeme sich nicht schneiden können. Werden aber die beiden stabileren Formen verschiedener Krystallgruppen zugleich durch zwei instabilere Formen je einer der beiden Krystallgruppen ersetzt, so können die Gleichgewichtskurven des stabileren und des instabileren Formenpaares sich schneiden. Diese Schnittpunkte können aber nie die Eigenschaften eines Tripelpunktes haben, weil über diesen Schnittpunkten nicht die Schnittpunkte von je drei ζ-Flächen liegen. Die räumliche Schnittkurve der beiden ζ-Flächen 3′ und 4′ liegt über der Schnittkurve der beiden ζ-Flächen 3 und 4, es schneiden sich nur die Projektionen dieser beiden Raumkurven auf der pT-Ebene, nicht aber die beiden Raumkurven selbst. In Fig. 3 ist zu ersehen, daß in dem hier dargestellten Falle von den Drucken, bei denen sich die ζ-Isothermen der beiden instabilen Formen 3′ und 4′ schneiden, der eine außerhalb, der andere innerhalb des Druckintervalles liegt, das die Gleichgewichtskurve 3 4 aus der Geraden p_1 ausschneidet. Die Folge hiervon ist, daß sich die beiden Gleichgewichtskurven 3 4 und 3′ 4′ zweimal, in den beiden Punkten a und b, schneiden müssen. Ganz analoge Verhältnisse findet man bei der Untersuchung der ζ-Isobaren, Fig. 4.

Schließlich kann man auch den Satz, der die Bedingungen der

Bildung eines Schnittpunktes zweier Gleichgewichtskurven, dem die Eigenschaften eines Tripelpunktes abgehen, feststellt, umkehren und behaupten: wenn sich zwei Gleichgewichtskurven schneiden und ihrem Schnittpunkt die Kennzeichen eines Tripelpunktes fehlen, so sind die beiden Formen der einen Gleichgewichtskurve instabiler als die beiden Formen der anderen Gleichgewichtskurve.

Die Anwendung dieses Satzes auf das Zustandsdiagramm des Wassers führt zum Schluß, daß das Eis II auf seiner früher[1]) festgestellten Gleichgewichtskurve nicht mit dem Eise I, sondern mit einer instabileren Form der Gruppe des Eises I im Gleichgewicht war.

Eine etwas eingehendere Diskussion des Zustandsdiagrammes des Wassers dürfte hier am Platze sein, weil gerade beim Wasser Tatsachen ermittelt sind, welche nur im Lichte der eben entwickelten Theorie verstanden werden können und weil diese Theorie außerdem einige andere, bisher nicht ermittelte Gleichgewichtskurven im Diagramm des Wassers und die Lage dieser Kurven voraussehen läßt.

Das Zustandsdiagramm des Wassers[1]).

Das Wasser, welches man mit Recht als die „abnormste" Flüssigkeit bezeichnen kann, zeigt auch betreffs seines Polymorphismus besondere Erscheinungen, die auch bei anderen assoziierten Flüssigkeiten zu erwarten sind, die aber beim Wasser am eingehendsten studiert sind.

Beim Wasser sind vor allem zwei Krystallgruppen leicht und deutlich von einander zu unterscheiden.

1. Die Krystallgruppe des gewöhnlichen Eises, zu der außer dem gewöhnlichen, absolut stabilen Eise I noch mindestens eine als Eis IV bezeichnete instabile Form zu rechnen ist. Die Volumen dieser Formen sind in demselben Zustandspunkte erheblich größer als die des Wassers, und das Volumen des instabilen Eises IV ist etwas kleiner als das Volumen des stabilen Eises I. Auf diese Tatsache von besonderem Interesse werden wir noch später zurückzukommen haben.

2. Die Krystallgruppe des Eises III. Zu dieser gehört außer dem wahrscheinlich absolut stabilen Eise III noch eine weniger

---

1) Die betreffenden Experimentaluntersuchungen sind zu finden:

2) Annalen der Physik Bd. 2, S. 1 1900, auch Krystallisieren und Schmelzen S. 315.

3) Zeitschrift f. anorganische Chemie Bd. 63, S. 285, 1909.

4) Zeitschrift f. physikalische Chemie Bd. 72, S. 609, 1910.

stabile Form, welche als Eis II bezeichnet wurde. Die Volumen dieser beiden Formen sind in demselben Zustandspunkt erheblich kleiner als das des Wassers. Die Beziehung des Volumens des Eises III zu dem des Eises II ist experimentell nicht ermittelt, doch ist es sehr wahrscheinlich, daß das Volumen des instabilen Eises II etwas größer ist als das des stabilen Eises III.

Im Zustandsdiagramm des Wassers, Fig. 5, sind die Gleichgewichtskurven der absolut stabilen Formen, des Eises I und des Eises III, voll ausgezogen. Es sind das drei Gleichgewichtskurven,

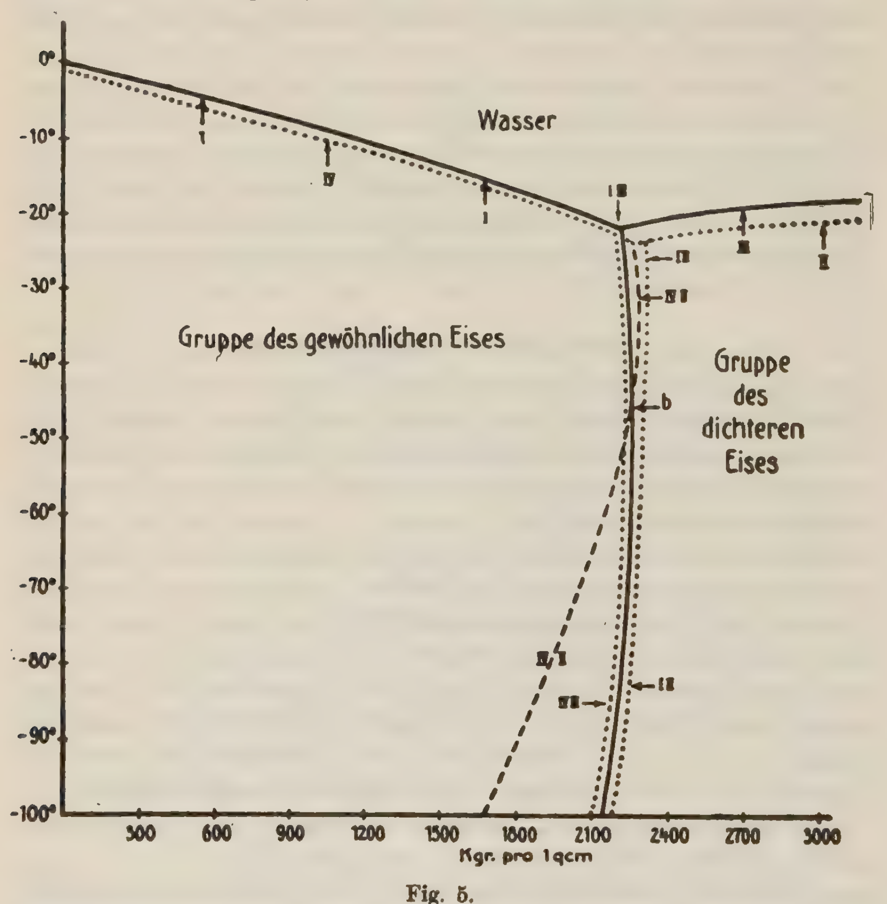


Fig. 5.

die Schmelzkurven des Eises I und des Eises III und die Gleichgewichtskurve der Eisarten I und III. Die Koordinaten dieser Kurven sind nach verschiedenen Methoden in guter Übereinstimmung unter einander festgelegt worden. Dasselbe gilt von der gestrichelt gezeichneten Gleichgewichtskurve des Eises II, welche die Umwandlungskurve der Eisarten I und III im Punkte *b* schneidet.

Auf diese Kurve gelangte das System auf folgendem Wege. Das Wasser wurde in einem geschlossenen Gefäße auf -80^0 abgekühlt, wobei es krystallisierte. Dann wurde durch Volumenverkleinerung der Druck bei -80^0 gesteigert bis bei weiterer erheblicher Volumenverminderung der Druck fast konstant blieb. Ließ man nun die Temperatur des Systems langsam steigen, so bewegte sich der Druck auf der gestrichelten Kurve IV, II. Außerdem wurde festgestellt, daß nach Volumenvergrößerungen bei konstanter Temperatur der Druck bis auf den der Kurve zurückstieg und daß nach Volumenverkleinerung der Druck auf den der Kurve zurücksank. Da sich die Koordinaten dieser Kurve von denen der Gleichgewichtskurve I, III deutlich unterscheiden, und die gestrichelte Kurve die Gleichgewichtskurve I, III im Punkte *b* schneidet, so müssen auf der gestrichelten Kurve zwei instabile Formen der beiden Krystallgruppen im Gleichgewicht miteinander gewesen sein.

Zur Zeit als diese Versuche ausgeführt wurden, war es nicht bekannt, daß das Wasser in Abwesenheit seines Dampfes auch in einer weniger stabilen Form der Gruppe des Eises I krystallisiert. Deshalb war damals irrtümlich angenommen worden, daß auf der gestrichelten Gleichgewichtskurve IV, II das Eis I selbst mit der als Eis II bezeichneten Form ins Gleichgewicht gekommen sei. Diese Annahme ist aber deshalb unzulässig, weil die Gleichgewichtskurve der Formen I und II nicht die der Formen I und III schneiden könnte. Diese Kurve könnte, wie jetzt einleuchtet, die Lage der punktierten Kurve I, II haben, dürfte aber die Kurve I, III nicht schneiden. Der Tatsache, daß die gestrichelte Kurve die Kurve I, III schneidet, wird nur die Annahme gerecht, daß sich die gestrichelte Kurve auf das Gleichgewicht zweier instabilen Formen beider Krystallgruppen bezieht. Die instabile Form der Gruppe der dichten Eisarten ist als Eis II bezeichnet worden, und die instabile Form der Gruppe des gewöhnlichen Eises könnte mit der Form IV identisch sein, jedenfalls muß sie dieser Form sehr nahe stehen, sie könnte höchstens etwas stabiler oder etwas instabiler als die Form IV sein. Daher mag sie vorläufig als Form IV angesprochen werden, und die gestrichelte Gleichgewichtskurve würde sich dann auf die Formen II und IV beziehen. Die Theorie fordert ferner, daß dem Schnittpunkt *b* der Gleichgewichtskurven I, III und IV, II, die Eigenschaften eines Tripelpunktes abgehen, und die Beobachtungen lehrten, daß das in der Tat der Fall ist. Denn wäre der Punkt *b* ein Tripelpunkt, so müßte von ihm eine dritte Gleichgewichtskurve, die Umwand-

lungskurve von Eis II in das Eis III, ausgehen; gesetzt, daß die Volumenänderung bei der Umwandlung von II in III sehr klein ist, so wäre die Existenz der Umwandlungskurve II, III sehr schwer festzustellen. Wenn aber diese Umwandlungskurve existierte, so müßte der Druck des Systems I, III bei der Überschreitung des Punktes *b* in Folge von Temperaturänderungen sich nicht weiter auf der Kurve I, III bewegen, sondern auf die Kurve IV, II gelangen und der Druck des Systems IV, II müßte bei Überschreitung des Punktes *b* von der Kurve IV, II auf der Kurve I, III sich weiter bewegen. Da aber die Beobachtungen gelehrt haben, daß das nicht der Fall ist, so fehlen auch dem Punkte *b* die Eigenschaften eines Tripelpunktes, und der Schluß, daß die Gleichgewichtskurve IV, II sich auf das Gleichgewicht zweier instabilen Formen der beiden Krystallgruppen bezieht, ist damit gerechtfertigt.

Bei vier Eisformen, von denen I und IV zu einer Krystallgruppe, III und II zu einer anderen Krystallgruppe gehören, sind im Zustandsdiagramm elf Gleichgewichtskurven zu erwarten. Von diesen Gleichgewichtskurven gehören drei zu den Dampfdruckkurven, nämlich die bekannte Dampfdruckkurve des Wassers, die bekannte Sublimationskurve des Eises I, und die Sublimationskurve des Eises IV, deren Dampfdruck bei derselben Temperatur ein wenig größer sein muß als der des Eises I. Ferner müssen vier Schmelzkurven existieren, von diesen sind die Schmelzkurven der Formen I und III festgelegt. Die Schmelzkurve der Form IV muß etwas unter der der Form I und die der Form IV etwas unter der der Form III verlaufen. Da aber die Umwandlung des Eises IV in das Eis I regelmäßig vor Beginn der Schmelzung des Eises IV eintritt, so konnten die Schmelztemperaturen des Eises IV nicht bestimmt werden. Daß aber der Schmelzpunkt des Eises IV nur wenig unterhalb der Schmelztemperatur des Eises I liegt, ist aus der Beobachtung, daß bei einem Versuch die Umwandlung des Eises IV in das Eis I bei -0.25^0 eintrat, Zeitschr. f. phys. Chem. 72 S. 630, zu schließen. Für die Schmelzkurve der Form II, welche durch den Schnittpunkt der Gleichgewichtskurve I, II und der Schmelzkurve der Form I gehen muß, ergab sich, daß dieser Schnittpunkt etwa $0,2^0$ unter der Schmelzkurve III liegt, daß also auch die Schmelztemperaturen der Form II nur wenig tiefer liegen als die Schmelztemperaturen der stabileren Form III.

Von den vier Umwandlungskurven ist der Verlauf der Kurve stabilsten Gleichgewichtes, der Kurve I, III, festgelegt und dasselbe gilt von der Gleichgewichtskurve der beiden instabilen Formen

II und IV. Für die beiden Systeme (I und II) und (III und IV) sind die Gleichgewichtskurven nicht festgelegt, es fordert aber die Theorie, daß die Kurve I, II im Zustandsfelde der Form III sehr nahe an der Kurve I, III verläuft, ohne diese zu schneiden; dasselbe wird für die Kurve III, IV gefordert, nur muß diese Kurve im Zustandsfelde der Form I verlaufen. Im Diagramm sind diese Kurven und die Schmelzkurven der Formen IV und II punktiert gezeichnet, und sie sind, um sie bei dem gewählten kleinen Maßstabe nicht auf die Gleichgewichtskurven stabiler Phasen fallen zu lassen, von den Kurven stabiler Gleichgewichte, die voll ausgezogen sind, etwas abgerückt.

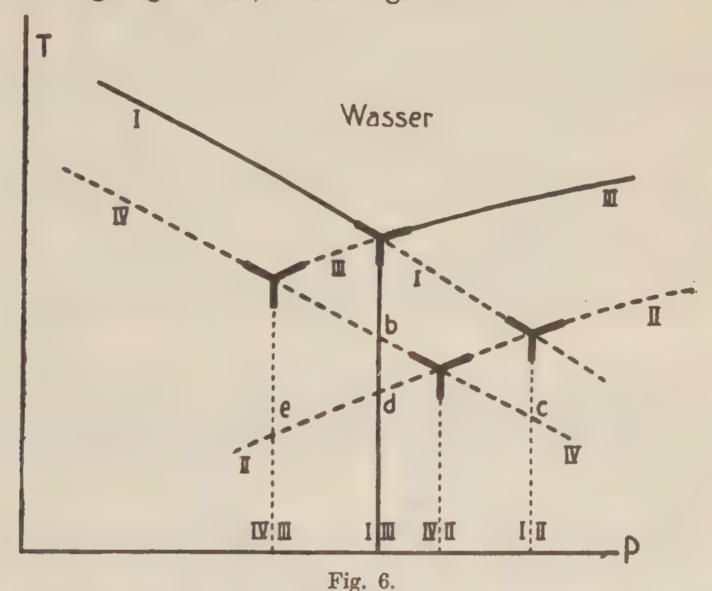


Fig. 6.

Ferner treten hier sechs Tripelpunkte auf. Zwei derselben beziehen sich auf stabile Gleichgewichte, nämlich die Tripelpunkte: (Dampf, Wasser, Eis I) und (Wasser, Eis I und Eis III), und vier Tripelpunkte beziehen sich auf instabile Gleichgewichte, nämlich die Tripelpunkte: (Dampf, Wasser und Eis IV), (Wasser, Eis IV und Eis III), (Wasser, Eis I und Eis II) und (Wasser, Eis IV und Eis II). Die vier Schnittpunkte je zweier Gleichgewichtskurven, die Punkte *b*, *c*, *d* und *e*, Fig. 6, sind keine Tripelpunkte, weil die ζ-Fläche des Wassers in diesen Punkten über den Schnittkurven der ζ-Flächen, die im Raume über den Umwandlungskurven I III, I II und IV III verlaufen, liegt.

Man ersieht, daß man auch hier wieder nicht jeden Schnittpunkt zweier Gleichgewichtskurven als Tripelpunkt anzusprechen

hat, wie das so häufig geschehen ist. Man hat in jedem Fall erst zu untersuchen, ob für den betreffenden Schnittpunkt auch die Bedingungen des Tripelpunktes erfüllt sind.

b) Quantitative Beziehungen zwischen der Lage der Gleichgewichtskurven einer Reihe von Formen verschiedener Stabilität und der Stabilität dieser Formen.

1. Die Maße der Stabilität.

Für zwei Formen verschiedener Stabilität, die mit ein und derselben dritten Phase ins Gleichgewicht kommen, ergeben sich folgende Gleichungen zwischen den ζ-Werten der beiden Formen, ihren Gleichgewichtsdrucken mit der dritten Phase und den Volumen der stabileren Form und der dritten Phase, wie aus der Lage der ζ-Isothermen Fig. 10b ersichtlich:

$$1)\qquad \zeta'_{3p'_1} - \zeta_{3p_1} = \int_{p_1}^{p'_1} \frac{d_\tau \zeta_2}{dp}\, dp = (\zeta'_3 - \zeta_3)_{p'_1} + \int_{p_1}^{p'_1} \frac{d_\tau \zeta_3}{dp}\, dp,$$

aus der sich die Gleichung

$$2)\qquad (\zeta'_3 - \zeta_3)_{p'_1} = \int_{p_1}^{p'_1} \left(\frac{d_\tau \zeta_2}{dp} - \frac{d_\tau \zeta_3}{dp} \right) dp = \int_{p_1}^{p'_1} (v_2 - v_3)\, dp$$

ergibt.

Diese Gleichungen gelten sowohl für partiell als auch für total stabile Formen, denn für ihr Bestehen ist es offenbar gleichgültig, ob die ζ-Isothermen der Formen 3' und 3 mit wachsendem Druck konvergieren oder divergieren.

Wenn ζ_2 und ζ_3 im Intervall von p_1 bis p'_1 als lineare Funktionen des Drucks betrachtet werden können, was der Fall ist, wenn für das Druckintervall $p'_1 - p_1$ die Werte

$$\frac{d_\tau v_2}{dp} \quad \text{und} \quad \frac{d_\tau v_3}{dp}$$

verschwinden, so kann die Gleichung 2) auch in folgender Form

$$3)\qquad (\zeta'_3 - \zeta_3)_{p'_1} = (v_2 - v_3) \cdot (p'_1 - p_1)$$

geschrieben werden.

Sowohl diese Formel als auch die folgenden, bei deren Ableitung die Annahme gemacht ist, daß die ζ-Isothermen oder ζ-Isobaren gradlinig verlaufen, dürfen nur auf Stücke der Gleichgewichtskurven, die als gerade Linien betrachtet werden dürfen, angewandt werden. Denn jener Annahme nach sind für den in Frage kommenden Teil des Zustandsfeldes die ζ-Flächen Ebenen

und daher ihre Schnittlinien und deren Projektionen auf die pT-Ebene gerade Linien.

Für eine Reihe instabiler Formen 3', 3'' etc., deren ζ Werte in demselben Zustandspunkte die Größenfolge $\zeta_3' < \zeta_3''$ etc. haben, werden die Gleichungen:

$$(\zeta_3' - \zeta_3)_{p_1'} = (v_2 - v_3)(p_1' - p_1)$$
$$(\zeta_3'' - \zeta_3)_{p_1''} = (v_2 - v_3)(p_1'' - p_1)$$

gelten.

Hieraus folgt dann die Gleichung:

4) $$(\zeta_3' - \zeta_3)_{p_1'} : (\zeta_3'' - \zeta_3)_{p_1''} = (p_1' - p_1) : (p_1'' - p_1).$$

Bei den Gleichgewichtsdrucken, bei denen eine Reihe instabiler Formen mit ein und derselben Phase ins Gleichgewicht kommen, sind die Differenzen ihrer ζ-Werte gegen den zugehörigen ζ-Wert der stabilsten Form proportional den entsprechenden Differenzen der Gleichgewichtsdrucke bei derselben Temperatur, und da in demselben Zustandspunkte der größeren Stabilität der kleinere ζ-Wert entspricht, so sind bei derselben Temperatur die Abstände der Gleichgewichtskurven einer Reihe von Formen ein Maß ihrer Instabilität.

Zu ganz analogen Beziehungen gelangt man bei Untersuchung der ζ-Isobaren der Formen 3 und 3', welche mit ein und derselben Phase 2 bei den Temperaturen T_1 und T_1' ins Gleichgewicht kommen.

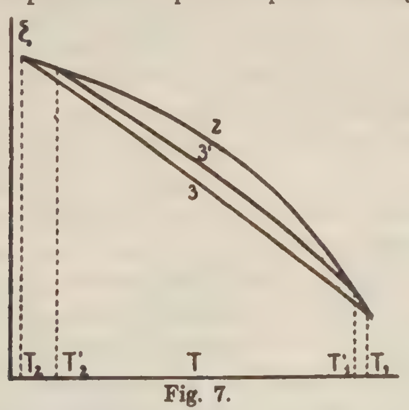


Fig. 7.

Aus Fig. 7 ist die Beziehung

5) $$\zeta_{3T_1'}' - \zeta_{3T_1} = \int_{T_1}^{T_1'} \frac{d_p \zeta_3}{dT} dT = (\zeta_3' - \zeta_3)_{T_1'} + \int_{T_1}^{T_1'} \frac{d_p \zeta_2}{dT} dT$$

zu folgern, aus der sich die Gleichungen

$$6)\qquad (\zeta_3' - \zeta_3)_{T_1'} = \int_{T_1}^{T_1'} \left(\frac{d_p \zeta_2}{dT} - \frac{d_p \zeta_3}{dT} \right) dT = -\int_{T_1}^{T_1'} (\eta_2 - \eta_3)\, dT$$

ergeben.

Wenn η_2 und η_3 im Temperaturintervall $T_1 - T_1'$ von der Temperatur unabhängig sind, so hat man die Gleichung

$$\eta_2 - \eta_3 = \frac{R_{3,p}}{T_1},$$

und man erhält als Annäherungsgleichung:

$$7)\qquad (\zeta_3' - \zeta_3)_{T_1'} = (\eta_2 - \eta_3)(T_1 - T_1') = \frac{R_{3,p}}{T_1}(T_1 - T_1').$$

Für eine Reihe instabiler Formen : 3′, 3″ etc., folgt dann die der Gleichung 4) analoge Gleichung:

$$8)\qquad (\zeta_3' - \zeta_3)_{T_1'} : (\zeta_3'' - \zeta_3)_{T_1''} = (T_1 - T_1') : (T_1 - T_1'').$$

Bei den Gleichgewichtstemperaturen, bei denen eine Reihe instabiler Phasen mit ein und derselben Phase ins Gleichgewicht kommt, wächst die Instabilität der Formen gegen die der stabilsten Form proportional den Differenzen der Gleichgewichtstemperaturen der Formen gegen die Gleichgewichtstemperaturen der stabilsten Form.

Die Gleichungen 4) und 8) gelten, welches auch die Natur der Phase ist, mit der die Formen verschiedener Stabilität ins Gleichgewicht kommen, sie kann gasförmig, flüssig oder krystallisiert sein. Die Abstände der Gleichgewichtskurven in den Richtungen der p und T Achsen von einander werden aber nur dann ein Maß der relativen Instabilität der verschiedenen Formen sein, wenn diese Formen mit ein und derselben Phase ins Gleichgewicht kommen.

Formulierungen dieses Satzes für spezielle Fälle sind schon früher ausgesprochen worden:

Aus der Lage der Dampfdruckkurven zweier Formen verschiedener Stabilität hat van't Hoff[1]) schon früher gefolgert, daß der Tripelpunkt, in dem die instabile Form mit ihrem Dampf und ihrer Schmelze im Gleichgewicht ist, bei einer tieferen Temperatur liegen muß als der analoge Tripelpunkt der stabileren Form, und zu demselben Resultat in der Formulierung: daß die Reihenfolge der Schmelzpunkte die Reihenfolge der relativen Stabilitäten für

1) J. H. van't Hoff, Vorlesungen über theoretische und physikalische Chemie Heft 2, erste Auflage 1899 Seite 127.

eine Reihe instabiler Krystallarten angibt, bin ich[1]) gleichzeitig gelangt.

In den beiden Gleichungen 3) und 7):

$$(\zeta_3' - \zeta_3)_{p_1'} = (v_2 - v_3)(p_1' - p_1)$$

$$(\zeta_3' - \zeta_3)_{T_1'} = (\eta_2 - \eta_3)(T_1 - T_1')$$

kann man die Indizes p_1' und T_1' auf denselben Zustandspunkt der Gleichgewichtskurve der instabileren Form 3′ beziehen, dann wird die Gleichung: $(\zeta_3' - \zeta_3)_{p_1'} = (\zeta_3' - \zeta_3)_{T_1'}$ erfüllt sein, und es ergibt sich:

$$\text{9)} \qquad \frac{T_1 - T_1'}{p_1' - p_1} = \frac{v_2 - v_3}{\eta_2 - \eta_3} = \left(\frac{dT}{dp}\right)_{2,3}$$

Es ist also das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Gleichgewichtskurve der instabileren Form 3′ in den Richtungen der *T*- und *p*-Achsen von der Gleichgewichtskurve der stabileren Form gleich der Richtung der Gleichgewichtskurve der stabileren Form. Diese Beziehung ergibt sich auch direkt aus Fig. 8. Man ersieht, daß diese Beziehung nur dann Gültigkeit hat, wenn die Gleichgewichtskurve (2, 3) im Druckintervall $p_1' - p_1$ geradlinig verläuft; diese Bedingung ist aber schon in unserer ursprünglichen Annahme, daß die ζ-Isothermen und ζ-Isobaren linear verlaufen, daß also die ζ-Flächen Ebenen sind, enthalten, da die Schnittlinien von diesen Ebenen und auch ihre Projektionen auf die *pT*-Ebene, die Gleichgewichtskurven, Gerade sind.

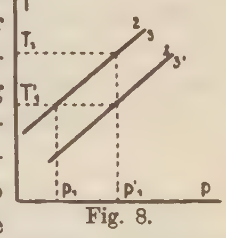


Fig. 8.

Untersuchen wir ferner die Beziehung des Gleichgewichtsdrucks zweier instabilen Formen zu dem Gleichgewichtsdruck zweier stabileren Formen, von denen je eine instabile und je eine stabilere Form zu derselben Krystallgruppe gehören. Entsprechend dieser Annahme schneiden sich in Fig. 9 die ζ-Isothermen der Formen 3 und 4 und die der Formen 3′ und 4′, während sich die ζ-Isothermen der Formen derselben Krystallgruppe, die der Formen 3 und 3′ oder 4 und 4′ nicht schneiden. Nehmen wir ferner wie bei der Behandlung des

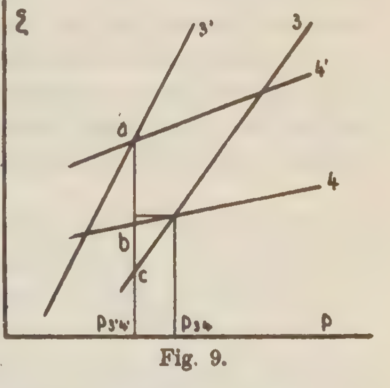


Fig. 9.

1) Zeitschrift f. physikalische Chemie Bd. 29 S. 67 1899.

ersten Falles an, daß in dem zu berücksichtigenden Druckintervall die ζ-Isothermen geradlinig verlaufen, so ergibt sich für die Differenz der beiden Gleichgewichtsdrucke $p_{34} - p_{3'4'}$ die Gleichung 10).

Wie aus Fig. 9 ersichtlich, gilt die Gleichung $bc = ac - ab$, und da

$$ac = (\zeta_3' - \zeta_3)_{p_{3'4'}}, \quad ab = (\zeta_4' - \zeta_4)_{p_{3'4'}}, \quad \zeta_3' p_{3'4'} = \zeta_4' p_{3'4'}$$

und

$$bc = (p_{34} - p_{3'4'}) \left(\frac{d_T \zeta_3}{dp} - \frac{d_T \zeta_4}{dp} \right)$$

sind, so folgt:

10) $$(\zeta_4 - \zeta_3)_{p_{3'4'}} = (p_{34} - p_{3'4'})(v_3 - v_4).$$

Da, wie wir im Abschnitt c) sehen werden, das Vorzeichen der Differenz $v_3 - v_4$ beim Gleichgewichtsdruck p_{34} immer positiv sein muß, so ist die Größenbeziehung von $p_{3'4'}$ zu p_{34} nur durch das Vorzeichen der Differenz $(\zeta_3 - \zeta_4)_{p_{3'4'}}$ bestimmt. Der Gleichgewichtsdruck der beiden instabilen Formen 3′ und 4′ $p_{3'4'}$ fällt also in das Zustandsfeld derjenigen der stabilen Formen, welche beim Druck $p_{3'4'}$ den kleineren ζ-Wert hat.

Da auch die Gleichung

$$(p_{34} - p_{3'4'}) = \frac{[(\zeta_3' - \zeta_3) - (\zeta_4' - \zeta_4)]_{p_{3'4'}}}{v_3 - v_4}$$

gilt, so wird das Vorzeichen der linken Seite durch das des Zählers der rechten Séite bestimmt, und die Differenz der relativen Instabilitäten $(\zeta_3' - \zeta_3) - (\zeta_4' - \zeta_4)$ der Formen 3′ und 4′ bei ihrem Gleichgewichtsdruck bestimmt die Differenz der beiden Gleichgewichtsdrucke in der Art, daß der Gleichgewichtsdruck der beiden instabilen Formen in das Zustandsfeld der stabilen Form fällt, deren zugehörige instabile Form die größere Instabilität hat.

Zu einem ganz analogen Resultat gelangt man bei Untersuchung der ζ-Isobaren zweier Formen zweier Krystallgruppen. Man kommt auf dem eben beschriebenen Wege zu den Gleichungen:

11) $$(\zeta_3 - \zeta_4)_{T_{3'4'}} = (T_{3'4'} - T_{34})(\eta_4 - \eta_3)$$

oder

$$T_{3'4'} - T_{34} = \frac{[(\zeta_3' - \zeta_3) - (\zeta_4' - \zeta_4)]_{T_{3'4'}}}{(\eta_3 - \eta_4)},$$

aus denen man ganz analoge Schlüsse wie aus der Gleichung 10) zu ziehen hat. Auch hier fällt die Gleichgewichtstemperatur der

instabilen Formen in das Zustandsfeld der stabilen Form, deren zugehörige instabile Form die größere Instabilität hat.

Die durch die Gleichungen 3) und 7) gegebenen Differenzen der ζ-Werte zweier Formen derselben Krystallgruppe können noch auf anderem Wege ermittelt werden. Es gelten nämlich die Gleichungen:

$$(\zeta_3' - \zeta_3)_{p_1'} = -\int_0^{T_1'} (\eta_3' - \eta_3)_{p_1'}\, dT$$

und

$$(\zeta_3' - \zeta_3)_{T_1'} = \int_0^{p_1'} (v_3' - v_3)_{T_1'}\, dp.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit den Gleichungen 3) und 7), so erhält man die Gleichungen:

12) $$(v_2 - v_3)(p_1' - p_1) = -\int_0^{T_1'} (\eta_3' - \eta_3)_{p_1'}\, dT$$

und

13) $$(\eta_2 - \eta_3)(T_1 - T_1') = \int_0^{p_1'} (v_3' - v_3)_{T_1'} \,.\, dp.$$

Man kann also die experimentell schwer zu ermittelnden Werte der beiden Integrale durch die leichter zu bestimmenden Werte der beiden linken Seiten von 12) und 13) ersetzen.

2. Die Bedingungen totaler Instabilität und partieller Stabilität.

Eine Form 3′ wird in Bezug auf eine andere stabilere Form 3 total instabil sein, wenn die ζ-Fläche der Form 3′ in dem ganzen Zustandsfelde der Form 3 über der ζ-Fläche dieser Form liegt. Schneiden sich aber die ζ-Flächen der beiden Formen in dem von der Schmelzkurve umschlossenen Zustandsfelde, so sind die beiden Formen partiell stabil.

Für die Unterscheidung zwischen totaler und partieller Stabilität ist also nicht nur die Lage der beiden ζ-Flächen von Bedeutung, sondern auch die Grenzen des Zustandsfeldes anisotroper Zustände sind zu berücksichtigen. Denn es wäre möglich, daß auch die ζ-Fläche einer total instabilen Form die ζ-Fläche der stabileren Form außerhalb des Zustandsfeldes diese Form schneidet. Tritt aber dieser Fall ein, so sind die beiden Formen gegenüber einer

dritten Form in den Zustandspunkten, die der Schnittkurve ihrer beiden ζ-Flächen entsprechen, instabil, und in der Regel werden dann die beiden Formen in diesen Zustandspunkten nicht mehr realisierbar sein.

Zuerst werden wir hauptsächlich die Lage der ζ-Isothermen und ζ-Isobaren berücksichtigend uns über die verschiedenen Möglichkeiten der Lage dieser Kurven der beiden Formen orientieren, um dann die Fälle, in denen außer der Lage dieser Kurven noch die einer dritten Phase besonders zu beachten ist, eingehender zu diskutieren.

Betreffs der Lage der ζ-Isothermen haben wir vier Fälle zu unterscheiden, da für die Volumen der instabileren, 3′, und der stabilern Form, 3, zwei Größenbeziehungen gelten können und dasselbe für die Kompressibilitäten der beiden Formen zutrifft. Die im Folgenden angegebene Größenbeziehung der Volumen beider Formen soll für den Druck von 1 Kg pro qcm gelten, und für die Größenbeziehung der Kompressibilitäten wollen wir annehmen, daß dieselbe bei wachsendem Druck sich nicht ändert. Nach Einführung dieser die möglichen Fälle beschränkenden Annahme, die eine Stütze in der Erfahrung findet, haben wir noch vier thermodynamisch mögliche Fälle zu unterscheiden:

$$\text{a)} \quad v_3' > v_3 \quad \text{und} \quad \frac{d_\tau v_3'}{dp} < \frac{d_\tau v_3}{dp}$$

$$\text{b)} \quad v_3' > v_3 \quad \text{und} \quad \frac{d_\tau v_3'}{dp} > \frac{d_\tau v_3}{dp}$$

$$\text{c)} \quad v_3' < v_3 \quad \text{und} \quad \frac{d_\tau v_3'}{dp} > \frac{d_\tau v_3}{dp}$$

$$\text{d)} \quad v_3' < v_3 \quad \text{und} \quad \frac{d_\tau v_3'}{dp} < \frac{d_\tau v_3}{dp}.$$

Den vier Möglichkeiten entsprechen vier Fälle für die Lage der beiden ζ-Isothermen zu einander, die in den Figg. 10 a, b, c und d zu übersehen sind.

Der Fall a) ist dadurch ausgezeichnet, daß sich die beiden ζ-Isothermen überhaupt nicht schneiden können und der Fall d) dadurch, daß sich die beiden ζ-Isothermen nicht zu schneiden brauchen. In diesen beiden Fällen ist es daher auch gleichgültig, welche Lage die ζ-Isotherme einer dritten Phase zu denen der beiden Formen 3′ und 3 hat. Wenn nur ihre Lage die in den Figg. 10 a und d gezeichnete ist, so ist die Form 3′ in Bezug auf die Form 3 für alle Drucke bei der Temperatur dieser Schnitte

durch die ζ-Flächen total instabil. In den Fällen b und c ist aber die Lage der ζ-Isotherme der Phase 2 für die Frage, ob die Form 3′ total instabil oder partiell stabil ist, von ausschlag-

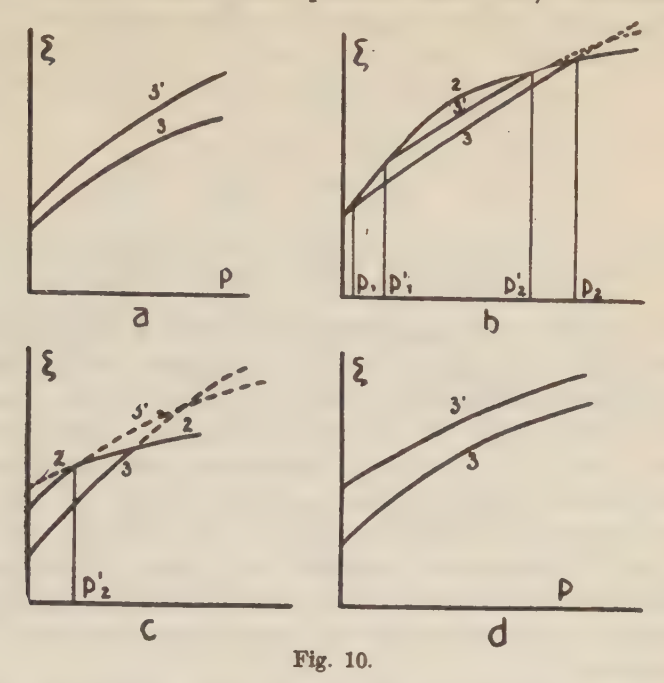


Fig. 10.

gebender Bedeutung: wenn nämlich der Schnittpunkt der Isothermen ζ_3' und ζ_3 über der ζ-Isotherme der Phase 2 liegt, so ist die Form 3′ total instabil, im anderen Falle partiell stabil.

Ebenso wie für $v_2 - v_3$ mit steigendem Druck ein Zeichenwechsel stattfindet, wenn v_2 bei kleinen Drucken größer ist als v_3, so kann bei steigendem Druck ein Zeichenwechsel für $v_3' - v_3$, wenn v_3' bei kleineren Drucken größer ist als v_3, eintreten.

Wenn das Volumen der instabileren Form bei Stoffen, die unter Volumenvergrößerung schmelzen, beim Druck von 1 Kg. größer ist als das Volumen der stabileren Form, so könnte bei Stoffen, die unter Volumenverkleinerung schmelzen, das Volumen der instabileren Form kleiner sein als das der stabileren Form. Aber die reine Thermodynamik vermag die Frage nicht zu entscheiden, geschweige denn anzugeben, bei welchem Druck die Umkehr der betreffenden Größenbeziehung eintritt.

Für die ζ-Isobaren der Formen 3′ und 3 gelten ganz analoge Beziehungen; auch hier können bei der Einschränkung, daß sich das Größenverhältnis von c_{p3}' und c_{p3} mit der Temperatur nicht

umkehrt, vier Fälle unterschieden werden, die den diskutierten Fällen analog sind. Diese vier Fälle sind

$$\text{a)}\quad -\eta_s' > -\eta_s \quad \text{und} \quad -\frac{c_{ps}'}{T} < -\frac{c_{ps}}{T}$$

$$\text{b)}\quad -\eta_s' > -\eta_s \quad \text{und} \quad -\frac{c_{ps}'}{T} > -\frac{c_{ps}}{T}$$

$$\text{c)}\quad -\eta_s' < -\eta_s \quad \text{und} \quad -\frac{c_{ps}'}{T} > -\frac{c_{ps}}{T}$$

$$\text{d)}\quad -\eta_s' < -\eta_s \quad \text{und} \quad -\frac{c_{ps}'}{T} < -\frac{c_{ps}}{T}.$$

Wir werden nun hauptsächlich den Fall b) berücksichtigend die analytischen und geometrischen Bedingungen totaler und partieller Stabilität ableiten. Der Fall b) ist deshalb von besonderem Interesse, weil, wenn für ihn die Bedingungen festgestellt sind, diese erst recht für die anderen einfacheren Fälle zutreffen.

Die Form 3′ wird in Bezug auf die Form 3 bei einer konstanten Temperatur instabil sein, wenn ihre ζ-Werte, Fig. 10b, im ganzen Druckintervall zwischen den beiden Gleichgewichtsdrucken der beiden Phasen 3′ und 2 größer sind als die ζ-Werte der Form 3. Es muß also für die totale Instabilität der Form 3′ die Beziehung:

$$\zeta_{s\,p_1'}' + \int_{p_1'}^{p_2'} \frac{d_T \zeta_s'}{dp}\, dp > \zeta_{s\,p_1'} + \int_{p_1'}^{p_2'} \frac{d_T \zeta_s}{dp}\, dp$$

gelten.

Schreibt man hierfür

$$\zeta_{s\,p_1'}' - \zeta_{s\,p_1'} > \int_{p_1'}^{p_2'} (v_s - v_s')\, dp$$

und berücksichtigt, daß nach Gleichung 2):

$$(\zeta_s' - \zeta_s)_{p_1'} = \int_{p_1}^{p_1'} (v_2 - v_s)\, dp$$

ist, so erhält man:

$$14)\qquad \int_{p_1}^{p_1'} (v_2 - v_s)\, dp > \int_{p_1'}^{p_2'} (v_s - v_s')\, dp.$$

Diese Größenbeziehung der beiden Integrale ist also die Bedingung totaler Instabilität der Form 3′ in Bezug auf die Form 3.

Kehrt sich das Größenzeichen um, so stehen die beiden Formen im Verhältnis partieller Stabilität zu einander. Um eine Form, die in Bezug auf eine Form 3 partiell stabil ist, von einer Form 3′, die in Bezug auf die Form 3 total instabil ist, zu unterscheiden, werden wir sie als eine Form 4 bezeichnen. Die Bedingung partieller Stabilität ist dann durch die Beziehung:

15) $$\int_{p_1}^{p_1'} (v_2 - v_3)\, dp < \int_{p_1'}^{p_2'} (v_3 - v_4)\, dp$$

gegeben.

In ganz analoger Weise werden aus den ζ-Isobaren die Bedingungen totaler und partieller Instabilität abgeleitet.

Aus Fig. 7 folgt die Beziehung:

$$\zeta'_{3T_1'} + \int_{T_1'}^{T_2'} \frac{d_p \zeta_3'}{dT}\, dT > \zeta_{3T_1'} + \int_{T_1'}^{T_2'} \frac{d_p \zeta_3}{dT}\, dT,$$

schreibt man hierfür:

$$(\zeta_3' - \zeta_3)_{T_1'} > -\int_{T_1'}^{T_2'} (\eta_3 - \eta_3')\, dT$$

und verbindet diese Beziehung mit der Gleichung 6), so erhält man:

16) $$-\int_{T_1}^{T_1'} (\eta_2 - \eta_3)\, dT > -\int_{T_1'}^{T_2'} (\eta_3 - \eta_3')\, dT$$

als Bedingung totaler Instabilität der Form 3′ gegen die Form 3, und als Bedingung partieller Stabilität die Beziehung

17) $$-\int_{T_1}^{T_1'} (\eta_2 - \eta_3)\, dT < -\int_{T_1'}^{T_2'} (\eta_3 - \eta_4)\, dT.$$

Fällt die Gleichgewichtstemperatur T_2' unter den absoluten Nullpunkt, so ist sie durch $T' = 0$ zu ersetzen.

Wenn die Beziehungen 14) und 16) bei allen Drucken und Temperaturen für die Formen 3′ und 3 erfüllt sind, so ist die Form 3′ total instabil in Bezug auf die Form 3, und bei Erfüllung der Beziehungen 15) und 17) in einem gewissen Zustandsgebiet stehen die Formen 3 und 4 im Verhältnis partieller Stabilität.

Die geometrische Deutung der Bedingungen totaler Instabilität veranschaulicht die gefundenen Beziehungen. In Fig. 11 schneiden sich die Volumenisothermen der Phase 2 und der beiden Formen 3′ und 3; und zwar ist der Fall, daß die Volumenisothermen 3′

und 3 der beiden Formen 3' und 3 sich ebenfalls schneiden, dargestellt.

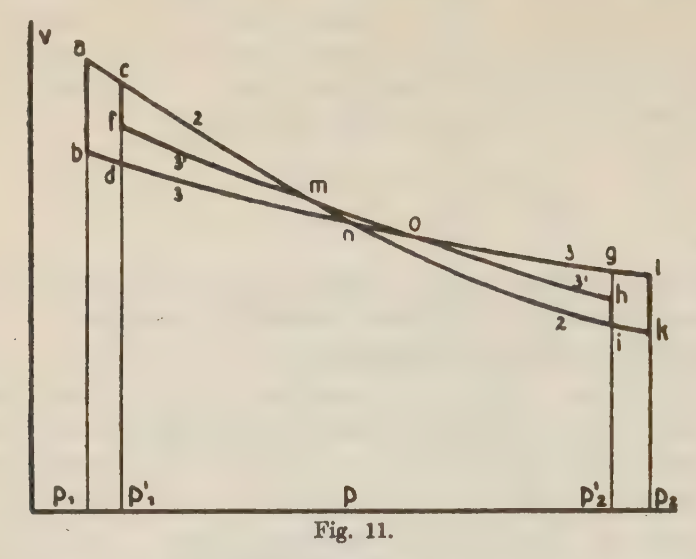


Fig. 11.

Die Beziehung 14) sagt, daß für die Flächenstücke *acdb*, *ogh* und *odf* die Ungleichung

$$acbd > ogh - odf$$

gilt. Ferner gilt eine der Beziehung 14) ganz analoge Ungleichung, zu der man auf analogem Wege wie zur Beziehung 14) gelangt, nämlich die Ungleichung:

$$-\int_{p_2}^{p'_2} (v_2 - v_3)\, dp > -\int_{p'_1}^{p'_2} (v_3 - v'_3)\, dp.$$

Die geometrische Deutung dieser Beziehung ist:

$$glki > ogh - odf$$

Schließlich sei noch daran erinnert, daß nach Gleichung 7) des ersten Teils je zwei Flächenstücke einander gleich sind, es gilt nämlich:

$$abn = nlk$$

und

$$cfm = mih$$

Die geometrische Deutung der Beziehung 16) ist aus Fig. 12, in der die η-Isobaren der Phasen 2, 3 und 3' dargestellt sind, zu ersehen. Wenn entsprechende Beziehungen wie oben für die Flächenstücke *abcd*, *odf* und *ogh* erfüllt sind, so ist die Form 3'

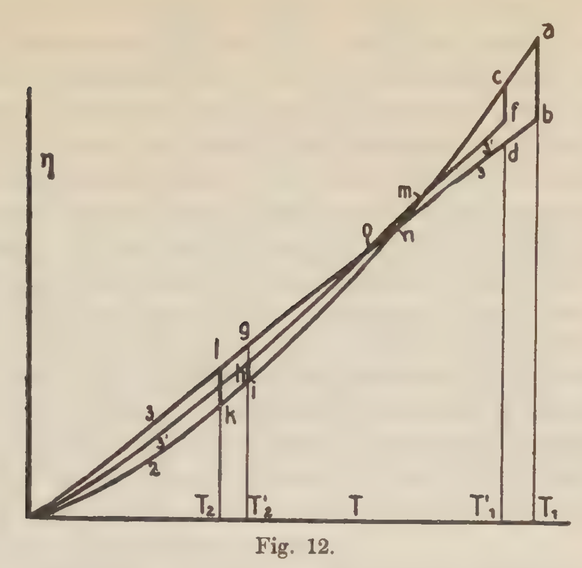


Fig. 12.

bei allen Drucken in Bezug auf die Form 3 instabil, wie oben gelten die Ungleichungen

$$abcd > odf - ogh$$

und

$$glki > ogh - odf.$$

Ferner gelten nach Gleichung 5) des ersten Teils für folgende Flächenstücke die Gleichungen

$$abn = nlk$$

und

$$cfm = mih.$$

3. Die Lage der Zustandsfelder partiell stabiler Formen wird durch das Volumen und den Wärmeinhalt der Formen geregelt, und die Größenbeziehungen dieser Eigenschaften weisen auf totale oder partielle Instabilität.

Da nach dem Prinzip von H. Le Chatelier einer Druckerhöhung in einem im Gleichgewicht befindlichen System, wobei sich der Druck und die Temperatur im System auf der Gleichgewichtskurve ändern, eine Druckänderung in entgegengesetzter Richtung folgt, so muß sich bei Volumenverkleinerung die Form mit kleinerem Volumen bilden. Hieraus folgt, daß beim Überschreiten einer Gleichgewichtskurve in Folge isothermer Drucksteigerung das System aus dem Zustandsfeld der Form mit

größerem Volumen in das der Form kleineren Volumens gelangen muß. Andererseits wird bei isobarer Temperatursteigerung das System aus dem Zustandsfelde der Form kleineren Wärmeinhaltes in das der Form größeren Wärmeinhaltes kommen müssen, weil der ursprünglichen Temperatursteigerung, bei sich der Druck und die Temperatur im System auf der Gleichgewichtskurve bewegen, eine entgegengesetzte Temperaturänderung folgt, welche durch Bildung der Form größeren Wärmeinhaltes bedingt wird.

Mit Hilfe der ζ-Funktion gelangt man leicht zu demselben Resultat und hieran anknüpfend erhält man in den Beziehungen der Volumen und der Wärmeinhalte beider Formen ein Kennzeichen für partielle und totale Instabilität der beiden Formen, welches allerdings nicht mit Sicherheit, aber doch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu entscheiden gestattet, ob eine Form in Bezug auf eine andere partiell oder total instabil ist.

In Fig. 13 sind die ζ-Isothermen der Flüssigkeit 2 und der beiden partiell stabilen Formen 3 und 4 gezeichnet, für die Richtung dieser Isothermen gelten in den beiden Schnittpunkten die Beziehungen

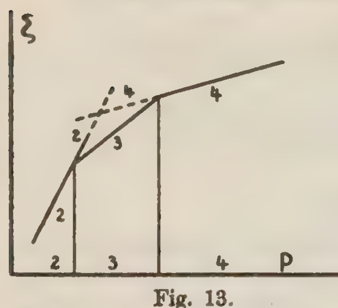


Fig. 13.

$$\frac{d_T \zeta_2}{dp} > \frac{d_T \zeta_3}{dp} \quad \text{und} \quad \frac{d_T \zeta_3}{dp} > \frac{d_T \zeta_4}{dp},$$

und daher auch

$$v_2 > v_3 \quad \text{und} \quad v_3 > v_4.$$

Man ersieht, daß, wenn diese Beziehungen gelten und die ζ-Isothermen sich schneiden, jede der Phasen 2, 3 und 4 ein Druckintervall besitzt, in dem sie stabil im Vergleich zu den beiden anderen Phasen ist, weil bei der Erfüllung jener Bedingungen für jede Phase ein Druckintervall existiert, in dem ihre ζ-Isotherme tiefer liegt als die der beiden anderen Phasen. Dann müssen diese Druckintervalle, in denen die einzelnen Formen stabil sind, einander in der Reihenfolge der Volumen folgen. In ganz analoger Weise ergibt sich aus den ζ-Isobaren der Phasen 2, 3 und 4, Fig. 14, die Regel, daß die bei höheren Temperaturen stabilere Phase bei ihrer Bildung aus der bei tieferen Temperaturen stabilen Phase Wärme aufnehmen muß; denn die Reihenfolge der Temperaturintervalle, in denen die ζ-Isobare einer der drei Phasen tiefer liegt als die der beiden anderen Phasen, in denen also gerade diese Phase stabiler ist als die beiden anderen, fordert die Beziehungen

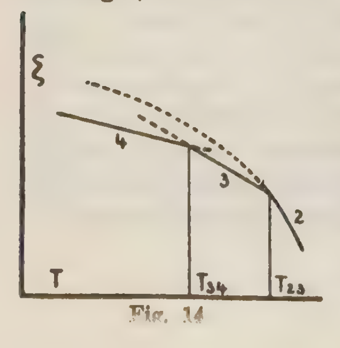


Fig. 14.

$$\frac{d_p \zeta_4}{dT} > \frac{d_p \zeta_3}{dT} > \frac{d_p \zeta_2}{dT}$$

oder

$$-\eta_4 > -\eta_3 > -\eta_2;$$

hieraus folgt:

$$\eta_3 - \eta_4 > 0 \quad \text{und} \quad \eta_2 - \eta_3 > 0$$

und damit auch für die Umwandlungswärmen bei konstantem Druck die Beziehungen

$$(\eta_3 - \eta_4)\, T_{34} > 0 \quad \text{und} \quad (\eta_2 - \eta_3)\, T_{23} > 0.$$

Diese beiden Regeln werden von praktischer Bedeutung, wenn es sich darum handelt, für zwei Formen, deren Umwandlungskurven in Zustandsgebieten liegen, welche dem Experiment bisher nicht zugänglich waren, die Zustandsfelder ihrer absoluten Stabilität zu prognostizieren. Es sei hier nur auf das Beispiel Diamant und Graphit[1]) hingewiesen.

In naher Beziehung zu diesen allgemein gültigen Regeln stehen zwei andere Regeln, deren Aussagen aber nur eine gewisse Wahrscheinlichkeit zukommt.

Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß sich die ζ-Isothermen zweier Formen bei wachsendem Druck schneiden werden, viel geringer, wenn die beiden ζ-Isothermen bei kleinen Drucken divergieren, als wenn sie konvergieren. Wenn also das Volumen der instabileren Form bei kleinen Drucken größer ist als daß der stabilen Form, so ist es wahrscheinlich, daß die instabilere Form bei allen Drucken instabiler als die stabile bleibt, und wenn die umgekehrte Größenbeziehung der Volumen besteht, so ist es wahrscheinlich, daß beide Formen partiell stabil sind.

Ebenso ist es weniger wahrscheinlich, daß die ζ-Isobaren der beiden Formen sich bei tieferen Temperaturen schneiden werden, wenn beim Schmelzpunkt der instabileren Form die beiden ζ-Isobaren divergieren, als wenn sie konvergieren. Wenn also die Entropie der instabileren Form beim Schmelzpunkt dieser Form größer ist als die der stabileren Form, oder die Schmelzwärme der instabileren Form kleiner ist als die Schmelzwärme der stabileren beim Schmelzpunkt der instabileren, so ist es wahrscheinlich, daß die instabilere Form bei allen Temperaturen unterhalb ihres Schmelzpunktes instabiler bleiben wird als die stabilere Form, und wenn für die Schmelzwärmen die umgekehrte Größenbeziehung

1) Zeitschr. f. physik. Chemie 69 S. 569 1909.

besteht, so ist es wahrscheinlich, daß ein Stabilitätswechsel eintreten wird, daß die beiden Formen partiell stabil sind.

Es sind also die Größenbeziehungen der Volumen und der Schmelzwärmen zweier Formen verschiedener Stabilität als Kennzeichen totaler respektive partieller Stabilität zu betrachten. Wenn die instabilere Form das größere Volumen und die kleinere Schmelzwärme hat, so tritt ein Stabilitätswechsel für beide Formen wahrscheinlicher Weise nicht ein, derselbe ist aber zu erwarten, wenn für die Volumen und Schmelzwärmen die umgekehrte Größenbeziehung besteht.

Die reine Thermodynamik läßt, wie wir sahen, die Ableitung von Regeln über die Lage der Gleichgewichtskurven verschiedener Formen, die sich ihrer Stabilität nach unterscheiden, zu. Zur Ableitung dieser Regeln war es nützlich, ein thermodynamisches Klassifikationsprinzip einzuführen. Die thermodynamische Krystallgruppe ist dadurch gekennzeichnet, daß sich die ζ-Flächen der Formen einer Gruppe unter einander nicht schneiden, während sich die ζ-Flächen der Formen verschiedener Gruppen untereinander schneiden. Die praktische Bedeutung dieser Klassifikation und der Sätze über die Lage der Gleichgewichtskurven der Formen zweier Krystallgruppen konnte an einem Beispiel, den Formen des Wassers, gezeigt werden.

Ferner ließ sich eine Reihe von Größenbeziehungen angeben, welche die Messung der Instabilität verschiedener Formen einer Krystallgruppe in Bezug auf eine stabile Form praktisch auszuführen gestatten. Die Bedingungen totaler und partieller Stabilität, der Existenz einer oder mehrerer Krystallgruppen, ließen sich aus den Volumen- und Entropieflächen ableiten, und eine Regel von praktischer Bedeutung, welche mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die totale Instabilität von der partiellen zu unterscheiden gestattet, ließ sich angeben.

Diese Untersuchung läßt aber auch die Grenzen rein thermodynamischer Erkenntnis auf dem Gebiete des Polymorphismus übersehen. Die reine Thermodynamik kann, wenn ihr die Tatsache der Existenz verschiedener Formen verschiedenen Volumens und verschiedener Entropie gegeben ist, Regeln über die Lage der Gleichgewichtskurven dieser Formen angeben, sie kann aber nicht die Notwendigkeit der Existenz dieser Formen, die Tatsache des Polymorphismus beweisen. Ebenso wenig kann sie etwas über die Anzahl der Krystallgruppen eines Stoffes und die Zahl ihrer

Glieder sagen. Hier haben die Erfahrung und eine speziellere Theorie, die Atomistik, weiter zu helfen.

c) Der Polymorphismus und die Molekularzusammensetzung der Flüssigkeiten.

Die Anzahl der thermodynamisch unbeschränkt möglichen Krystallgruppen wird durch die Erfahrung beschränkt und in enge Beziehung zur Molekularkonstitution der Flüssigkeiten, aus denen sich die Krystallgruppen bilden, gebracht.

Über die Anzahl der Krystallformen derselben Gruppe lehrt die Erfahrung, daß, je eingehender die Stoffe, besonders diejenigen, welche sich unterkühlen lassen, untersucht werden, um so mehr instabile Formen derselben Krystallgruppe aufgefunden werden. In dieser Richtung ist also durch die Erfahrung bisher keine Beschränkung zu verzeichnen, aber betreffs der Anzahl der Krystallgruppen selbst besteht eine solche Beschränkung.

Aus Flüssigkeiten, die ihren Werten der Eötvösschen Konstante nach zu urteilen, nur aus einer Molekülart bestehen, krystallisieren nur die Formen einer Krystallgruppe.

Es konnte nämlich festgestellt werden, daß im Zustandsfelde von 1 bis 3000 kg Umwandlungskurven bei diesen Stoffen nicht zu finden sind, daß also die stabilen Formen dieser Stoffe wahrscheinlich im ganzen Zustandsfelde des anisotropen Zustandes stabil sind, und daß die instabilen Formen dieser Stoffe wahrscheinlich total instabil sind.

Ferner lehrte die Erfahrung, daß bei Stoffen, die im flüssigen Zustande assoziiert sind, häufig eine Umwandlungskurve, in einzelnen Fällen auch mehrere festzustellen sind, daß also aus assoziierten Flüssigkeiten mehrere Krystallgruppen krystallisieren können.

Nicht assoziierten Flüssigkeiten entspricht immer nur eine Krystallgruppe, assoziierten Flüssigkeiten können mehrere Krystallgruppen entsprechen.

Im Folgenden wird dieser Zusammenhang an dem bisher vorliegenden Versuchsmaterial dargelegt werden.

R. Eötvös[1]) hat gefunden, daß die molekulare Oberflächenenergie, das Produkt aus der Oberflächenspannung α und der molekularen Oberfläche, die sich aus dem Molekularvolumen v zu $v^{\frac{2}{3}}$ ergibt, bei nicht assoziierten Flüssigkeiten mit der Temperatur linear abnimmt, und daß der negative Temperaturkoeffizient der

1) Wied. Ann. 27, 452 (1886).

molekularen Oberflächenenergie $-\frac{d(\alpha v^{\frac{2}{3}})}{dT}$ bei nicht assoziierten Flüssigkeiten Werte besitzt, die um den Wert 2.27 schwanken. Bei assoziierten Flüssigkeiten ist dieser Wert kleiner und nähert sich mit wachsender Temperatur dem normalen Wert 2.27.

Die Grenze, bis zu der nach tieferen Temperaturen hin die Gesetze von Eötvös gelten, ist nicht genauer bekannt. Eötvös selbst nimmt an, daß diese Grenze mindestens bis in die Mitte zwischen dem absoluten Nullpunkt und der kritischen Temperatur reicht. Da in der Nähe dieser Temperatur häufig die Schmelzpunkte der Stoffe liegen, so gelten die Gesetze von Eötvös im allgemeinen für Flüssigkeiten bei der Temperatur ihres Schmelzpunktes.

Man hat also zwei Kriterien, an denen zu erkennen ist, ob eine Flüssigkeit aus einer einzigen Molekülart besteht oder ob sie ein Gemenge zweier oder mehrerer Molekülarten darstellt. Die lineare Abnahme der molekularen Oberflächenenergie mit zunehmender Temperatur weist darauf hin, daß die Flüssigkeit in dem betreffenden Temperaturintervall hauptsächlich aus einer Molekülart besteht, und der Wert der Temperaturkoeffizienten soll bei solchen Flüssigkeiten nicht unter einen gewissen Betrag sinken. Dieser Betrag kann nicht mit Sicherheit angegeben werden. Nach Eötvös schwanken die Temperaturkoeffizienten um den Wert 2.27, nach Ramsay und seinen Mitarbeitern um den Wert 2.12. Man wird also eine Flüssigkeit mit einem Temperaturkoeffizienten, der größer ist als 2.00, als im Wesentlichen normal und Flüssigkeiten mit Temperaturkoeffizienten kleiner als 2.00 als merklich assoziiert und zwar um so mehr, als der Temperaturkoeffizient kleiner als 2.00 ist, ansehen dürfen.

In der folgenden Tabelle sind für 29 Stoffe folgende Angaben zusammengestellt: 1. Die Zahl der stabilen Krystallarten, welche mit der Zahl der Krystallgruppen identisch ist; sie ist den Zustandsdiagrammen aus „Krystallisieren und Schmelzen“ entnommen. 2. Die Zahl der bisher bekannt gewordenen instabilen Formen. 3. Die Werte $-\frac{d(\alpha v^{\frac{2}{3}})}{dT}$, diese sind nach den Angaben von Ramsay und Shields (Ztschr. f. phys. Chem. 12, S. 433), Longinesau (Ann. Scient. Jassy 1904), Feustel (Ann. der Phys. 16, S. 61), Dutoit-Fridrich (Compt. rend. 130, S. 327), Verschaffelt (Verslag. Amsterdam 1895) und den noch nicht publizierten Messungen des Herrn Dr. R. Thibaut zusammengestellt. In der 5. Kolonne ist durch

Anfangsbuchstaben auf den Namen dessen, von dem die Messung herrührt, hingewiesen worden. 4. Der Quotient $\frac{d^2(\alpha v^{\frac{2}{3}})}{dT^2}$; für diesen ist angegeben, ob derselbe im durchmessenen Temperaturintervall verschwindet, was durch das Zeichen 0 kenntlich gemacht ist, oder ob derselbe einen merklichen Wert hat, worauf durch die Zeichen + und − hingewiesen ist.

Man ersieht aus der Tabelle, daß bei normalen Flüssigkeiten, die durch einen $\frac{d(\alpha v^{\frac{2}{3}})}{dT}$-Wert größer als 2.00 und dadurch, daß für sie $\frac{d^2(\alpha v^{\frac{2}{3}})}{dT^2} = 0$ ist, gekennzeichnet sind, nur eine Krystallgruppe beobachtet worden ist, daß also in den Zustandsdiagrammen der Stoffe, die im flüssigen Zustande aus einer Molekülart bestehen, Umwandlungskurven nicht auftreten. Für die Kohlensäure, CO_2, wurden zwischen 3000—4500 kg bei derselben Temperatur mehrere Gleichgewichtsdrucke bestimmt („Krystallisieren und Schmelzen" S. 296). Da aber möglicher Weise die druckübertragende Flüssigkeit sich mit der CO_2 gemischt hatte, so konnte auf Grund dieser Beobachtungen die Existenz einer zweiten stabilen CO_2-Form nicht abgeleitet werden. Beim o-Kresol wurden die Steighöhen für ein wasserhaltiges Präparat bestimmt, wodurch die Flüssigkeit vielleicht normaler erscheint, als es das reine o-Kresol ist.

(Tabelle siehe folgende Seite.)

Die Atomistik kennt zwei Wurzeln des Polymorphismus. Durch Anordnung verschiedener Molekülarten desselben Stoffs in verschiedene oder auch gleiche Raumgitter können thermisch differente Formen, aber auch durch Anordnung derselben Moleküle in verschiedene Raumgitter können solche Formen entstehen.

Die Formen, welche aus derselben Molekülart aufgebaut sind, werden zu einer molekularen Krystallgruppe zusammengefaßt werden.

Da es zur Zeit nicht möglich ist, auf rein atomistischem Wege zu beweisen, daß sich die Reihenfolge der Stabilitäten der Formen einer molekularen Gruppe im Zustandsfelde der stabilsten Form nicht ändert, oder daß nur Formen verschiedener, molekularer Krystallgruppen untereinander ins Gleichgewicht kommen können, und da auf thermodynamischem Wege der Beweis, daß sich die ζ-Flächen der Formen einer molekularen Krystallgruppe nicht schneiden, in Ermangelung einer Zustandsgleichung nicht erbracht

Stoffe	Anzahl der Krystall-gruppen	Anzahl der instabilen Formen	$-\frac{d(\alpha v^{\frac{2}{3}})}{dT}$	$\frac{d^2(\alpha v^{\frac{2}{3}})}{dT^2}$	Beobachter
1. Wasser	2	2	0.88	—	R.—Sh.
2. Essigsäure	2		0.90	—	R.—Sh.
3. Ameisensäure	1		0.90	—	R.—Sh.
4. Schwefel	2	4	1.51		L.
5. Phenol	2		1.80	—	Th.
6. Palmitinsäure	1		1.60	0	Th.
7. Formanilid	1	1	1.66	—	Th.
8. p-Toluidin	1		1.91	0	Th.
9. o-Kresol	2		1.93	0?	Th.
10. Laurinsäure	1		2.00	0	Th.
11. Anilin	1		2.05	0	R.—Sh.
12. Tetrachlorkohlenstoff	1	1?	2.10	0	R.—Sh.
13. Menthol	1	2	2.12	0	Th.
14. p-Chlortoluol	1		2.15	0	R.—Sh.
15. Aethylendibromid	1		2.20	0	R.—Sh.
16. Kohlensäure	1 + 1??		2.22	0	V.
17. Nitrobenzol	1		2.23	0	R.—Sh.
18. p-Kresol	1		2.24	0	F.
19. p-Dichlorbenzol	1		2.31	0	Th.
20. Naphthalin	1		2.29	0	D. Fr.
21. p-Xylol	1		2.34	0	Th.
22. Benzol	1		2.37	0	R.—Sh.
23. Acetophenon	1		2.40	0	Th.
24. Anethol	1		2.48	0	Th.
25. Myristinsäure	1		2.53	0	Th.
26. Diphenylamin	1		2.62	0	Th.
27. Benzophenon	1		2.63	0	D. Fr.
28. Benzylanilin	1		2.70	0	Th.
29. Veratrol	1		2.97	0	Th.

werden kann, so müssen wir uns an die Erfahrung wenden, um die Berechtigung dieser Sätze zu erweisen. Dieses Ziel wird erreicht, wenn wir die Erfahrungssätze atomistisch deuten.

1. Bei gleichem Druck und gleicher Temperatur können aus einer Flüssigkeit zwei und mehr verschiedene Formen krystallisieren. Diese Formen kommen aber, so weit die Erfahrung reicht, untereinander nicht ins Gleichgewicht. Ein Wechsel in der Stabilität dieser Form vollzieht sich also wahrscheinlich im ganzen Zustandsfelde der stabilsten Form nicht. Da solche Formen sowohl aus assoziierten als auch aus normalen Flüssigkeiten sich bilden, so ist zu schließen, daß diese Formen aus derselben Molekülart aufgebaut sind, daß also die Formen einer molekularen Gruppe miteinander nicht ins Gleichgewicht kommen.

2. Aus einer normalen Flüssigkeit krystallisieren nur Formen einer thermodynamischen Gruppe. Daher ist es mindestens wahrscheinlich, daß die Formen einer Gruppe aus denselben Molekülen

aufgebaut sind, und man darf die Annahme, daß die Krystallisation normaler Flüssigkeiten von Polymerisation begleitet ist, als unwahrscheinlich zurückweisen. Bedenkt man, daß auch bei den Stoffen, für die bisher keine instabilen Formen gefunden wurden, wahrscheinlich auch solche Formen in nicht kleiner Zahl existieren werden, so ist die Tatsache, daß in den Zustandsdiagrammen der Stoffe, die im flüssigen Zustande nicht assoziiert sind, keine Umwandlungskurven gefunden sind, ein Zeichen dafür, daß die Formen, welche sich aus einer normalen Flüssigkeit bilden, zu einer thermodynamischen Gruppe gehören.

3. Aus assoziierten Flüssigkeiten können, auch wenn bei der Krystallisation keine neuen Molekülarten gebildet werden, mehrere Krystallgruppen entstehen. Daher ist zu erwarten, daß in den Zustandsdiagrammen von Stoffen, welche als Flüssigkeit assoziiert sind, Umwandlungskurven auftreten werden. Aber das Auftreten der Umwandlungskurven ist nicht notwendig. Denn, wenn sich schon bei kleinen Drucken die Molekülart kleinsten Molekularvolumens krystallbildend betätigt, dann sind bei höheren Drucken erst recht die Molekülarten größeren Molekularvolumens von der Krystallbildung ausgeschlossen; tritt aber bei kleinen Drucken die Molekülart größeren Molekularvolumens krystallbildend auf, dann ist bei höheren Drucken die Bildung einer neuen Krystallart aus den Molekülen kleineren Molekularvolumens mit Sicherheit zu erwarten. Etwas ganz analoges gilt für die Erniedrigung der Temperatur, hierbei kommt es auf die Wärmekapazität der verschiedenen Molekülarten an. Tritt beim Schmelzpunkt die Molekülart kleinster Wärmekapazität ins Raumgitter, so ist damit die Bildung von Formen mit größerer Wärmekapazität verhindert, und obwohl die Flüssigkeit assoziiert ist, so kann es doch nur zur Bildung einer Krystallgruppe kommen. Wenn aber beim Schmelzpunkt die Molekülart größter Wärmekapazität sich krystallbildend betätigt, so wird es bei tieferen Temperaturen zur Umwandlung der gebildeten Form in die mit Molekülen kleinerer Wärmekapazität kommen können.

Wenn nur Molekülarten, die in den Flüssigkeiten vorhanden sind, auch in den Krystallen sich wiederfinden, so fordert die Atomistik für normale Flüssigkeiten eine Krystallgruppe und läßt für assoziierte Flüssigkeiten die Bildung einer oder mehrerer Krystallgruppen zu. Zu diesem Resultat führt auch die Erfahrung. Daraus folgt, daß die thermodynamisch und atomistisch definierten Krystallgruppen identisch sind. Oder daß Formen, welche aus derselben Molekülart aufgebaut sind, mit einander nicht ins Gleich-

gewicht kommen, während Formen, welche aus verschiedenen Molekülen bestehen, mit einander ins Gleichgewicht kommen.

Damit ist die Molekulargewichtsbestimmung der Krystalle auf die der Flüssigkeiten zurückgeführt, da man behaupten darf, daß krystallbildend nur solche Moleküle wirken, welche als solche in den Flüssigkeiten vorhanden sind.

Über die Verteilung der Zahlen, welche aus ν Primfaktoren zusammengesetzt sind.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Vorgelegt von Herrn Klein durch den vorsitzenden Sekretär in der Sitzung vom 1. Juli 1911.

Es bezeichne $\pi_2(x)$ die Anzahl der Zahlen $\leqq x$, welche aus zwei verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzt sind, d. h. die Anzahl der Lösungen von

$$pq \leqq x, \quad 2 \leqq p < q$$

in Primzahlen p, q. Nachher wird auch von $\pi_\nu(x)$, der Anzahl aller aus ν verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzten Zahlen $\leqq x$, die Rede sein; aber alles Neue, was ich zu sagen habe, findet bereits bei $\nu = 2$ seinen prägnanten Ausdruck. Daher soll hier zunächst und auch im ersten Teil der folgenden Abhandlung nur von $\pi_2(x)$ die Rede sein.

Die Veranlassung, eine meiner Erstlingsarbeiten[1]) wieder aufzunehmen, ist eine im hiesigen Gaußarchiv kürzlich[2]) gefundene Notiz aus dem Jahre 1796, in welcher Gauß der Vermutung Ausdruck gibt, daß $\pi_2(x)$ näherungsweise $\frac{x \log\log x}{\log x}$ ist. Die Richtigkeit der asymptotischen Gleichheit beider Funktionen, d. h. des Satzes[3])

---

1) *Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers* [Bulletin de la Société mathématique de France, Bd. XXVIII (1900), S. 25—38].

2) Vergl. Klein, *Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken. Neunter Bericht* [Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen, Jahrgang 1911, S. 26—32].

3) In bezug auf alle vorkommenden Bezeichnungen sei auf § 12 (S. 59—65) in meinem *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* [Leipzig und Berlin, 1909] verwiesen.

(1) $$\pi_2(x) \sim \frac{x \log\log x}{\log x},$$

anders geschrieben

$$\pi_2(x) = \frac{x \log\log x}{\log x} + o\left(\frac{x \log\log x}{\log x}\right),$$

habe ich zuerst a. a. O. bewiesen, von dem Hadamard-de la Vallée Poussinschen Primzahlsatz

(2) $$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \sim \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

ausgehend durch eine elementare, d. h. nicht nochmals aus den transzendenten Quellen (Zetafunktion) schöpfende Methode. Zugleich bewies ich dort, von dem schärferen (und auch heute noch abgesehen von dem vergrößerten Werte der Konstanten α unübertroffenen) de la Vallée Poussinschen Satze

(3) $$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

ausgehend, daß

(4) $$\pi_2(x) = \frac{x \log\log x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

ist. In meinem Buche[1]) kam es mir nur auf die Entwicklung des — wie ich seit dem 27. 1. 1911 weiß, schon von Gauß vermuteten — Hauptresultates (1), d. h. des Beweises der asymptotischen Gleichheit von $\pi_2(x)$ mit einer der einfachsten Funktionen an. Ich habe daher dort nur (1), nicht (4) bewiesen. Jetzt interessierte es mich aber sehr festzustellen, ob man nicht mehr als (4) beweisen kann. Zunächst wäre die Frage zu beantworten, ob

(5) $$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_2(x) - \frac{x \log\log x}{x}}{\frac{x}{\log x}}$$

existiert, d. h. ob die in (4) mit $O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ bezeichnete Funktion die Gestalt

1) S. 205—208.

$$A_1 \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

bei konstantem A_1 hat oder nicht. Diese Frage und mehr läßt sich in der Tat erledigen.

Im § 1 werde ich aus (3) durch eine Verschärfung der damaligen elementaren Schlußkette die Existenz von (5), d. h. die Relation

$$(6) \qquad \pi_2(x) = \frac{x \log\log x}{\log x} + A_1 \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

beweisen. Im § 2 beweise ich mit derselben Methode für jedes ganze positive m, daß eine Relation

$$(7) \begin{cases} \pi_2(x) = \dfrac{x}{\log x}(\log\log x + A_1) + \dfrac{x}{\log^2 x}(1!\log\log x + A_2) + \cdots \\ \qquad + \dfrac{x}{\log^m x}((m-1)!\log\log x + A_m) + o\left(\dfrac{x}{\log^m x}\right) \end{cases}$$

besteht.

Über $\pi_\nu(x)$ vermutet Gauß in der neulich gefundenen Notiz (wenn er es auch nur noch für $\nu = 3$ explizit formuliert, um dann ein & sic in inf. hinzuzufügen)

$$(8) \qquad \pi_\nu(x) \sim \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{x(\log\log x)^{\nu-1}}{\log x}.$$

(8) ist richtig, und ich habe es a. a. O. zuerst bewiesen, von (2) ausgehend; ebenda erschloß ich unter Zuhilfenahme von (3) die etwas schärfere Relation

$$(9) \quad \pi_\nu(x) = \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{x(\log\log x)^{\nu-1}}{\log x} + O\left(\frac{x(\log\log x)^{\nu-2}}{\log x}\right),$$

welche im Falle $\nu = 2$ in (4) übergeht. Im § 3 der vorliegenden Arbeit werde ich für jedes ganze $\nu \geqq 2$ und jedes ganze $m \geqq 1$ die Existenz einer Relation

$$(10) \begin{cases} \pi_\nu(x) = \dfrac{x}{\log x}\left(\dfrac{1}{(\nu-1)!}(\log\log x)^{\nu-1} + A_{1,\nu-2}(\log\log x)^{\nu-2} + \cdots + A_{1,0}\right) \\ \qquad + \dfrac{x}{\log^2 x}\left(\dfrac{1!}{(\nu-1)!}(\log\log x)^{\nu-1} + \cdots + A_{2,0}\right) + \cdots \\ \qquad + \dfrac{x}{\log^m x}\left(\dfrac{(m-1)!}{(\nu-1)!}(\log\log x)^{\nu-1} + \cdots + A_{m,0}\right) + o\left(\dfrac{x}{\log^m x}\right) \end{cases}$$

beweisen. Zur Vermeidung eines mühevollen Induktionsschlusses beweise ich in diesem § 3 die Relation (10) nicht durch den Schluß

von $\nu-1$ auf ν (wie dies im § 2 für $\nu = 2$ geschah), sondern schöpfe sie direkt aus den transzendenten Quellen; übrigens — worauf es aber gar nicht ankommt — setzt mein Beweis daher den Primzahlsatz (2) nicht voraus. Ich beweise eben in § 3 die Relation (10) durch fast unmittelbare Übertragung einer der Beweisanordnungen[1]), welche ich zur Erledigung des Falles $\nu = 1$, d. h. zur Auffindung einer möglichst kurzen Begründung der de la Vallée Poussinschen Relation

$$\pi_1(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x} + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right)$$

angegeben hatte. Die bei der Ausdehnung von 1 auf ν auftretenden Schwierigkeiten lassen sich, wie § 3 zeigt, sämtlich überwinden; natürlich beweise ich dabei gleichzeitig auch jenen bekannten Spezialfall $\nu = 1$ von (10).

Im § 4 werde ich die Richtigkeit desselben Resultates (10) (mit anderen Konstanten A) für die beiden Funktionen $\varrho_\nu(x)$ und $\sigma_\nu(x)$ beweisen, für welche ich damals die der Formel (9) entsprechende Abschätzung bewiesen hatte. $\varrho_\nu(x)$ ist die Anzahl der Zahlen $\leqq x$, welche aus genau ν verschiedenen Primfaktoren (in beliebiger Vielfachheit!) zusammengesetzt sind; $\sigma_\nu(x)$ ist die Anzahl der Zahlen $\leqq x$, welche das Produkt von ν Primzahlen (mehrfache mehrfach gezählt!) sind[2]).

Erster Teil.

§ 1.

Es ist $\pi_2(x)$ die Anzahl der Primzahl-Lösungspaare p, q von

$$pq \leqq x, \quad p < q.$$

Jedem p entsprechen also alle q, welche den Bedingungen

$$p < q \leqq \frac{x}{p}$$

genügen; d. h. p muß $< \sqrt{x}$ sein, und alsdann entsprechen ihm $\pi\left(\frac{x}{p}\right) - \pi(p)$ Werte von q. Daher ist

---

1) Vergl. § 64 meines Handbuchs.

2) Die Zahl $50 = 2.5^2$ z. B. rechnet also bei keinem π_ν, dagegen bei ϱ_2 und σ_3 mit.

$$\begin{aligned}\pi_2(x) &= \sum_{p<\sqrt{x}}\left(\pi\left(\frac{x}{p}\right)-\pi(p)\right)\\ &= \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\left(\pi\left(\frac{x}{p}\right)-\pi(p)\right)\\ &= \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{p}\right)-\sum_{p\leqq\sqrt{x}}\pi(p)\\ &= \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{p}\right)-(1+2+\cdots+\pi(\sqrt{x}))\end{aligned}$$

(11) $$= \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{p}\right)-\left(\frac{1}{2}(\pi(\sqrt{x}))^2+\frac{1}{2}\pi(\sqrt{x})\right).$$

Wegen

$$\pi(\sqrt{x}) = O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

ist nach (11)

$$\pi_2(x) = \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{p}\right)+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

(12) $$= \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{p}\right)+o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Nun ist nach (3)

(13) $$\pi(x) = \int_2^x\frac{du}{\log u}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right);$$

also liefert (12) weiter

$$\begin{aligned}\pi_2(x) &= \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\int_2^{\frac{x}{p}}\frac{du}{\log u}+O\sum_{p\leqq\sqrt{x}}\frac{x}{p\log^2\frac{x}{p}}+o\left(\frac{x}{\log x}\right)\\ &= \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\int_2^{\frac{x}{p}}\frac{du}{\log u}+O\left(\frac{x}{\log^2\frac{x}{\sqrt{x}}}\sum_{p\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{p}\right)+o\left(\frac{x}{\log x}\right)\\ &= \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\int_2^{\frac{x}{p}}\frac{du}{\log u}+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\log\log x\right)+o\left(\frac{x}{\log x}\right)\end{aligned}$$

(14) $$= \sum_{p\leqq\sqrt{x}}\int_2^{\frac{x}{p}}\frac{du}{\log u}+o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Bei der in (14) auftretenden Summe werde die Summation mit der Integration vertauscht. Für $u \leqq \sqrt{x}$ kommen alle $p \leqq \sqrt{x}$, für $\sqrt{x} \leqq u \leqq \frac{x}{2}$ alle $p \leqq \frac{x}{u}$ in Betracht. Das gibt

$$\sum_{p \leqq \sqrt{x}} \int_2^{\frac{x}{p}} \frac{du}{\log u} = \int_2^{\sqrt{x}} \pi(\sqrt{x}) \frac{du}{\log u} + \int_{\sqrt{x}}^{\frac{x}{2}} \pi\left(\frac{x}{u}\right) \frac{du}{\log u}$$

$$= \pi(\sqrt{x}) \int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} + \int_{\sqrt{x}}^{2} \pi(v) \frac{-x dv}{v^2 \log \frac{x}{v}}$$

$$(15) \qquad = \pi(\sqrt{x}) \int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} + x \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\pi(v)\, dv}{v^2 (\log x - \log v)}$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log x}\right) + x \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\pi(v)\, dv}{v^2 (\log x - \log v)},$$

also, in (14) eingesetzt,

$$(16) \qquad \pi_2(x) = x \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\pi(v)\, dv}{v^2 (\log x - \log v)} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Nun werde für $v \geqq 2$

$$\pi(v) - \frac{v}{\log v} = \eta(v)$$

gesetzt, sodaß nach (13)

$$\eta(v) = O\left(\frac{v}{\log^2 v}\right)$$

ist und infolgedessen

$$\int_2^{\infty} \frac{\eta(v)}{v^2} dv$$

konvergiert. Für das in (16) auftretende Integral erhält man

$$\int_2^{\sqrt{x}} \frac{\pi(v)\, dv}{v^2 (\log x - \log v)}$$

$$= \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dv}{v \log v (\log x - \log v)} + \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\eta(v)\, dv}{v^2 (\log x - \log v)}$$

$$= \int_{\log 2}^{\frac{1}{2}\log x} \frac{dw}{w(\log x - w)} + \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\eta(v)}{v^2} \left(\frac{1}{\log x} + \frac{\log v}{\log x (\log x - \log v)}\right) dv$$

$$= \frac{1}{\log x}\int_{\log 2}^{\frac{1}{2}\log x}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{\log x - w}\right)dw + \frac{1}{\log x}\int_2^{\sqrt{x}}\frac{\eta(v)\,dv}{v^2}$$

$$+\frac{1}{\log x}\int_2^{\sqrt{x}}\frac{\eta(v)\log v\,dv}{v^2(\log x-\log v)}$$

$$= \frac{1}{\log x}\left[\log w - \log(\log x - w)\right]_{\log 2}^{\frac{1}{2}\log x} + \frac{1}{\log x}\left(\int_2^{\infty}\frac{\eta(v)\,dv}{v^2}+o(1)\right)$$

$$+O\left(\frac{1}{\log x}\int_2^{\sqrt{x}}\frac{v\log v\,dv}{\log^2 v\,.\,v^2(\log x-\log(\sqrt{x}))}\right)$$

$$= \frac{1}{\log x}\left(\log\left(\frac{1}{2}\log x\right)-\log\left(\frac{1}{2}\log x\right)-\log\log 2+\log(\log x-\log 2)\right)$$

$$+\frac{1}{\log x}(c+o(1))+O\left(\frac{1}{\log^2 x}\int_2^{\sqrt{x}}\frac{dv}{v\log v}\right)$$

$$= \frac{1}{\log x}(\log\log x-\log\log 2+o(1))+\frac{1}{\log x}(c+o(1))$$

$$+O\left(\frac{1}{\log^2 x}\log\log x\right)$$

(17) $$= \frac{\log\log x}{\log x}+\frac{A_1}{\log x}+o\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Aus (16) und (17) zusammen folgt

$$\pi_2(x) = \frac{x\log\log x}{\log x}+A_1\frac{x}{\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

wie in (6) behauptet wurde.

§ 2.

Es sei m eine gegebene ganze Zahl $\geqq 2$. Nach (3) ist

(18) $$\pi(x) = \int_2^x\frac{du}{\log u}+o\left(\frac{x}{\log^{m-1}x}\right).$$

Dies gibt für den Klammerausdruck in (11)

$$\frac{1}{2}(\pi(\sqrt{x}))^2+\frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\left(\int_2^{\sqrt{x}}\frac{du}{\log u}+o\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^{m-1}x}\right)\right)^2+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_2^{\sqrt{x}}\frac{du}{\log u}\right)^2+o\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\,\frac{\sqrt{x}}{\log^{m-1}x}\right)+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_2^{\sqrt{x}}\frac{du}{\log u}\right)^2+o\left(\frac{x}{\log^m x}\right);$$

(11) liefert also

$$(19)\qquad \pi_2(x) = \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \pi\left(\frac{x}{p}\right) - \frac{1}{2}\left(\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u}\right)^2 + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right).$$

Nun ist nach (3)

$$(20)\qquad \pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(\frac{x}{\log^{m+1} x}\right),$$

also

$$\sum_{p \leqq \sqrt{x}} \pi\left(\frac{x}{p}\right) = \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \int_2^{\frac{x}{p}} \frac{du}{\log u} + O \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \frac{x}{p \log^{m+1}\left(\frac{x}{p}\right)}$$

$$= \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \int_2^{\frac{x}{p}} \frac{du}{\log u} + O\left(\frac{x}{\log^{m+1} x} \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{p}\right)$$

$$= \sum_{p \leqq \sqrt{x}} \int_2^{\frac{x}{p}} \frac{du}{\log u} + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right).$$

Unter Benutzung der Identität (15) folgt hieraus

$$\sum_{p \leqq \sqrt{x}} \pi\left(\frac{x}{p}\right) = \pi(\sqrt{x}) \int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} + x \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\pi(v)\, dv}{v^2(\log x - \log v)} + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right),$$

also nach (19)

$$(21)\qquad \begin{cases} \pi_2(x) = \left(\pi(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u}\right) \int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} \\ \qquad\qquad + x \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\pi(v)\, dv}{v^2(\log x - \log v)} + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right). \end{cases}$$

Nun ist bekanntlich

$$\int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\, x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(m-2)!\, x}{\log^{m-1} x} + o\left(\frac{x}{\log^{m-1} x}\right),$$

also

$$(22)\qquad \int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} = a_1 \frac{\sqrt{x}}{\log x} + \cdots + a_{m-1} \frac{\sqrt{x}}{\log^{m-1} x} + o\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^{m-1} x}\right).$$

Wegen (22) und (18) ist das erste Glied rechts in (21)

$$\left(\pi(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u}\right)\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u} + o\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^{m-1} x}\right)\right)\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_2^{\sqrt{x}} \frac{du}{\log u}\right)^2 + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right)$$
$$= b_2 \frac{x}{\log^2 x} + \cdots + b_m \frac{x}{\log^m x} + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right).$$

Aus (21) wird daher

$$(23)\quad \begin{cases} \pi_2(x) = x\int_2^{\sqrt{x}} \dfrac{\pi(v)\,dv}{v^2(\log x - \log v)} + b_2 \dfrac{x}{\log^2 x} + \cdots \\ \qquad + b_m \dfrac{x}{\log^m x} + o\left(\dfrac{x}{\log^m x}\right). \end{cases}$$

Nun werde für $v \geqq 2$

$$\pi(v) - \frac{v}{\log v} - \frac{1!\,v}{\log^2 v} - \cdots - \frac{(m-1)!\,v}{\log^m v} = \eta(v)$$

gesetzt; wegen (20) und

$$\int_2^v \frac{du}{\log u} = \frac{v}{\log v} + \cdots + \frac{(m-1)!\,v}{\log^m v} + O\left(\frac{v}{\log^{m+1} v}\right)$$

ist

$$(24)\qquad \eta(v) = O\left(\frac{v}{\log^{m+1} v}\right);$$

infolgedessen ist für $\beta < m+1$ das Integral

$$\int_2^\infty \frac{\eta(v)\log^{\beta-1} v}{v^2}\,dv$$

konvergent. Für das Integral in (23) erhält man mit Rücksicht auf die Identität

$$\frac{1}{\log x - \log v} = \frac{1}{\log x} + \frac{\log v}{\log^2 x} + \cdots + \frac{\log^{m-1} v}{\log^m x} + \frac{\log^m v}{\log^m x(\log x - \log v)}$$

und unter Anwendung von (24) die Abschätzung

$$\int_2^{\sqrt{x}} \frac{\pi(v)\,dv}{v^2(\log x - \log v)} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dv}{v\log v\,(\log x - \log v)} + 1!\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dv}{v\log^2 v\,(\log x - \log v)}$$
$$+ \cdots + (m-1)!\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dv}{v\log^m v\,(\log x - \log v)} + \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\eta(v)\,dv}{v^2(\log x - \log v)}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} (\alpha-1)! \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dv}{v \log^\alpha v (\log x - \log v)}$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{m} \frac{1}{\log^\beta x} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\eta(v) \log^{\beta-1} v\, dv}{v^2} + \frac{1}{\log^m x} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\eta(v) \log^m v\, dv}{v^2 (\log x - \log v)}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} (\alpha-1)! \int_{\log 2}^{\frac{1}{2}\log x} \frac{dw}{w^\alpha (\log x - w)}$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{m} \frac{1}{\log^\beta x} \left(\int_2^\infty \frac{\eta(v) \log^{\beta-1} v}{v^2}\, dv + O \int_{\sqrt{x}}^\infty \frac{v \log^{\beta-1} v}{\log^{m+1} v \,.\, v^2}\, dv \right)$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log^m x} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{v \,.\, \log^m v}{\log^{m+1} v \,.\, v^2 \log x}\, dv \right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{(\alpha-1)!}{\log^\alpha x} \int_{\frac{\log 2}{\log x}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^\alpha (1-z)} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{1}{\log^\beta x} \left(c_\beta + O \int_{\sqrt{x}}^\infty \frac{dv}{v \log^{m-\beta+2} v} \right)$$

$$+ O\left(\frac{1}{\log^{m+1} x} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dv}{v \log v} \right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{(\alpha-1)!}{\log^\alpha x} \int_{\frac{\log 2}{\log x}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z^\alpha} + \frac{1}{z^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots \right) dz$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{m} \frac{1}{\log^\beta x} \left(c_\beta + O\left(\frac{1}{\log^{m-\beta+1} x} \right) \right) + O\left(\frac{1}{\log^{m+1} x} \log\log x \right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{(\alpha-1)!}{\log^\alpha x} \Big(d_{\alpha,\alpha-1} \log^{\alpha-1} x + \cdots + d_{\alpha,1} \log x + \log\log x + d_{\alpha,0} + \cdots$$

$$+ d_{\alpha,\alpha-m} \frac{1}{\log^{m-\alpha} x} + o\left(\frac{1}{\log^{m-\alpha} x} \right) \Big) + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{c_\beta}{\log^\beta x} + o\left(\frac{1}{\log^m x} \right)$$

$$(25) \quad = \sum_{\alpha=1}^{m} (\alpha-1)! \frac{\log\log x}{\log^\alpha x} + \sum_{\beta=1}^{m} \frac{e_\beta}{\log^\beta x} + o\left(\frac{1}{\log^m x} \right).$$

Wenn (25) in (23) eingesetzt wird, ergibt sich

$$\pi_2(x) = x \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{(\alpha-1)! \log\log x + A_\alpha}{\log^\alpha x} + o\left(\frac{x}{\log^m x} \right),$$

d. h. die in der Einleitung angekündigte Endformel (7).

Zweiter Teil.

§ 3.

Es werde die komplexe Variable s stets $= \sigma + ti$ gesetzt.

Bekanntlich[1]) gibt es eine Konstante $c > 2$ und eine Konstante A mit folgenden Eigenschaften:

1) *Es bezeichne G das Gebiet*

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c \log^9 t} \qquad \textit{für } t \geqq 3,$$

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c \log^9 3} = \vartheta \ \textit{für } 3 \geqq t \geqq -3,$$

$$\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c \log^9 (-t)} \ \textit{für } t \leqq -3,$$

inkl. Rand. Dann ist in G die Riemannsche Funktion $\zeta(s)$ von Null verschieden.

Wenn daher G′ das Gebiet bezeichnet, das durch einen geraden Schnitt von ϑ bis 1 aus G entsteht inkl. des Randes, d. h. auch beider Ufer des Schnittes, so ist die in der Halbebene $\sigma > 1$ durch

$$\log \zeta(s) = \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{ms}}$$

definierte Funktion in G′ regulär bis auf $s = 1$, und

$$\log \zeta(s) - \log \frac{1}{s-1}$$

ist auch in $s = 1$, d. h. in G regulär.

2) *Es ist für* $|t| \geqq 3$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c \log^9 |t|}$

$$|\log \zeta(s)| < A \log^9 |t|.$$

Es bezeichne nun $P(s)$ die für $\sigma > 1$ durch

$$\sum_p \frac{1}{p^s}$$

---

1) Vergl. z. B. S. 239 meines Handbuchs, wo es als unmittelbare Folgerung des Satzes auf S. 179—180 entwickelt ist. Ganz ebenso folgt für die zu einem beliebigen algebraischen Zahlkörper gehörige Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ der Satz des Textes unmittelbar aus demjenigen Satz über $\zeta_\varkappa(s)$, welchen ich auf S. 667—668 meiner Arbeit bewiesen habe: *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes* [Mathematische Annalen, Bd. LVI (1903), S. 645—670]. Daher gelten alle folgenden Untersuchungen dieser §§ 3—4 bis zum Schluß unverändert und mit wörtlich demselben Endergebnis für jeden algebraischen Zahlkörper bei entsprechender Bedeutung von $\pi_\nu(x)$, $\varrho_\nu(x)$ und $\sigma_\nu(x)$.

definierte Funktion. Es ist

$$\log \zeta(s) - P(s) = \sum_{\substack{p,\,m \\ m \geq 2}} \frac{1}{mp^{ms}}$$

eine für $\sigma > \frac{1}{2}$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe, also[1]) für $\sigma \geqq \vartheta$ regulär und beschränkt. Daher gilt über $P(s)$ das folgende:

$P(s)$ ist in G' exkl. $s = 1$ regulär; für $|t| \geqq 3$, $\sigma \geqq 1 - \frac{1}{c \log^9 |t|}$ ist

(26) $$|P(s)| < B \log^9 |t|.$$

Die Funktion

$$P(s) - \log \frac{1}{s-1}$$

ist in G regulär.

Nun sei eine ganze Zahl $\nu \geqq 1$ gegeben. Es werde diejenige Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

nebst der durch sie definierten analytischen Funktion $F(s)$ betrachtet, für welche die summatorische Funktion der Koeffizienten

$$\sum_{n=1}^{x} a_n = \pi_\nu(x)$$

ist, d. h. bei der $a_n = 1$ ist, falls n aus ν, sämtlich verschiedenen, Primfaktoren besteht, und sonst $a_n = 0$ ist.

Für $\nu = 1$ ist

$$F(s) = P(s).$$

Für $\nu = 2$ handelt es sich, wenn sowohl q als p alle Primzahlen durchläuft, um

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\sum_p \frac{1}{p^s} \sum_q \frac{1}{q^s} - \sum_p \frac{1}{p^{2s}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(P(s))^2 - \frac{1}{2} P(2s);$$

in der Tat tritt beim Ausmultiplizieren der beiden ersten Summen jede aus zwei verschiedenen Primzahlen zusammengesetzte Zahl

1) Wegen $c > 2$, $\log 3 > 1$ ist ja $\vartheta = 1 - \frac{1}{c \log^9 3} > \frac{1}{2}$.

zweimal auf und außerdem jedes — bei π_2 nicht zu berücksichtigende — Primzahlquadrat einmal.

Ganz analog ergibt sich aus den Newtonschen Relationen zwischen Potenzsummen und elementarsymmetrischen Funktionen, daß für $\nu = 3$ die erzeugende Funktion

$$F(s) = \frac{1}{6}(P(s))^3 - \frac{1}{2} P(s) P(2s) + \frac{1}{3} P(3s)$$

ist. Ferner für allgemeines ν, daß $F(s)$ die Summe endlich vieler Glieder der Form

$$\text{constans.}\, P(\varkappa_1 s) . P(\varkappa_2 s) \ldots P(\varkappa_\lambda s)$$

ist, wo

$$\nu = \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_\lambda$$

irgend eine Zerlegung von ν in positive ganzzahlige Summanden ist; hierbei hat insbesondere

$$P(s) P(s) \ldots P(s) = (P(s))^\nu$$

den Koeffizienten $\frac{1}{\nu!}$.

Da nun jede der Funktionen

$$P(2s),\ P(3s),\ \ldots$$

in G regulär und beschränkt ist, so ergeben (26) und die übrigen genannten Eigenschaften von $P(s)$ für die Funktion $F(s)$:

$F(s)$ ist im Gebiete G' exkl. $s = 1$ regulär; für

$$|t| \geqq 3,\ \sigma \geqq 1 - \frac{1}{c \log^9 |t|}$$

ist

(27) $$|F(s)| < D \log^9 |t|;$$

ferner gibt es in G reguläre Funktionen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_\nu(s)$, deren letzte $\varphi_\nu(s) = \frac{1}{\nu!}$ ist, derart, daß

(28) $$F(s) - \varphi_1(s) \log \frac{1}{s-1} - \cdots - \varphi_\nu(s) \log^\nu \frac{1}{s-1}$$

in G regulär ist.

Nun durchlaufe j die Zahlen, welche aus genau ν verschiedenen Primfaktoren bestehen. Dann ist nach bekannten[1]) Schlüssen

$$2\pi i \sum_{j \leqq x} \log \frac{x}{j} = \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} F(s)\, ds,$$

1) Vergl. Handbuch, S. 239.

bei gerader Bahn. Die bekannte[1]) Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes führt auf Grund der meinen üblichen Hilfssätzen analogen Relation (27) hier zu

$$2\pi i \sum_{j \leqq x} \log \frac{x}{j} = -\int_{\vartheta}^{1} \frac{x^s}{s^2} F(s)\, ds - \int_{1}^{\vartheta} \frac{x^s}{s^2} F(s)\, ds + O\left(x e^{-\sqrt[v]{\log x}}\right),$$

wo das erste Integral längs des oberen, das zweite längs des unteren Ufers des Schnittes erstreckt ist und v eine positive Konstante bezeichnet. Nun hat an entsprechenden Punkten beider Ufer $\log \frac{1}{s-1}$ unten den oberen Wert $+2\pi i$; daher ist, wenn $\log \frac{1}{s-1}$ den Wert oben bezeichnet und die Regularität von (28) in G benutzt wird,

$$2\pi i \sum_{j \leqq x} \log \frac{x}{j} = -\int_{\vartheta}^{1} \frac{x^s}{s^2} \left(\varphi_1(s) \log \frac{1}{s-1} + \cdots + \varphi_\nu(s) \log^\nu \frac{1}{s-1}\right) ds$$

$$+ \int_{\vartheta}^{1} \frac{x^s}{s^2} \left(\varphi_1(s)\left(\log \frac{1}{s-1} + 2\pi i\right) + \cdots + \varphi_\nu(s) \left(\log \frac{1}{s-1} + 2\pi i\right)^\nu\right) ds$$

$$+ O\left(x e^{-\sqrt[v]{\log x}}\right)$$

$$= \int_{\vartheta}^{1} \frac{x^s}{s^2} \left(\psi_0(s) + \cdots + \psi_{\nu-1}(s) \log^{\nu-1} \frac{1}{s-1}\right) ds + O\left(x e^{-\sqrt[v]{\log x}}\right),$$

wo $\psi_0(s), \ldots, \psi_{\nu-1}(s)$ in G reguläre Funktionen bezeichnen, von denen insbesondere

$$\psi_{\nu-1}(s) = \nu \varphi_\nu(s)\, 2\pi i$$
$$= \frac{2\pi i}{(\nu-1)!}$$

ist. Es kann auch der Nenner s^2 in die ψ hineingezogen werden; auch ist es bequem, $\log \frac{1}{1-s}$ statt $\log \frac{1}{s-1}$ einzuführen. Dadurch erhalte ich, wenn $\log \frac{1}{1-s}$ den positiven Wert bezeichnet, d. h.

$$\log \frac{1}{s-1} = \log \frac{1}{1-s} - \pi i$$

---

1) Vergl. Handbuch, S. 240—241; es handelt sich genau um den dort benutzten Integrationsweg. Ich will die Rechnungen, da sich nichts ändert, hier nicht reproduzieren, habe sie auch auf jenen S. 240—241 nicht ausgeführt, sondern dort auf die früheren S. 186—190 verwiesen.

gesetzt wird,

$$(29)\quad \begin{cases} \sum_{j \leqq x} \log \frac{x}{j} = \int_{\vartheta}^{1} x^s \left(\chi_0(s) + \cdots + \chi_{\nu-1}(s) \log^{\nu-1} \frac{1}{1-s}\right) ds \\ \qquad\qquad + O\left(x e^{-\sqrt[\nu]{\log x}}\right), \end{cases}$$

wo $\chi_0(s), \ldots, \chi_{\nu-1}(s)$ in G regulär sind und insbesondere

$$\chi_{\nu-1}(s) = \frac{\psi_{\nu-1}(s)}{s^2 2\pi i} = \frac{1}{(\nu-1)!\, s^2}$$

ist.

Wegen

$$O\left(x e^{-\sqrt[\nu]{\log x}}\right) = o\left(\frac{x}{\log^m x}\right)$$

bleibt das Integral rechts in (29) auf $o\left(\frac{x}{\log^m x}\right)$ genau abzuschätzen. Da jede der Funktionen $\chi_\alpha(s)$, wo $0 \leqq \alpha \leqq \nu - 1$ ist, im Gebiete G, also für $|s-1| \leqq 1-\vartheta$ regulär ist, ist $\chi_\alpha(s)$ insbesondere für $\vartheta \leqq s \leqq 1$ so darstellbar:

$$\chi_\alpha(s) = g_{\alpha 0} + g_{\alpha 1}(1-s) + \cdots + g_{\alpha m}(1-s)^m + \xi_\alpha(s),$$

wo die g Konstanten sind und die Funktion $\xi_\alpha(s)$ für $\vartheta \leqq s \leqq 1$ einer Ungleichung

$$|\xi_\alpha(s)| \leqq C_\alpha (1-s)^{m+1}$$

genügt. Speziell für $\alpha = \nu - 1$ ist

$$\chi_{\nu-1}(s) = \frac{1}{(\nu-1)!} + \frac{2}{(\nu-1)!}(1-s) + \cdots + \frac{m+1}{(\nu-1)!}(1-s)^m + \xi_{\nu-1}(s),$$

also für $0 \leqq \beta \leqq m$

$$g_{\nu-1,\beta} = \frac{\beta+1}{(\nu-1)!}.$$

Somit ist

$$\int_{\vartheta}^{1} x^s \left(\chi_0(s) + \cdots + \chi_{\nu-1}(s) \log^{\nu-1} \frac{1}{1-s}\right) ds = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \int_{\vartheta}^{1} x^s \chi_\alpha(s) \log^\alpha \frac{1}{1-s}\, ds$$

$$(30)\quad \begin{cases} = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{\beta=0}^{m} g_{\alpha\beta} \int_{\vartheta}^{1} x^s (1-s)^\beta \log^\alpha \frac{1}{1-s}\, ds \\ \quad + O \int_{\vartheta}^{1} x^s (1-s)^{m+1} \log^{\nu-1} \frac{1}{1-s}\, ds. \end{cases}$$

Um zunächst das Glied mit O zu erledigen, so ist es, weil die Funktion

$$(1-s)\log^{\nu-1}\frac{1}{1-s}$$

für $\vartheta \leqq s < 1$ beschränkt ist,

$$= O\int_{\vartheta}^{1} x^s (1-s)^m\, ds;$$

nun ist

$$\int_{\vartheta}^{1} x^s (1-s)^m\, ds = -\int_{1-\vartheta}^{0} x^{1-y} y^m\, dy$$

$$= x\int_{0}^{1-\vartheta} x^{-y} y^m\, dy$$

$$< x\int_{0}^{\infty} x^{-y} y^m\, dy$$

$$= x\int_{0}^{\infty} e^{-y\log x} y^m\, dy$$

$$= \frac{x}{\log^{m+1} x}\int_{0}^{\infty} e^{-z} z^m\, dz$$

$$= O\left(\frac{x}{\log^{m+1} x}\right)$$

$$(31) \qquad = o\left(\frac{x}{\log^m x}\right).$$

Aus (29), (30) und (31) folgt

$$(32) \qquad \sum_{j \leqq x} \log\frac{x}{j} = \sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\sum_{\beta=0}^{m} g_{\alpha\beta}\int_{\vartheta}^{1} x^s (1-s)^{\beta}\log^{\alpha}\frac{1}{1-s}\, ds + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right).$$

Nun ist

$$\int_{\vartheta}^{1} x^s (1-s)^{\beta}\log^{\alpha}\frac{1}{1-s}\, ds = -\int_{1-\vartheta}^{0} x^{1-y} y^{\beta}\log^{\alpha}\frac{1}{y}\, dy$$

$$= x\int_{0}^{1-\vartheta} e^{-y\log x} y^{\beta}\log^{\alpha}\frac{1}{y}\, dy$$

$$= \frac{x}{\log^{\beta+1} x}\int_{0}^{(1-\vartheta)\log x} e^{-z} z^{\beta}(\log\log x - \log z)^{\alpha}\, dz$$

$$= \frac{x}{\log^{\beta+1} x}\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}(\log\log x)^{\gamma}(-1)^{\alpha-\gamma}\int_{0}^{(1-\vartheta)\log x} e^{-z} z^{\beta}\log^{\alpha-\gamma} z\, dz.$$

Hierin ist

$$\int_0^{(1-\vartheta)\log x} e^{-z} z^\beta \log^{\alpha-\gamma} z\,dz = \int_0^\infty e^{-z} z^\beta \log^{\alpha-\gamma} z\,dz$$

$$+O\int_{(1-\vartheta)\log x}^\infty e^{-\frac{z}{2}}\,dz$$

$$= h_{\alpha\beta\gamma} + O\left(e^{-\frac{1-\vartheta}{2}\log x}\right)$$

$$= h_{\alpha\beta\gamma} + O\left(x^{-\frac{1-\vartheta}{2}}\right)$$

$$= h_{\alpha\beta\gamma} + o\left(\frac{1}{\log^m x}\right)^{1)};$$

daher ist

$$\int_\vartheta^1 x^s (1-s)^\beta \log^\alpha \frac{1}{1-s}\,ds = \frac{x}{\log^{\beta+1} x}\sum_{\gamma=0}^{\alpha} k_{\alpha\beta\gamma}(\log\log x)^\gamma + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right);^{2)}$$

wird dies in (32) eingesetzt, so kommt heraus:

$$(33)\qquad \sum_{j\leqq x}\log\frac{x}{j} = x\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=0}^{\nu-1} l_{ab}\frac{(\log\log x)^b}{\log^a x} + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right);^{3)}$$

hierbei ist insbesondere für $1\leqq a\leqq m$

$$l_{a,\nu-1} = g_{\nu-1,a-1}\,\Gamma(a)$$
$$= \frac{a}{(\nu-1)!}(a-1)!$$
$$= \frac{a!}{(\nu-1)!}.$$

---

1) Übrigens ist $h_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^{(\alpha-\gamma)}(\beta+1)$.

2) Übrigens ist

$$k_{\alpha\beta\gamma} = \binom{\alpha}{\gamma}(-1)^{\alpha-\gamma} h_{\alpha\beta\gamma} = \binom{\alpha}{\gamma}(-1)^{\alpha-\gamma}\Gamma^{(\alpha-\gamma)}(\beta+1).$$

3) Übrigens ist

$$l_{ab} = \sum_{\substack{\beta=a-1\\ \gamma=b\\ \gamma\leqq\alpha\leqq\nu-1}} g_{\alpha\beta}\,k_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\alpha=b}^{\nu-1} g_{\alpha,a-1}\,k_{\alpha,a-1,b}$$
$$= \sum_{\alpha=b}^{\nu-1} g_{\alpha,a-1}\binom{\alpha}{b}(-1)^{\alpha-b}\,\Gamma^{(\alpha-b)}(a).$$

Aus (33), wo $2m+2$ statt m geschrieben werden darf, folgt weiter

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\pi_\nu(u)}{u}\,du &= \int_1^x \frac{1}{u} \sum_{j \leqq u} 1\,du \\ &= \sum_{j \leqq x} \int_j^x \frac{du}{u} \\ &= \sum_{j \leqq x} \log\frac{x}{j} \\ &= \sum_{a=1}^{2m+2} \sum_{b=0}^{\nu-1} l_{ab} \frac{x(\log\log x)^b}{\log^a x} + o\left(\frac{x}{\log^{2m+2} x}\right)\end{aligned}$$

$$(34) \qquad = G(x) + o\left(\frac{x}{\log^{2m+2} x}\right),$$

wo die Doppelsumme kurz $= G(x)$ gesetzt ist.

Nun verstehe ich unter $\delta = \delta(x)$ die Funktion

$$\delta(x) = \frac{1}{\log^{m+1} x}.$$

Dann ist wegen

$$\frac{x+\delta x}{\log^{2m+2}(x+\delta x)} = O\left(\frac{x}{\log^{2m+2} x}\right)$$

nach (34)

$$\int_1^{x+\delta x} \frac{\pi_\nu(u)}{u}\,du = G(x+\delta x) + o\left(\frac{x}{\log^{2m+2} x}\right),$$

also durch Subtraktion

$$(35) \qquad \int_x^{x+\delta x} \frac{\pi_\nu(u)}{u}\,du = G(x+\delta x) - G(x) + o(\delta^2 x).$$

Nun ist wegen

$$\begin{aligned}\pi_\nu(x+\delta x) - \pi_\nu(x) &= \sum_{x < j \leqq x+\delta x} 1 \\ &\leqq \sum_{n=x+1}^{x+\delta x} 1 \\ &= O(\delta x)\end{aligned}$$

für $x \leqq u \leqq x+\delta x$ gleichmäßig

$$\pi_\nu(u) = \pi_\nu(x) + O(\delta x);$$

daher ist

$$\int_x^{x+\delta x} \frac{\pi_\nu(u)}{u}\,du = (\pi_\nu(x) + O(\delta x)) \int_x^{x+\delta x} \frac{du}{u}$$

$$= (\pi_\nu(x) + O(\delta x)) \log(1+\delta)$$

$$= (\pi_\nu(x) + O(\delta x))(\delta + O(\delta^2))$$

(36) $$= \delta \pi_\nu(x) + O(\delta^2 x).$$

Andererseits ist nach dem Taylorschen Satz

$$G(x+\delta x) - G(x) = \delta x\, G'(x) + \frac{\delta^2 x^2}{2} G''(x + \Theta \delta x)$$

$$(0 < \Theta = \Theta(x) < 1)$$

und

$$G'(x) = \sum_{a=1}^{2m+2} \sum_{b=0}^{\nu-1} l_{ab} \left(\frac{(\log\log x)^b}{\log^a x} + \frac{b(\log\log x)^{b-1}}{\log^{a+1} x} - \frac{a(\log\log x)^b}{\log^{a+1} x} \right)$$

$$= \sum_{a=1}^{2m+3} \sum_{b=0}^{\nu-1} q_{ab} \frac{(\log\log x)^b}{\log^a x},$$ [1])

$$G''(x) = O\left(\frac{(\log\log x)^{\nu-1}}{x \log^2 x} \right)$$

$$= o\left(\frac{1}{x}\right),$$

also

(37) $$G(x+\delta x) - G(x) = \delta x \sum_{a=1}^{2m+3} \sum_{b=0}^{\nu-1} q_{ab} \frac{(\log\log x)^b}{\log^a x} + o(\delta^2 x).$$

Aus (35), (36) und (37) folgt

$$\pi_\nu(x) = \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta x} \frac{\pi_\nu(u)}{u}\,du + O(\delta x)$$

$$= \frac{1}{\delta}(G(x+\delta x) - G(x)) + o(\delta x) + O(\delta x)$$

$$= x \sum_{a=1}^{2m+3} \sum_{b=0}^{\nu-1} q_{ab} \frac{(\log\log x)^b}{\log^a x} + O\left(\frac{x}{\log^{m+1} x}\right)$$

$$= x \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=0}^{\nu-1} q_{ab} \frac{(\log\log x)^b}{\log^a x} + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right).$$

---

1) Übrigens ist $q_{ab} = l_{ab} + (b+1)\, l_{a-1,b+1} - (a-1)\, l_{a-1,b}$, wo die l mit erstem Index 0 oder zweitem Index ν Null bedeuten.

Hierin ist speziell für $1 \leqq a \leqq m$

$$\begin{aligned} q_{a,\nu-1} &= l_{a,\nu-1} - (a-1)\, l_{a-1,\nu-1} \\ &= \frac{a!}{(\nu-1)!} - (a-1)\frac{(a-1)!}{(\nu-1)!} \\ &= \frac{(a-1)!}{(\nu-1)!}. \end{aligned}$$

Damit ist (10) bewiesen.

§ 4.

Es ist $\sigma_\nu(x)$ die Anzahl der Zahlen $p_1 \ldots p_\nu \leqq x$, wobei mehrfache Primfaktoren auftreten dürfen. Diese Zahlenklasse zerfällt in endlich viele Unterabteilungen von Zahlen $p_1^{\alpha_1} \ldots p_\mu^{\alpha_\mu}$, wo $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_\mu > 0$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\mu = \nu$ ist und $p_1, \ldots, p_\mu$ verschieden sind. Die einer einzelnen solchen Klasse entsprechende erzeugende Funktion ist auf Grund der Formeln, welche eine beliebige symmetrische Funktion durch die Potenzsummen ausdrücken, additiv aus endlich vielen Summanden der Gestalt

$$\text{constans.}\ P(\varkappa_1 s)\, P(\varkappa_2 s) \ldots P(\varkappa_\lambda s)$$

zusammengesetzt, wo $\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_\lambda = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\mu = \nu$ ist und die $\varkappa$ durch eventuelle Weiterteilung in die α zerlegbar sind. Im ganzen ist also die zu $\sigma_\nu(x)$ gehörige erzeugende Funktion $F(s)$ aus endlich vielen Funktionen dieser Gestalt zusammengesetzt, wobei $(P(s))^\nu$ genau den Koeffizienten $\frac{1}{\nu!}$ hat. $F(s)$ erfüllt also genau dieselben Bedingungen wie das alte $F(s)$ in § 3; daher ergibt sich die Endformel

$$\sigma_\nu(x) = x \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=0}^{\nu-1} r_{ab} \frac{(\log\log x)^b}{\log^a x} + o\left(\frac{x}{\log^m x}\right),$$

wo für $1 \leqq a \leqq m$

$$\begin{aligned} r_{a,\nu-1} &= q_{a,\nu-1} \\ &= \frac{(a-1)!}{(\nu-1)!} \end{aligned}$$

ist.

Für die Funktion $\varrho_\nu(x)$, welche die Anzahl der Zahlen $p_1^{b_1} \ldots p_\nu^{b_\nu} \leqq x$ mit verschiedenen $p_1 \ldots p_\nu$ und beliebigen positiven $b_1, \ldots, b_\nu$ angibt, ist nur der erste Ansatz etwas anders zu machen. Für jedes feste System $b_1, \ldots, b_\nu$ folgt genau wie oben, daß die erzeugende Funktion aus endlich vielen Gliedern der Gestalt

$$\text{constans.}\ P(\varkappa_1 s) \ldots P(\varkappa_\lambda s)$$

zusammengesetzt ist, wo die $\varkappa$ durch Zusammenlegung der b entstehen. Wird nun über alle unendlich vielen Wertsysteme $b_1, \ldots, b_\nu$ summiert, so ergibt sich ohne Konvergenzschwierigkeit, daß auch die zu $\varrho_\nu(x)$ gehörige erzeugende Funktion $F(s)$ die Gestalt

$$\frac{1}{\nu!}(P(s))^\nu + Q_{\nu-1}(s)(P(s))^{\nu-1} + \cdots + Q_1(s)P(s) + Q_0(s)$$

hat, wo $Q_0(s), \ldots, Q_{\nu-1}(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ absolut konvergente Dirichletsche Reihen sind [1]). Somit kommt für $\varrho_\nu(x)$ auch wörtlich dieselbe Endformel heraus wie für $\pi_\nu(x)$ und $\sigma_\nu(x)$.

---

1) Zum Beispiel ist für $\nu = 1$

$$F_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{1}{p^{ns}} = P(s) + \sum_{n=2}^{\infty} P(ns) = P(s) + Q(s),$$

für $\nu = 2$

$$F_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{\substack{p,q \\ p<q}} \frac{1}{p^{ns}} \frac{1}{q^{Ns}} = \frac{1}{2}\left(F_1(s)F_1(s) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_p \frac{n-1}{p^{ns}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(P(s) + Q(s))^2 - \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \sum_p \frac{n-1}{p^{ns}} = \frac{1}{2}(P(s))^2 + Q(s)P(s) + Q_0(s).$$

Über den Anteil der direkten Strahlung an der Temperaturperiode der Luft in niedrigen und mittleren Höhen der Troposphäre.

Von

Dr. **Kurt Wegener**.

Vorgelegt von Herrn Wiechert in der Sitzung vom 17. Juni 1911.

Mit 6 Figuren.

Bei den Beobachtungen über die tägliche Periode der Lufttemperatur über See war man zu dem Schluß gekommen, daß die Lufttemperatur eine Tagesschwankung aufweise, die größer sei als die der Meeresoberfläche selbst (Segelhandbuch für den stillen Ozean, Hamburg, (Friedrichsen 1897), p. 187 flgd.).

Der Überschuß über die Temperatur-Amplitude der Meeresoberfläche kann nicht, wie sonst die tägliche Schwankung der Temperatur in der Nähe der Erdoberfläche, aus der Temperatur-Abhängigkeit von dieser her durch Temperaturleitung erklärt werden, sondern nur noch durch selbständige Strahlungsabsorption und Emission der Luft selbst. Bei dem Versuch, in Samoa die Fortsetzung dieser täglichen Periode in größerer Höhe über der See zu ermitteln, kam ich zu Ergebnissen, die eine kritische Betrachtung der bisherigen Resultate notwendig machten, und ein Eingehen auf diejenige Temperaturperiode der Luft, die durch Temperaturleitung vom Erdboden her hervorgerufen wird.

I. Tagesschwankung der Temperatur über Land.

Die Periodische Schwankung der Lufttemperatur über einem kontinentalen Beobachtungsorte ist für die verschiedensten Bedingungen in den untersten Höhenmetern bereits im wesentlichen bekannt.

Lückenhafter sind unsere Kenntnisse, sobald wir uns nicht auf die untersten 2 m der Lufthülle der Erde beschränken, sondern im Sinne einer dreidimensionalen Meteorologie größere Höhen mit in Frage ziehen.

Hier ist erst neuerdings, nachdem die Berg-Stationen wichtige Beiträge geliefert hatten, wesentliches Material durch das Kgl. Aeronautische Observatorium geschaffen worden. Hauptsächlich ist dasselbe in den Publikationen der Jahre 1906 und 1907 enthalten[1]).

In diesen Jahren wurden nämlich Serien-Aufstiege ausgeführt, die die Änderungen der meteorologischen Elemente in verschiedenen Höhen und unter verschiedenen Witterungsbedingungen kontinuierlich zu verfolgen gestatten. Der Diskussion dieser Serien-Aufstiege seien einige andere Betrachtungen vorausgeschickt.

Theoretisches.

Die früheren zweidimensionalen Beobachtungen hatten gezeigt, daß im Laufe der Nacht bis Morgens kurz nach Sonnenaufgang Abkühlung der Luft eintritt. Dann erfolgt eine mäßige Zunahme der Temperatur, und hierauf beginnen, superponiert über dauerndem Anstieg, rasche Schwankungen.

Theoretische Überlegungen haben die Erklärung der letzteren geliefert, und die ersten Drachen- und Ballon-Aufstiege den praktischen Beweis für die angenommene Deutung erbracht.

Führen wir eine Luftmenge adiabatisch, d. h. ohne ihr Wärme zuzuführen oder zu entziehen, in die Höhe, so wird sich ihre Temperatur und relative Feuchtigkeit, um die beiden hauptsächlichsten Elemente zu nennen, mit dem Luftdruck ändern[2]). Bei trockener Luft wird die Temperatur um rund 1^0 pro hundert Meter Erhebung sinken, bei kondensierender infolge der frei werdenden Kondensationswärme um 0.5^0—1.0^0, je nach der Ausgangstemperatur.

In den Fällen nun, in welchen in einer Luftschicht die betrachtete, adiabatisch auf- oder niedersteigende Gewichtsmenge

---

1) Ergebnisse d. Arbeiten d. Kgl. Preuß. Aeronaut. Observ. b. Lindenberg i. J. 1906 (bzw. 1907) II. Band, (bzw. III. Band) herausgegeben von Dr. R. Aßmann, Braunschweig, Druck von Fried. Vieweg u. Sohn 1908 (09).

2) Vgl. gesammelte Abhdlg. aus d. Gebieten d. Meteorologie und des Erdmagnetismus von W. v. Bezold (in Gemeinschaft mit A. Coym) Braunschweig, Vieweg u. Sohn 1906: Zur Thermodynamik d. Atmosphäre, S. 91 und folgende.

Luft in jeder Höhe, in die sie adiabatisch gebracht wird, die gleiche Temperatur und relative Feuchtigkeit vorfindet, die sie selbst in dieser Höhe aufweist, nennen wir das Gefälle der Schicht adiabatisch; eine solche Schicht ist homogen, wir können sie beliebig durcheinander rühren, ohne daß in irgend einer Höhe sich Temperatur oder relative Feuchtigkeit ändern. Sie ist in indifferentem Gleichgewicht, d. h. jedes Luftteilchen ist, wohin wir es auch in der Vertikalen bewegen, infolge adiabatischer Änderung im Gleichgewicht mit seiner Umgebung.

Tritt Kondensation oder Wolkenbildung ein, so kann in einer Schicht, deren Luftmassen durcheinander gerührt werden, das indifferente Gleichgewicht und adiabatische Gefälle nur dann erhalten bleiben, wenn die freiwerdenden Tropfen mitgeführt werden. Streng wird das nur selten der Fall sein. Innerhalb der Wolke ist das Temperaturgefälle bei adiabatischer Schichtung das der Kondensations-Adiabate [1]).

Ist das Gefälle der Schicht mit der Höhe geringer als das der Adiabate, so ist die Schicht stabil: jedes Luftteilchen, das wir abwärts führen, bekommt infolge adiabatischer Kompression höhere Temperatur als seine Nachbarschaft und strebt wieder empor; jedes Luftteilchen, das wir aufwärts bewegen, erhält niedrigere Temperatur als seine Nachbarschaft und sinkt wieder herab.

Ein dritter Fall ist der, daß das Gefälle in einer Schicht stärker als das der Adiabate ist; in diesem Fall wird dynamisch labiles Gleichgewicht herrschen, und sobald wir ein Luftteilchen nur um ein Geringes aufwärts bewegen, wird es überall leichter, weil wärmer als seine Umgebung sein und daher bis an das Ende der Schicht weiter steigen.

Geringe Vertikalbewegungen sind stets in der Luft vorhanden, teils infolge advektiver Vorgänge, teils in turbulenter Form infolge der Reibung der Luft an der Erde, und zum Teil infolge der Wellenbewegungen, die an der Begrenzungsfläche zweier Luft-Schichten sich bilden.

Es scheint daher zweckmäßig, anzunehmen, daß das adiabatische Gefälle nur um ein geringes Maß überschritten zu werden braucht, um die wärmere Luft unten zum Aufsteigen zu veranlassen, und ein neues adiabatisches (bzw. indifferentes) oder stabiles Gleichgewicht herbeizuführen [2]). Es ist aber notwendig, sich

1) Siehe vorige Seite Anmerkung 2.

2) v. Bezold beschränkt sich im wesentlichen darauf, die Änderungen zu verfolgen, die sich in einer auf- und niedersteigenden Gewichtsmenge Luft selbst

zu vergegenwärtigen, daß aus 2 Gründen ein labiles Gleichgewicht bestehen bleiben kann. Einmal nämlich, wenn nicht genügende Bewegung vorhanden ist, um die Auslösung eintreten zu lassen, und ferner in dem Fall, daß die Ursache der Labilität (z. B. Erhitzung der Luft am Erdboden) weiter wirkt.

Der vierte, letzte Fall, der für die Schichtung der Luftvolumina übereinander denkbar ist, ist der des mechanisch labilen Gleichgewichtes.

Erwärmen wir die Luft an einer Stelle der Luftsäule so weit, daß sie trotz des höheren Luftdruckes, dem sie ausgesetzt ist, geringere Dichte aufweist als die darüber liegende, so muß sofort, auch bei ganz ruhiger Luft, eine Bewegung eintreten, und die überhitzte Luft emporsteigen $\left(\frac{\Delta t}{\Delta h} > 0.03\ {}^0/\mathrm{m}\right)$. Das mechanisch labile Gleichgewicht kann also nur gerade erreicht werden, und bildet nur einen Grenzfall.

In der Fachliteratur scheint bei einigen Autoren die Meinung zu herrschen, daß dieser Fall häufig vorkomme, und oft, wenn nicht immer, die Voraussetzung für den vertikalen Luftaustausch gebe.

Nach Analogien kann man aber vermuten, daß diese Meinung nicht zutreffend ist; zumal instrumentelle Bedenken es erschweren, sie nachzuweisen.

Auch das beste Temperatur-Meßinstrument, gleichviel ob Thermograph oder Thermometer, vermag nur näherungsweise die Lufttemperatur anzugeben, weil seine eigene Temperatur außer von der umgebenden Luft auch durch die Strahlung der umgebenden Flächen bestimmt wird.

Dies muß dahin führen, daß die Temperaturmessung in der Nähe der Erdoberfläche infolge zu geringer Ventilation stärker verfälscht wird, als in der Höhe; so wird das scheinbare (gemessene) Temperaturgefälle größer als das wirkliche.

Aus dieser Erwägung, den aufgezeichneten Registrierungen und Beobachtungen sowie praktischer Erfahrung heraus möchte ich glauben, daß oberhalb 100 m in der freien Atmosphäre ein mechanisch labiles Gleichgewicht nicht mehr vorkommt; in den unteren 10 Metern mag es, wenn der Nachweis hierfür auch schwierig ist, mitunter erreicht werden. Daß es aber um ein beträchtliches überschritten wird, wie vereinzelte Autoren angeben, ist

---

vollziehen. Unsere hydrodynamischen Überlegungen decken sich daher nicht völlig mit seinen thermodynamischen.

ohne weiteres ebenso wenig wahrscheinlich, wie eine auf Wasser schwimmende Quecksilberschicht. Es müßte bei solcher Behauptung von dem Beobachter wohl erst der Nachweis geführt werden, wie groß der stets vorhandene Strahlungsfehler der Instrumente war, ein Nachweis, der aber schwer fallen dürfte.

Bei der Bearbeitung von Drachenaufstiegen hat man ziemlich allgemein angenommen, daß diejenige Windgeschwindigkeit, die der Drache braucht, um überhaupt zu steigen (6 m/s), auch zur Ventilation des Thermographen ausreicht: bei keinem Drachenaufstiege, den ich in Europa ausgeführt habe, ergaben sich Unwahrscheinlichkeiten in den Kurven, die auf mangelnde Ventilation hätten zurückgeführt werden müssen. Indessen ist es nicht sicher, daß diese Ventilationsgröße von 6 m/s auch in den Tropen mit ihrer stärkeren Insolation unter allen Umständen völlig ausreicht. Unter den von mir in Samoa gesammelten Kurven befinden sich jedenfalls 3, bei denen ein Strahlungsfehler nicht ausgeschlossen ist, und zwar am 18. II., 7. VII. und 5. VIII. 1910. In allen 3 Fällen konstatiert die Kurve beim Aufstieg über der Passatschicht eine Temperatur-Umkehr, d. h. vorübergehende Zunahme der Temperatur mit der Höhe, die beim unmittelbar folgenden Abstieg ganz oder teilweise verschwunden ist, ohne daß von Wellenbewegung die Rede sein könnte.

Die Gefahr, die hieraus für eine Bearbeitung erwächst, ist allerdings nicht sehr groß, da die verdächtigen Fälle leicht erkannt und ausgemerzt werden können.

Am größten dürfte der Fehler der Auswertung in den untersten 20—50 m sein, weil an den meisten Drachenstationen die Ventilation des Instrumentes beim Vergleich mit einem Normal-Instrument (Basisbestimmung) an der Erde zu gering ist[1]).

Aus allen Gründen empfiehlt es sich, einstweilen anzunehmen, daß bei vertikalem Luftaustausch, der ein neues stabiles oder indifferentes Gleichgewicht der Luft anstrebt, ein nur mäßig überadiabatisches Gefälle, oder dynamisch-labiles Gleichgewicht herrscht, und zunächst von den Vorgängen abzusehen, die in unmittelbarer Nähe der Erde möglicherweise infolge mechanisch-labiler, aber nur schwer einwandfrei nachweisbarer Schichtung entstehen.

Einen gewissen Anhaltspunkt für das praktisch maximal mögliche Temperaturgefälle liefern auch die Beobachtungen der Temperaturschwankungen auf hohen Türmen, oder bei Drachen-

1) In Lindenberg wird das Dracheninstrument aus diesem Grunde mit einem kräftigen Ventilator verbunden, wenn der Standvergleich (Basis) vorgenommen wird.

oder Ballon-Aufstiegen. Gesetzt, es bestände ein Temperaturgefälle von 2.5 °/100 m bis 100 m Höhe, und darüber ein überadiabatisches von 1.5 °/100 m, so hätten wir in 500 m Höhe eine um 8.5° niedrigere Temperatur als am Erdboden. Eine von letzterem bis zu dieser Station emporsteigende Luftmasse hätte also um 3.3° höhere Temperatur als die Luft dort (bei adiabatischem Aufsteigen), eine aus 1000 m Höhe herabsinkende um 2.5° tiefere. Die gesamte Schwankung der Temperatur in 500 m Höhe wäre also 5°.8 unter den gemachten Annahmen. Wenn nun die unperiodische Temperaturschwankung während des vertikalen Luftaustausches in 500 m Höhe geringer gefunden wird als 5.8°, während sich der vertikale Luftaustausch zwischen 1000 m und dem Erdboden vollzieht, so sind wir gezwungen, anzunehmen, daß entweder das tatsächliche Temperaturgefälle geringer als das angenommene ist, oder daß das Auf- und Absteigen der Luft im vertikalen Luftaustausch unter merklicher Änderung des Wärmegehalts (= nicht adiabatisch) erfolgt.

Tatsächlich überschreiten die Temperaturschwankungen in 500 m Höhe, nach Beobachtungen auf hohen Türmen und mit Drachen und Ballons im Allgemeinen nicht 2° [1]); das würde einem mittleren Temperaturgefälle zwischen Erdboden und 1000 m von 0.012 °/m (also nur wenig überadiabatisch), entsprechen.

Für ein stärkeres Temperaturgefälle würden einmal die absoluten, unten und oben häufig beobachteten Werte der Temperatur sprechen, die indessen aus weiter oben genannten Gründen nur in

---

1) Abgesehen von Wogenbewegungen. Um zu zeigen, wie groß die Temperaturschwankungen bei trockener Luft in einer bestimmten Höhe ausfallen, je nach dem vorhandenen Temperaturgefälle und der Höhenerstreckung, über die, von der betrachteten konstanten Höhe aus gerechnet, die Volumina sich auf und nieder bewegen, sei eine kleine Tabelle mitgeteilt.

Tabelle der Temperaturschwankung.

Höhenschwankung \ Temperaturgefälle °/m	0.020°	0.015°	0.010°	0.005°	0.00°	— 0.005°
± 100 m	2.0	1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
± 200 m	4.0	2.0	0.0	2.0	4.0	6.0
± 300 m	6.0	3.0	0.0	3.0	6.0	9.0

Bei einem Gefälle von > 0.01 °/m ist im allgemeinen der vertikale Luftaustausch, bei < 0.01 °/m Wellenbildung die Ursache der Temperaturschwankung.

beschränktem Maße als beweiskräftig gelten können, und ferner die Annahme, daß das Auf- und Niedersteigen der Luft im vertikalen Luftaustausch unter merklicher Änderung des Wärmegehaltes erfolgt.

Eine Wärmezufuhr bei einer Höhenänderung könnte infolge Reibung erfolgen. Reibung von Luft gegen Luft ist nun aber sehr gering, auch befinden sich nach den Erfahrungen der Luftschiffer schon in Höhen von 100 m und 200 m Volumina von der Größenordnung 10^3 bis 10^4 m^3 in gemeinsamer Bewegung, wobei also nur an den Außenflächen des Volumens eine Erwärmung durch Reibung eintreten könnte; endlich wirkt die Reibung bei beiden Richtungen der Bewegung, nach oben und nach unten, im gleichen Sinne, und kann nur eine Erhöhung der gesamten Temperatur, aber keine Veränderung der Temperaturschwankung herbeiführen. Wir werden daher von einer Erwärmung der Luft durch Reibung gänzlich absehen können.

Die zweite Möglichkeit wäre die einer Änderung des Verhältnisses absorbierte/emittierte Strahlung. Wie wir weiter unten sehen werden, ist aber schon die Messung der Temperaturänderung, die in 12 Stunden durch Änderung dieses Strahlungsverhältnisses in einer ruhenden Luftmasse eintritt, wegen der Kleinheit des Faktors mit Schwierigkeiten verknüpft; in dem Durcheinander des vertikalen Luftaustausches mit seinen erfahrungsgemäß erheblichen Vertikalgeschwindigkeiten kann also die Änderung des Strahlungsverhältnisses während der kurzen Zeit einer Vertikalbewegung sich nicht mehr in meßbarer Weise bemerkbar machen.

Endlich müßte noch erwogen werden, ob vielleicht durch Temperatur**leitung** der Temperatur-Unterschied eines auf- oder niedersteigenden Volumens gegen seine Nachbarschaft ausgeglichen werden könnte. Auch hier ist zunächst zu erwägen, daß die Leitfähigkeit der Luft für Temperatur äußerst gering ist[1]), sowie,

---

1) 0.173 cm/sek. bei 760 mm Luftdruck; vgl. Hann, Lehrbuch d. Meteorologie II. Aufl., Leipzig 1906, (Tauchnitz), S. 10; die Geschwindigkeit, mit der sich die Temperaturänderungen fortpflanzen, ist: $v = 2\sqrt{\pi . \varkappa . \tau}$, wo $\varkappa$ = Temperatur-(nicht Wärme-)leitungs-Koeffizient, τ = Dauer der Periode; für die 16stündige Winternacht ergibt sich dann, daß die Abkühlung vom Boden durch Temperaturleitung bis $3^1/_2$ m, in einer 8stündigen Sommernacht bis $2^1/_2$ m hinaufgetragen wird, was äußerst wenig ist.

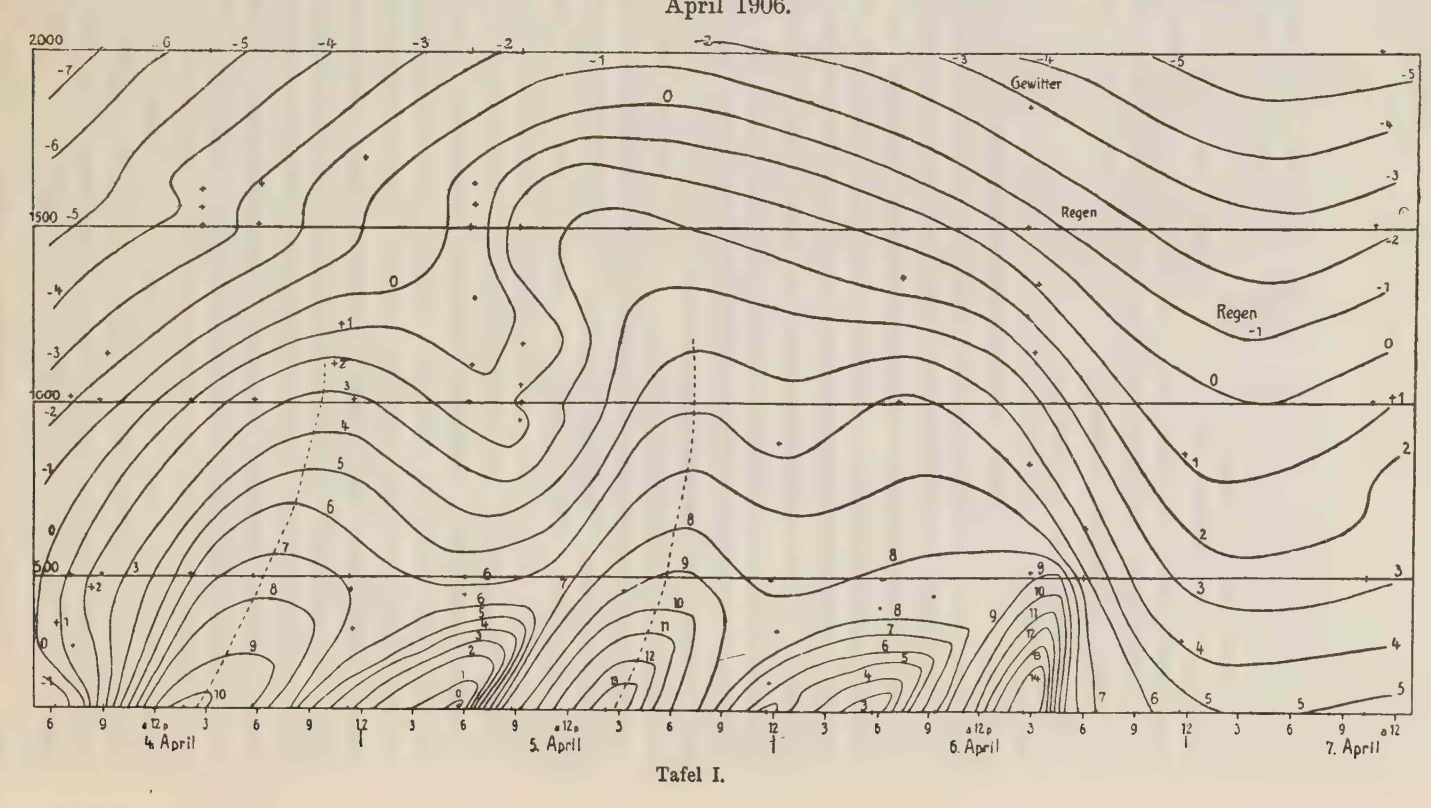
daß es sich beim Auf- und Niedersteigen nicht um dünne Luftfäden, sondern um ziemlich kompakte Volumina von erheblicher Größe handelt, an deren äußerer Begrenzungsfläche allein die Temperaturleitung sich geltend machen kann. Da nun auch die praktische Erfahrung im freifliegenden Ballon gezeigt hat, daß Vertikalgeschwindigkeiten von 4—5 m/s dieser einheitlichen Volumina über Höhenerstreckungen von der Größenordnung 500 m im vertikalen Luftaustausch nichts ungewöhnliches sind, so kann man sich wohl für berechtigt halten, angesichts der Größe der Volumina und der Geschwindigkeit ihres Auf- bzw. Niedersteigens die Temperaturleitung während des Auf- bzw. Abstieges zu vernachlässigen.

Eine Wärmegehaltsänderung der auf- oder niedersteigenden Luft darf hiernach, wohlbemerkt im vertikalen Luftaustausch, vernachlässigt werden.

Das Spiel der auf- und niedersteigenden Volumina beginnt kurz nach Sonnenaufgang über dem Erdboden, sich in die Höhe allmählich fortpflanzend. Es erreicht sein Maximum gegen 4^p. Zu dieser Zeit beginnt es in der Nähe des Erdbodens zu erlöschen, während es in der Höhe, je nach der Wetterlage wechselnd, noch einige Zeit, mitunter bis spät in die Nacht hinein, schwach fortdauert. Die Höhen, bis zu denen es sich erstreckt, sind von Fall zu Fall sehr verschieden, und in erster Reihe eine Funktion des in der untersten Luftschicht vorhandenen Temperaturgefälles. Im Winter reicht es selten bis 1000 m, im Sommer kann es sich gelegentlich bis 6 und 8000 m erstrecken, unter Durchbrechung der Schichten zwischen 2 und 4000 m, die mit ihrem langsamen Temperaturgefälle im Bereich der Hochdruckgebiete meist die obere Grenze der Vertikalbewegungen bilden.

Die Lindenberger Registrierungen.

In Tafel I und II sind 2 der Lindenberger Beobachtungsreihen in Form von graphischen Tabellen mitgeteilt, mit Zeit als Abszisse und Höhe als Ordinate. Die eingezeichneten Kurven sind Linien gleicher Temperatur.


April 1906.
2000
1500
1000
500
Gewitter
Regen
Regen
4. April
5. April
6. April
7. April

Tafel I.

Juli 1906.

Tafel II.

Die Kurven zeigen deutlich, daß im wesentlichen die tägliche Periode der Lufttemperatur von der Temperaturschwankung der Erde herrührt, die ihrerseits wieder auf periodische und unperiodische Schwankungen des Verhältnisses absorbierte/emittierte Strahlung der Erdoberfläche zurückzuführen ist. Dieses Strahlungsverhältnis hängt bis zu gewissem Maße, außer von dem Wechsel der hauptsächlich strahlenden Flächen (Sonne und kaltes Firmament) von der Strahlungsdurchlässigkeit der Luft (Wolken, Dunst) ab.

Die Lufttemperatur ist nach den Kurven offenbar nicht eine Funktion der direkt empfangenen und abgegebenen Strahlung, sondern durch Temperatur-Leitung von der Erde her bedingt. Nur so läßt es sich erklären, daß die Abkühlung und Erwärmung langsam von der Erde her nach oben vordringt, wie hier die Kurven zeigen.

Am 4. April heben sich infolge Erwärmung des Bodens, deren Maximum zwischen 12^h und 3^h Nachmittags erreicht ist, die Isothermen bis über 1000 m noch merklich; die folgende Abkühlung — am 5. April liegt das Minimum am Boden zwischen 3^h und 6^h Morgens, — dringt offenbar nur bis 450 m Höhe empor; am 6. April bis 400 m, am 4. Juli bis 400 m, am 5. Juli bis 350 m, am 6. Juli bis 400 m. Da der Beobachtungsort (Lindenberg) selbst 120 m hoch gelegen ist, kann man schon auf Grund dieser wenigen Beobachtungen sagen, daß sich die nächtliche Abkühlung im Sommer auf rund 300 m erstreckt. Im Winter, wo die Ausstrahlung der Erde längere Zeit hindurch tätig ist, wird man rund 500 m als mittlere Höhe, bis in die sich die Abkühlung erstreckt, nennen dürfen.

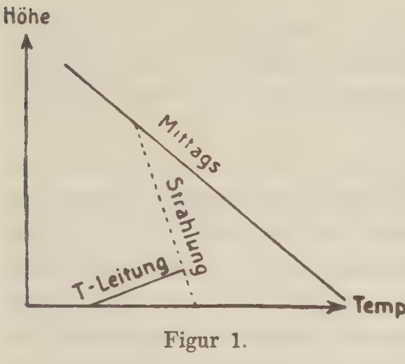
Der Wert ist ungefähr der hundertfache von dem, welcher bei gänzlich ruhender Luft nach den physikalischen Gesetzen der Temperaturleitung erwartet werden sollte (ca. 3 m). In Wirklichkeit sind nun allerdings stets Wellen und Turbulenzbewegungen vorhanden, durch die die Abkühlung in größere Höhen hinaufgetragen wird; immerhin ist es naheliegend, bei einer so großen Differenz zwischen theoretischem Postulat und Beobachtung noch nach anderen Erklärungen zu suchen.

Hann (l. c. S. 59) sagt über den Vorgang folgendes:

„Die Abkühlung der Unterlage pflanzt sich in die darüberliegenden Luftschichten zunächst durch Leitung fort, nur daß man dabei mit der Temperaturleitung der Luft, statt mit jener des Bodens zu rechnen hat. Dazu kommt dann noch die Wärmestrahlung der Luft selbst gegen den erkalteten Erdboden,

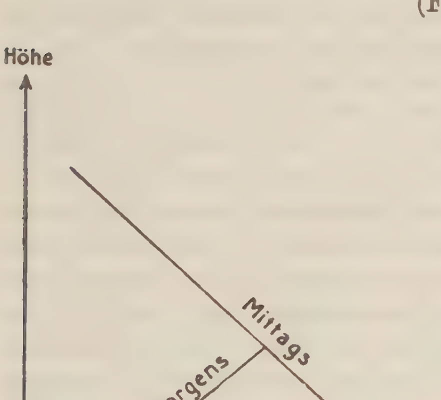
wodurch die Fortpflanzung der Erkaltung in die höheren Luftschichten wesentlich gefördert wird, denn die Leitung allein kann sich in der Nacht nur auf Luftschichten von wenigen Metern Mächtigkeit erstrecken."

In der Tat übt die Luft eine Selektion der Strahlung aus und absorbiert verhältnismäßig stark dunkle Strahlung von bestimmter Wellenlänge. Soll diese Strahlungswirkung sich aber bemerkbar machen, so muß ungefähr folgende Zustandskurve zustande kommen (Figur 1):



Figur 1.

Wir müssen zwei Knicke in der Morgenkurve erwarten, indem einmal die Strahlung dahin wirkt, die Luftsäule bis in größere Höhe abzukühlen, wozu noch die Temperaturleitung vom Erdboden her tritt, die die bekannte Kurve erzeugt. Die wirklichen Beobachtungskurven stimmen hiermit nicht überein und zeigen vielmehr einen einzigen starken Knick (Figur 2).



Figur 2.

Dem Einwand, der eventuell erhoben werden könnte, daß die Strahlung in der Weise wirkt, daß sie die der Erde benachbarten Luftteilchen zunächst, und die darüber liegenden Teilchen nur durch Strahlungsaustausch sekundär von den unteren Luftteilchen her abkühlt, müßte erwidert werden, daß der Strahlungsaustausch zwischen benachbarten Luftteilchen eben als Temperaturleitung bezeichnet wird, und daß die bekannte Kleinheit dieses Faktors gerade zu einem anderen Erklärungsversuch Anlaß gab.

Die Strahlungsabsorption können wir uns vielmehr nur so denken, daß die Luft einen Teil der Strahlung durchläßt, der immer weiter von den ihr überlagerten Luftschichten absorbiert wird. Bis zu der Höhe, in welche überhaupt noch Strahlung von der bestimmten Wellenlänge durchgelassen wird, muß auch die

Änderung bzw. Abnahme der Temperatur in der Nacht reichen. Aber weder ist die Höhe konstant, noch ist die Form der dann notwendigen Zustandskurven übereinstimmend mit der Beobachtung.

Unter diesen Umständen scheint es uns zweckmäßig, auf den Erklärungsversuch des Phänomens durch Wärmestrahlung zunächst zu verzichten, und einstweilen anzunehmen, daß im Wesentlichen [1]) durch Turbulenz und Wellenbewegung die Abkühlung in so erhebliche Höhen hinaufgetragen wird. Im übrigen darf nicht übersehen werden, daß gerade in der Nacht die Unterschiede der Luftbewegung zwischen oben und unten eine bemerkenswerte Größe erreichen und sicherlich ganz regelmäßig starke Wogenbewegungen hervorrufen, vermutlich sogar Brandungs- und Mischungsvorgänge, indem die untere Luftschicht zur ungestörten Wogenentwickelung zu flach ist.

Wie wenig die Erwärmung der Atmosphäre dagegen an die Erde gefesselt ist, zeigt sich auf den Kurven am markantesten am 4. Juli, an welchem Datum wir die Isothermen bis 2000 m hochbiegen sehen. Das überadiabatische Gefälle ruft an diesem Tage Gewitter hervor. Das gleiche tritt am 5. Juli ein, nur sehen wir am Ende des 5. Juli die Isothermen merklich, vermutlich infolge des Gewitters, sinken. Offenbar wird hier die Abkühlung der Luftsäule wesentlich durch den Regen hervorgerufen, der aus größeren Höhen kommend, die Temperatur in gewisser Annäherung mitbringt, die er dort gehabt hat. Am 6. April sehen wir zwar wieder Gewitter eintreten, aber hier ist umgekehrt das Gewitter eine Folge des Herabsteigens der Isothermen: indem sich kältere Luftmassen über die unteren, und abwechselnd vom Erdboden her erhitzen und abgekühlten Schichten schieben, entsteht überadiabatisches oder dynamisch-labiles Temperaturgefälle, das Nachmittags unter dem Einfluß der Erhitzung der erdnahen Luft in einem Gewitter ausgeglichen wird. Bei dem folgenden Regenwetter, am 7. April, kann eine tägliche Periode nicht zur Geltung kommen.

Bei einer aufmerksamen Betrachtung der Kurven will es scheinen, als ob auch in größeren Höhen eine, wenn auch nur kleine, periodische Temperaturschwankung, bzw. Heben und Senken der Isothermen, und zwar um 100—200 m, korrespondierend etwa 1^0 Temperaturschwankung, zwischen Tag und Nacht eintritt. Diese Periode, die natürlich lediglich eine Strahlungsperiode

---

1) Einen weiteren geringen Faktor, die Diffusion des Wasserdampfes, wollen wir vernachlässigen.

im Gegensatz zu der an den Erdboden gebundenen Temperaturleitungsperiode sein kann, wird uns näher beschäftigen.

An einigen Tagen, am 4. und 5. April, und am 4. Juli habe ich die Temperaturmaxima durch gestrichelte Kurven verbunden, um die schon länger bekannte Verspätung mit wachsender Höhe zu zeigen. In größerer Höhe wird die Verspätung immer geringer, vermutlich, weil die Erwärmung durch den vertikalen Luftaustausch hier allmählich aufhört und von der Strahlungsperiode überdeckt wird.

Da eine eingehende Bearbeitung der umfangreichen Beobachtungen über die tägliche Periode der Lufttemperatur noch von seiten des Kgl. Aeronautischen Observatoriums in Aussicht steht, habe ich es für zweckmäßig gehalten, mich auf die beiden ausgewählten Kurven zu beschränken.

Wir erkennen aber klar, daß die der Erde aufliegenden Schichten offenbar von dieser abhängig sind. Der Strahlungsaustausch zwischen der Erdoberfläche einerseits, und am Tage der Sonne, in der Nacht einer unbekannten, nicht definierten kalten Fläche, die wir Firmament nennen andererseits, ein Strahlungsaustausch, der durch die Luft hindurch stattfindet, ohne diese merklich zu beeinflussen, bildet die Grundlage für die Temperaturschwankung der untersten Luftschichten, die durch Temperaturleitung von der Erdoberfläche her hervorgerufen wird.

II. Tagesschwankung der Temperatur über See.

Nun drängt sich die Frage auf, in welcher Weise die Tagesschwankung der Temperatur über der Meeresoberfläche auftritt. Das Wasser absorbiert nicht, wie die Erde, den größten Teil der Strahlung an seiner Oberfläche, sondern reflektiert einen erheblich größeren Teil und verteilt den absorbierten Teil über größere Tiefen infolge der großen Temperaturleitfähigkeit des Wassers. Dazu kommt die größere spezifische Wärmekapazität des Wassers, das bei der gleichen Strahlungsabsorption sich weniger erwärmt, als das gleiche Volumen Erde oder Gestein.

Die Amplitude der Tagesschwankung der Meeresoberfläche durch Strahlungsaustausch mit dem Firmament oder der Sonne kann also jedenfalls nur sehr klein sein im Vergleich zu der der Erdoberfläche, und es muß fraglich erscheinen, ob die Temperaturperiode der Luft darüber, soweit sie durch Temperaturleitung von der See her eintritt, überhaupt meßbar sein kann.

Andererseits kann die Strahlungsperiode, die durch Absorption und Emission von Wärmestrahlen in der Luft eintritt, offenbar unter diesen Umständen eher meßbar werden, weil die an Land alles überdeckende Periode der Temperaturleitung vom Erdboden her jetzt entfällt.

Die vorhandenen Beobachtungen und Einwände gegen sie.

Die Deutsche Seewarte hat eine große Anzahl von Schiffsbeobachtungen über die tägliche Periode der Temperatur sammeln lassen. Das Resultat war, daß die Temperatur der Meeresoberfläche in den Tropen im Mittel eine Schwankung von etwa 0°.5, und die Temperatur der Luft darüber eine solche von etwa 1° aufweisen.

Das Segelhandbuch für den stillen Ozean[1]) zieht die Beobachtungen der „Challenger“ Expedition heran; diese fand im Mittel als tägliche Temperaturschwankung:

	atl. Ozean nördl.	atl. Ozean südl.	still. Ozean nördl.	still. Ozean südl.	am Äquator	in hohen südl. Breiten
See	0.4	0.4	0.6	0.5	0.4	0.1
Luft	1.8	1.4	1.7	2.2	1.3	0.4

Die Beobachtungen von G. Schott („Valdivia“-Expedition) sind als die wichtigsten bei Hann (l. c. S. 49) wiedergegeben.

Nach den Beobachtungen von Schott war die tägliche Amplitude der Wassertemperatur an der Oberfläche innerhalb der Tropen:

bei frischer Brise: bedeckt 0.4 klar 0.7

Windstille: „ 0.9 „ 1.6 im Mittel 0.9.

Die tägliche Variation der Lufttemperatur war 0.55° bei starkem Wind; 1.26°, wenn derselbe fehlte, an bewölkten Tagen 0.66°, an klaren 1.15°, also erheblich größer als die der Meeresoberfläche.

Bei der Kleinheit der Werte ist es indessen erforderlich, Betrachtungen über die Fehlerquellen der Messung anzustellen.

Die Messung der Wassertemperatur wird in der Weise ausgeführt, daß eine Pütze voll Wasser von der Oberfläche der See aufgeholt und ein hineingehaltenes Thermometer, nachdem es sich eingestellt hat, abgelesen wird. Hierbei ist das Thermometer

1) Hamburg, [Friederichsen] 1897, pg. 187 flgde.

durch das Wasser hindurch der Strahlung ausgesetzt, und auch die Pütze versucht sich auf das Strahlungsgleichgewicht mit ihrer Umgebung einzustellen. Immerhin darf man wohl annehmen, daß bis auf 0.1° oder 0°.2 die Beobachtung wirkliche Werte liefert. Sicherlich muß der Strahlungseinfluß dahin wirken, daß die Amplitude zu groß wird, aber doch wohl nur unwesentlich.

Relativ am größten muß offenbar der Fehler bei Windstille und klarem Wetter, am kleinsten bei frischer Brise und bedeckten Himmel werden. Der Fehler wächst also mit anderen Worten mit der Amplitude. Aber selbst wenn wir reichliche Korrektionen anbringen, ändert sich das Bild der Schott'schen Zahlen nicht wesentlich:

bei frischer Brise:	bedeckt	0.4	klar	0.5
Windstille:	„	0.8	„	1.2.

Wir können also annehmen, daß die Variation der Wassertemperaturen von den Schiffen dem Sinne und der Größenordnung nach richtig beobachtet ist.

Ganz anders steht es mit den Messungen der Lufttemperatur, deren Schwierigkeiten erst Herr Aßmann vollständig beleuchtet hat [1]). Hier kann die Strahlungsempfindlichkeit des Thermometers die Beobachtung um namhafte Beträge fälschen, sodaß die Amplitude sehr wohl um $^1/_2$ und mehr Grad falsch sein kann. Auch hier muß die wirkliche Periode unter allen Umständen kleiner sein als die beobachtete.

Der Messungsfehler an Bord eines Schiffes, zumal bei stillem Wetter, ist obendrein viel größer als auf einer Landstation, wo er bis ± 0°.2 [2]) im Maximum steigen kann, weil das Schiff selbst sich durch Strahlungsabsorption stark erhitzt, und die Luft in der Nachbarschaft mit erwärmt. Man mißt auf diese Weise nicht die Temperatur der Luft über der „See“, sondern am „Schiff“.

Bei stillem Wetter werden zuverlässige Temperaturmessungen über See meines Erachtens nur von einem kleinen oder Beiboot aus möglich sein, und auch dieses nur, wenn das stark aspirierte Psychrometer an einer Stange in Luv weit von Bord gefiehrt wird.

Überhaupt wird man sich vielleicht am besten auf Schiffen in den Tropen des großen Aßmann'schen Aspirations-Psychrometers für Ballonfahrten bedienen, mit den gleichen eingehenden Vorsichtsmaßregeln wie bei diesen.

1) Abhandlungen d. Kgl. Preuß. Meteorol. Instituts.

2) Beim „Standart“-Instrument, dem Aßmann'schen Aspirations-Psychrometer.

Die Angaben der Seewarte beruhen auf den Messungen der für die Seewarte beobachtenden Schiffe; und wenn diese Messungen, die a priori für unsere subtile Frage keine genügende Genauigkeit beanspruchen können, dasselbe Resultat ergeben, wie die später erwähnten („Challenger“, „Schott“), so liegt es nahe, trotz der besonderen Ausrüstung dieser Expeditionen, den Zweifel auch auf letztere auszudehnen.

Ein weiteres Kriterium könnte gefunden werden, wenn man den Gang der Luft- und Wassertemperatur vergleicht. Da beides ziemlich reine Strahlungsperioden sein sollten, müßten auch die Maxima und Minima ungefähr zu gleicher Zeit eintreten, nämlich einige Zeit, nachdem die Strahlung selber ihr Maximum, bzw. Minimum erreicht hat.

Hann (l. c. S. 56) gibt hierüber folgende Tabelle:

Täglicher Gang der Wasser- und Lufttemperatur auf dem nordatl. Ozean 30° nördl. Breite, mittlere Temperatur im Sommerhalbjahr.

Zeit:	1a	3	5	7	9	11a	1p	3	5	7	9	11p
Wasser:	19.8	19.7*	19.8	19.8	20.0	20.1	20.1	**20.2**	20.1	20.0	19.9	19.8
Luft:	18.9*	18.9*	19.0	19.2	19.6	20.2	**20.6**	**20.6**	20.3	19.7	19.3	19.0

In dieser Tabelle treten Maximum und Minimum der Temperatur der Luft vor denen des Wassers ein. Letztere entsprechen dem Bilde, das bei einer reinen Strahlungsperiode erwartet werden müßte; daher ist der Verdacht nicht von der Hand zu weisen, daß die Beobachtungsreihe für die Luft durch die Strahlungsempfindlichkeit der Instrumente verfälscht ist.

Eine wertvolle Bestätigung der Bedenken gegen die bisher auf See beobachteten Daten über tägliche Periode hat die Expedition des Kgl. Aeronautischen Observatoriums nach dem Viktoria Njanza [1]) geliefert. Herr Berson hat auf der Fahrt nach Ostafrika Parallelbeobachtungen zu den Schiffsbeobachtungen mit Hülfe eines Aßmann'schen Aspirationspsychrometers an Bord eines Dampfers

1) Ergebnisse der Arbeiten d. Kgl. Preuß. Aeronaut. Observatoriums bei Lindenberg, herausgegeben durch dessen Direktor Dr. R. Aßmann. Bericht über d. aerolog. Exped. d. Kgl. Aeronaut. Observat. nach Ost-Afrika i. Jahre 1908, erstattet von ihrem Leiter A. Berson, Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1910, pag. XI flgnde.

der Ostafrika-Linie ausgeführt, die ein sehr interessantes Ergebnis hatten.

Der Vergleich zeigte, daß Mittags stets das Aspirationspsychrometer um erhebliche Beträge (1—3°!) niedriger abgelesen wurde, als das Schiffsthermometer. Herr Berson sagt zusammenfassend: „Obige Zusammenstellung zeigt, daß der Fehler der Schiffsthermometer, selbst von den Fällen direkter Besonnung oder eines offenbaren 5° Ablesefehlers abgesehen, meist 1—3° erreicht," und schließt:

„Aus den vorstehenden Überlegungen muß man den Schluß ziehen, daß die Thermometer-Aufstellung auf den Reichspostdampfern eine zumindest für die Tropen ungeeignete ist: weder ist direkte Besonnung ausgeschlossen (freilich auf mit veränderlichem Kurse fahrenden Schiffen nur durch Hüttenaufstellung zu erreichen), noch sind die Instrumente genügend frei angebracht, um einen nach allen Seiten durchfließenden Luftstrom zu ermöglichen und die Wärmereflexion durch benachbarte Schiffswände u. s. w. zu vermeiden."

Man darf allerdings wohl annehmen, daß nicht auf allen für die Seewarte beobachtenden Schiffen die Verhältnisse gleich ungünstig liegen, wie auf dem von Herrn Berson benutzten Dampfer. Indessen wurde das im Segelhandbuch (l. c.) ausgesprochene Urteil, daß eine tägliche Periode der Temperatur des Oberflächen-Wassers der See und der unmittelbar darüberliegenden Luft im Betrage von ½, bzw. 1° bestehe, auf Mittelwerten gegründet, und es ist nicht glaubhaft, daß diese von dem Fehler, den Herr Berson an einem Einzelfall kraß aufdeckte, ganz frei sein sollten.

Vielleicht wäre man in dieser, nicht nur subtile Gewissenhaftigkeit, sondern auch meteorologische Sachkenntnis, um nicht zu sagen Routine erfordernden Frage, bei der es sich um Größen handelt, die bei vielen Instrumenten und Aufstellungen im Fehlerbereich der Messung liegen, weiter gekommen, wenn man sich auf einige ausgewählte Einzelfälle beschränkt hätte, die unter klaren äußeren Bedingungen und von einem wissenschaftlichen Beobachter gesammelt wurden.

Das Segelhandbuch (l. c. pg. 188) sagt abschließend: „Da aber die wenigen bis jetzt vorliegenden Kontrollbeobachtungen mit dem oben erwähnten Aßmannschen Aspirationspsychrometer ergeben haben, daß instruktionsgemäß aufgestellte Thermometer die richtige Lufttemperatur geben (was sich heute nach den Darlegungen Bersons nicht mehr aufrecht erhalten läßt, d. Verf.), darf man annehmen, daß die soeben angeführten Werte die Unterschiede

zwischen Luft und Wasser (Luft am Tage wärmer als das Wasser, d. Verf.) dem Sinne nach richtig, wenn auch vielleicht in einiger Übertreibung darstellen, und die stärkere Erwärmung der Luft am Tage und im Sommer auf die Absorption der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre zurückzuführen sei, — was eine für die Meteorologie recht wichtige Tatsache bedeutet."

Die Bedenken, die gegen die Zuverlässigkeit der beobachteten Temperaturen vorgebracht wurden, scheinen uns zu gewichtig, als daß das Urteil des Segelhandbuches heute noch aufrecht erhalten werden könnte.

Aber auch eine andere sehr beachtenswerte Überlegung scheint darauf hinzuweisen, daß die Beobachtungen nicht in vollem Umfange glaubwürdig sind: Wenn nämlich die Luft im Laufe des Tages wirklich wärmer wäre als das Wasser, so müßte sie stabil geschichtet sein. Es wäre dann kein Grund zu vertikalem Luftaustausch und zur Entwicklung der cu-Wolken vorhanden, die diesem eigentümlich sind.

Tatsächlich ist zwar der vertikale Luftaustausch und die Wolkenentwickelung aus ihm über der See sehr gering, aber doch zweifellos vorhanden. Es läßt sich also nicht verhehlen, daß auch diese praktische Erfahrung mit derjenigen Periode der Lufttemperatur, wie sie durch die bisherigen, älteren Beobachtungen behauptet wird, im Widerspruch steht.

Die Luft müßte übrigens, wenn sie über dem Wasser eine tägliche Periode von ca. 1^0 infolge Strahlung aufweist, in größerer Höhe eine noch größere Periode zeigen, da an der Erde für sie nur die Wirkung der von den größeren Höhen durchgelassenen Strahlung in Frage kommt. Eine solche Temperaturschwankung von mehreren Graden in einiger Höhe hätte auch wohl den Bergstationen nicht entgehen können.

Alle diese Überlegungen nötigen uns dazu, eine Strahlungsperiode der Luft als einstweilen nicht bewiesen zu betrachten, da das vorhandene Material bei einer kritischen Betrachtung offenbar für diesen Zweck nicht ausreicht und innere Widersprüche enthält.

Die Drachenaufstiege in Aleipata.

Diese Gründe ließen es lohnend erscheinen, auf dem sehr frei in offener See gelegenen Samoa wenigstens einige Stichproben über die geophysikalisch nicht unbedeutende Frage zu sammeln.

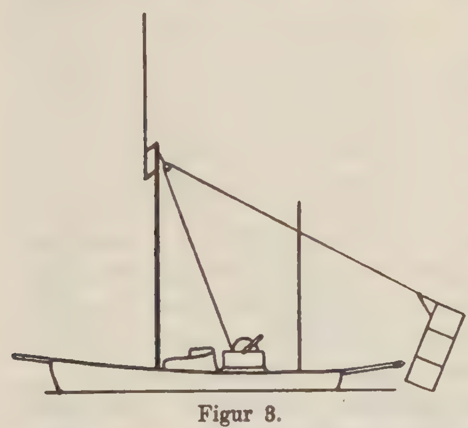
Apia, wo sich das Samoa-Observatorium der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen befindet, liegt für alle derartigen

Untersuchungen ungeeignet, weil es sich im Norden der Hauptinsel, und mithin, da der Passat in Samoa aus ESE weht, auf der Leeseite befindet.

Bei Apia tritt daher fast täglich auch auf der See, außer bei starken nordöstlichen Winden, die meist die Nacht hindurch wehen, die wohlbekannte Erscheinung des Land- und Seewindes ein, deren genauere Diskussion uns von der eigentlichen Aufgabe zu weit abführen würde. Offenbar mußte man an eine Stelle gehen, über die der Passat weht, ohne vorher Land berührt zu haben; denn nur so konnte man von den Einwirkungen des Erdbodens frei kommen.

Es war also notwendig, sich nach der großen Lagune zu begeben, welche zwei kleine Inseln umfassend bei Aleipata der Hauptinsel Samoa's, Upolu, im Osten vorgelagert ist.

Ursprünglich war geplant, die Aufstiege von der noch in der Lagune liegenden, aber weit nach Osten vorgeschobenen kleinen Krater-Insel Fanuatapu aus zu machen. Dieser Plan mußte aufgegeben werden, weil die schwere Drachenwinde sich die steile Wand der Kraterruine nicht hinaufschaffen ließ; auch die Versuche, in der Lagune bei Fanuatapu oder an der NE-Spitze des benachbarten Inselchens Namua Drachenaufstiege auszuführen, schlugen fehl, wegen der dort durch die Inseln hervorgerufenen Luftwirbel; schließlich begnügte ich mich damit, die Drachen-Haspel in meinem Segelboot stehen zu lassen, das Boot innerhalb der Lagune je nach der Windrichtung dicht an die dem Winde am meisten ausgesetzte Seite des Korallenriffs heran zu segeln, dort etwa 20 m hinter der Brandung zu ankern, und von dem allerdings etwas engen Boot aus Aufstiege zu machen. Der Drache mußte jedesmal neu aufgebaut und wieder zusammengelegt werden.


Figur 8.

Die Zeiten wählte ich so, daß ein Strahlungsfehler, wenn er überhaupt vorhanden war, bei allen Aufstiegen möglichst nur in gleicher Weise zur Geltung kam.

Die Morgen-Aufstiege erreichten ihre größten Höhen zwischen 7^h und 8^h und die Nachmittags-Aufstiege zwischen 3^h und 4^h. Man

kann also nicht erwarten, die volle Amplitude der Periode mit diesen Resultaten zu erhalten, wenn auch der Unterschied gegen diese nur klein sein kann.

Am Mast wurde die Ausgangstemperatur registriert. Diese Aufzeichnung ließ keine periodische Änderung erkennen, solange die Windgeschwindigkeit mit Sicherheit für die Ventilation ausreichte.

Der Drache war stets naß und schwer, wenn er zum Aufstieg kam; so daß bei weniger als 7 m/s kein Versuch gelang, und also bei allen Aufstiegen wohl genügende Ventilation vorhanden war.

Die Ergebnisse der Aufstiege sind in Figur 4 graphisch mitgeteilt. In etwa 2 m und 1000 m über dem Meeresspiegel herrschten folgende Temperaturen:

	Datum	Tages-Zeit	Temp. unten (am Mast)	Temp. in 1000 m Höhe (extrapoliert)
1910 Aug.	12	p	25.5	14.0
	13	a	26.0	16.0
	13	p	25.7	17.5
	15	a	26.3	16.8
	15	p	26.3	17.3
	17	a	26.6	17.5
	17	p	26.6	18.2
	18	a	26.4	18.5

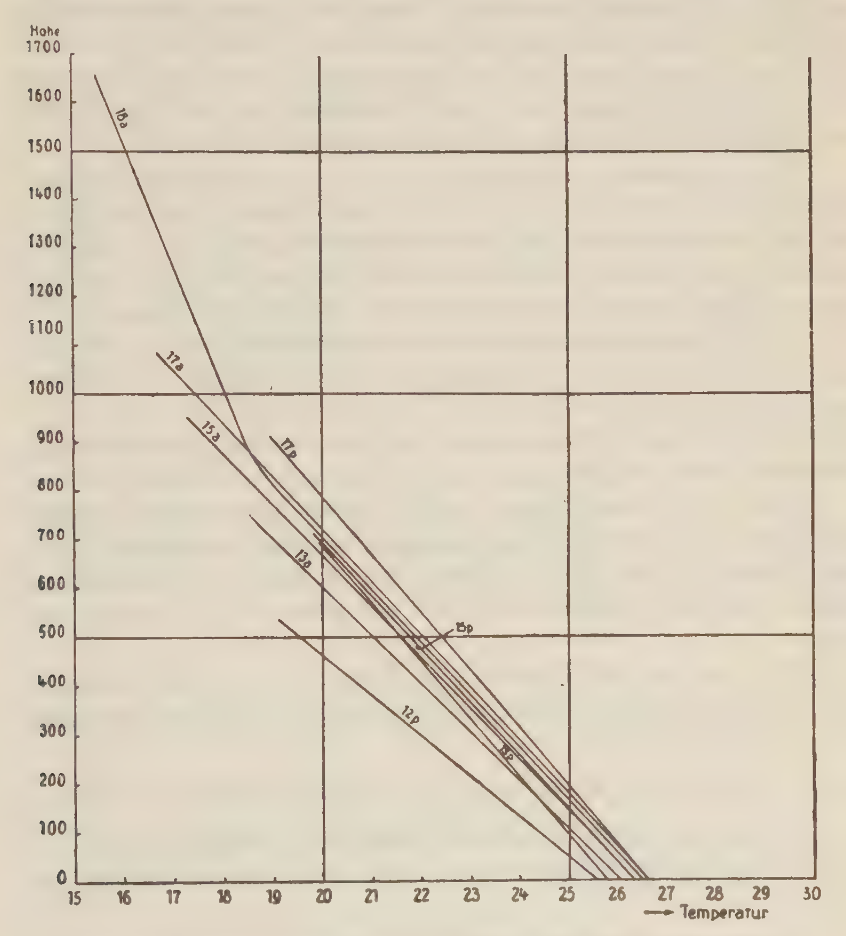
Eine periodische Schwankung an der Meeresoberfläche ist hierin nicht zu erkennen. Das war, wenn auch als Beobachtungstatsache von Interesse, doch kein anderes Resultat, als es bei einer kritischen Betrachtung des schon früher vorhandenen, oben diskutierten Materials erwartet werden konnte.

Es muß indessen betont werden, daß im Mittel doch noch eine Periode von einigen zehntel Grad wahrscheinlich bleibt, denn die Beobachtungen wurden bei ziemlich frischem Winde gesammelt, der die obersten Wasserschichten schon tüchtig durcheinander rührt: bei stillem Wetter, bei dem die Periode der Wassertemperatur deutlicher wird, muß ja zweifellos auch eine näherungsweise erkennbare Periode in der Temperatur der Luft darüber zur Geltung kommen, einfach infolge Temperaturleitung. Davon aber, daß die Temperatur der Luft an der Meeresoberfläche eine von der Strahlung abhängige Periode aufweist, die größer wäre

als die der Meeresoberfläche, ist in den sorgfältig auf instrumentelle Strahlungsfehler untersuchten Beobachtungen nichts zu erkennen.

Überraschend ist hingegen das Ergebnis für die größeren Höhen. Hier scheint sich unzweideutig, soweit die kärglichen 8 Aufstiege ein solches Urteil zulassen, eine mit der Höhe zunehmende Schwankung zu ergeben. (Vergl. Figur 4.) Und diese Periode ist nun in der Tat offenbar unabhängig von der Erdoberfläche, kann also nicht auf Temperaturleitung, sondern nur noch auf *Strahlungsabsorption und Emission der Luft selbst* oder ihrer Beimischungen beruhen.

Die Aufstiege reichen nur rund bis 800 m Höhe; wenn wir auf 1000 m Höhe extrapolieren (vgl. Tabelle S. 21), dürfte die



Figur 4. Die Drachenaufstiege in Aleipata, 12.—18. August 1910.

Temperaturschwankung in dieser Höhe im Mittel ca. $^1/_2{}^0$ ausmachen, während über der Meeresoberfläche bei frischem Winde gar keine merkliche Periode, bei stillem heiterem Wetter hingegen eine solche von ca. $^1/_2{}^0$ (nach den Zahlen der Challenger- und Valdivia-Expedition) infolge der Temperaturleitung von der See her wahrscheinlich sein dürfte[1]).

Im Laufe des 13. sinkt die Temperatur unten, in 1000 m Höhe steigt sie um 1.5°; am 15. bleibt die Temperatur unten konstant, bei 1000 m steigt sie um 0.°5. Am 17. bleibt die Temperatur unten konstant, in 1000 m Höhe steigt sie um 0.°5.

Wenn die beobachtete Schwankung auf Strahlung zurückgeführt werden soll, so darf man wohl annehmen, daß sie zunächst noch weiter mit der Höhe zunimmt. Denn die in größerer Höhe befindlichen Luftschichten werden von kräftigeren Sonnenstrahlen getroffen, als die unter ihnen liegenden, die nur den von den oberen Schichten durchgelassenen Teil empfangen. Auch die Wärmeabgabe der Luft gegen das kalte Firmament in der Nacht wird aus dem gleichen Grunde in der Höhe größer sein.

Es ist indessen wahrscheinlich, daß es nicht sowohl auf die Absorption und Emission von Seiten der reinen Luft ankommt, als auf die der in ihr enthaltenen Verunreinigungen und Kondensationskerne. Der Grad dieser Verunreinigung für die verschiedenen Höhen ist leider nur in einzelnen Beispielen bekannt.

Im Allgemeinen nimmt der Staub- und Dunstgehalt sprunghaft ab bei 3—4000 m Höhe, wo auch meist die Oberfläche des Wolkenmeeres liegt.

Innerhalb einer adiabatischen Schicht scheint auch der Dunst ziemlich gleichmäßig verteilt zu sein.

Unter der Voraussetzung, daß die Strahlungsperiode der Luft im Wesentlichen auf den Verunreinigungen derselben beruht, sollte man erwarten, daß die Amplitude der ersteren in verschiedenen Höhen von dem vertikalen Gange des Dunstes oder Staubes abhängt.

Um eine weitere Klärung der Frage zu versuchen, wurden die Drachenaufstiege in Lindenberg 1906 und 1907 herangezogen.

Die Drachenaufstiege in Lindenberg 1906 und 1907.

Für alle die Tage, an denen Vormittags zwischen 6^h und 10^h und Nachmittags zwischen 2^h und 5^h ein brauchbarer Aufstieg ge-

1) Hieraus würde das gelegentliche Entstehen der cu zu erklären sein.

fungen war, wurden für die Höhenstufen 0, 500, 1000, 1500, 2000, 2500 und 3000 m die Temperaturdifferenzen gebildet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Da Vormittags und Nachmittags die Strahlungsempfindlichkeit des Instrumentes ziemlich gleich sein muß, wird die hierbei vielleicht erkennbare Temperaturschwankung praktisch frei von Strahlungsfehlern der Messung sein.

Sie stellt indessen nicht die wirkliche maximale Amplitude dar; zur Beobachtung dieser würden wohl besser Aufstiege zwischen 5^a und 8^a bezw. 2^p und 4^p dienen.

Es schien ursprünglich richtiger, das Mittel aus je zwei aufeinander folgenden Morgen-Aufstiegen zu bilden, und dieses dem dazwischen liegenden Nachmittags-Aufstieg entgegenzustellen. Aber hierdurch wären die Höhen beschränkt worden, da die Mittelbildung durch den jeweilig niedrigsten Aufstieg hätte begrenzt werden müssen; oder man hätte den niedrigeren Aufstieg bis zur Höhe des höheren extrapolieren müssen, was in mancher Hinsicht nicht unbedenklich schien. Aus diesem Grunde wurde nur die Differenz zwischen je einem Vormittags- und Nachmittags-Aufstieg gebildet.

Im Jahresdurchschnitt für 1906 sehen wir vom Erdboden ab bis 1500 m die Schwankung abnehmen. Bis hierher unterdrückt also die Temperaturabhängigkeit vom Erdboden eine Strahlungsperiode, falls diese vorhanden ist. Nun zeigt sich zwar in 2000 m und 2500 m erneute Zunahme der Schwankung, wie dies einer Strahlungsperiode eigentümlich sein sollte, aber bei 2000 m konnten nur 7, und bei 2500 m gar nur zwei Fälle verwendet werden; einer so geringen Zahl von Beobachtungen aber darf in den veränderlichen Breiten Europas in einer so subtilen Frage keine Beweiskraft zugeschrieben werden.

Als Monatsmittel für das Jahr 1906 ergibt sich dann folgende Tabelle:

Die mittlere tägliche Schwankung der Temperatur in verschiedenen Höhen 1906 zu Lindenberg.

	Erde	500 m	1000 m	1500 m	2000 m	2500 m
Januar	+ 4.5 (5)	+ 1.7 (5)	+ 1.7 (5)			
Februar	+ 1.8 (5)	+ 0.6 (4)	— 0.1 (4)			
März	+ 2.8 (5)	+ 2.2 (5)	+ 0.7 (4)			
April	+ 5.2 (4)	+ 2.6 (4)	+ 0.6 (4)			
Mai	+ 2.8 (4)	+ 2.5 (4)	+ 1.7 (4)			
Juni	nur 1 Differenz					
Juli	+ 5.9 (5)	+ 1.9 (5)	+ 0.5 (4)			
August	+ 8.7 (3)	+ 3.8 (3)	+ 3.1 (3)			
September	+ 3.5 (4)	+ 1.9 (4)	+ 0.3 (4)			
Oktober	+ 3.3 (4)	+ 1.1 (4)	+ 0.9 (4)			
November	+ 3.8 (5)	— 0.9 (5)	— 0.2 (5)			
Dezember	+ 2.2 (3)	+ 1.8 (3)	+ 2.6 (2)			
Jahresmittel d. Amplit.	+ 3.9	1.7	1.1	0.86 (28)	+ 1.41 (7)	+ 3.3 (2)

Die eingeklammerten Zahlen bedeuten die Zahl der verwendeten Tagesdifferenzen, sie geben zugleich das Gewicht der Zahl an.

Für das Jahr 1907, das mehr Beobachtungen aufweist, ergab sich folgende Tabelle:

Die mittlere tägliche Schwankung der Temperatur in verschiedenen Höhen 1907 zu Lindenberg.

	Erde	500	1000	1500	2000	2500
Januar	+ 0.3 (9)	+ 1.6 (9)	+ 0.8 (8)	+ 1.0 (2)	+ 1.2 (2)	+ 2.5 (1)
Februar	+ 0.9 (9)	+ 0.4 (9)	+ 0.3 (9)	+ 0.5 (2)	+ 2.4 (1)	
März	+ 0.8 (3)	— 0.2 (3)	+ 0.2 (3)	+ 3.1 (2)	+ 2.3 (1)	
April	+ 3.0 (10)	+ 2.0 (10)	+ 1.8 (9)	+ 0.8 (9)	+ 0.1 (8)	0.0 (5)
Mai	+ 1.8 (3)	+ 2.8 (3)	+ 3.3 (3)	+ 2.3 (3)	+ 1.5 (3)	+ 0.5 (3)
Juni	+ 2.6 (5)	+ 1.9 (6)	+ 1.5 (5)	+ 1.3 (4)	+ 0.1 (2)	
Juli	+ 4.5 (10)	+ 3.0 (11)	+ 1.1 (11)	+ 0.7 (8)	— 0.1 (5)	— 0.8 (2)
August	+ 2.7 (6)	+ 1.5 (6)	+ 1.1 (5)	+ 0.4 (5)	— 0.1 (3)	
September	+ 2.7 (5)	+ 1.4 (5)	+ 0.3 (5)	+ 0.3 (5)	+ 1.2 (4)	
Oktober	+ 4.0 (9)	+ 0.5 (9)	— 0.6 (9)	— 0.1 (6)	— 0.4 (3)	
November	+ 3.4 (5)	+ 0.3 (5)	— 0.5 (4)	+ 0.9 (2)	+ 1.4 (2)	+ 0.2 (2)
Dezember	+ 2.8 (4)	+ 0.9 (4)	+ 1.5 (2)	+ 1.2 (2)	+ 1.1 (2)	

Auch hier verlaufen die Monatsmittel noch durchaus nicht regelmäßig, aber sie gestatten doch viel eher, sich ein Bild von den Vorgängen zu machen.

Die Sommermonate scheiden offenkundig für die Frage der Strahlung aus. In ihnen bemerken wir eine Abhängigkeit auch der oberen Luftschichten von der Erdoberfläche. Die Temperaturschwankung nimmt in diesen Monaten offenbar mit der Höhe dauernd ab. In größeren Höhen scheint sogar Nachmittags ein Sinken der Temperatur einzutreten. Als Ursache könnte man sich die Verdunstung der entwickelten Wolkenmassen, oder die Ausdehnung der unteren Luftvolumina infolge Erwärmung nach oben denken. Sobald ein weniger als adiabatisches Gefälle in den oberen Schichten vorhanden ist, — und das ist die Regel — muß ja bei adiabatischer Hebung der Schichten Abkühlung eintreten.

Vom September bis März einschließlich dürfte die Erwärmung der Luftsäule vom Boden her am Nachmittag bis ca. 1000 m Höhe reichen. Die Beobachtungen innerhalb dieser Höhe müssen also ausgeschieden werden; oberhalb 1000 m erwecken die Beobachtungen in der Tat den Anschein, als ob sie eine mit der Höhe zunächst zunehmende Schwankung aufwiesen.

Bilden wir für die bezeichnete Zeit für 1907 das Gesamtmittel, so erhalten wir:

Höhe	1500	2000	2500	3000
Temp.-Schwank.	+ 0.55	+ 1.0	+ 0.7	+ 0.1
Gewicht	21	15	9	5

In der Zeit von September bis März reicht die Luftmischung nicht in große Höhen, hier verlagern sich also auch die Staubmassen und sonstigen Verunreinigungen des Luftmeeres langsam auf den Boden desselben. In der Tat wird ja im Winter und Herbst die Oberfläche des „Dunstmeeres“ recht häufig bei 2000 m Höhe von den Ballons erreicht.

Wenn es sich um Strahlungsabsorption und Emission der Luft selbst handelte, so müßte die Amplitude der Schwankung dauernd mit der Höhe zunehmen, was nicht der Fall zu sein scheint. Das Resultat bietet daher eine Bestätigung für die früher geäußerte Vermutung, daß nicht eigentlich die Luft selbst, sondern ihre festen und flüssigen Beimischungen die Ursache dieser Strahlungsperiode bilden.

Die quantitative Übereinstimmung mit den Beobachtungen in Aleipata ist überraschend, wenn es auch bei der knappen Zahl

der Beobachtungen kaum angemessen scheinen kann, großes Gewicht hierauf zu legen.

Das Ergebnis lehrt aber mit Sicherheit, daß die in Aleipata gefundene Zunahme mit der Höhe wirklich besteht, und daß die Periode in 1000—1500 m Höhe, soweit sie rein durch Strahlung herbeigeführt wird, ca. 0.°5 beträgt.

Ferner muß offenbar die Amplitude der Temperaturperiode der Luft über der Oberfläche der See erheblich geringer sein, als bisher angenommen wurde, sodaß sie die Temperaturschwankung der Meeresoberfläche selbst wahrscheinlich nicht überschreitet.

Auch zeigen die Zahlen deutlich, daß eine Strahlungsabhängigkeit der Instrumente bei den Beobachtungen in Lindenberg nicht bestanden hat; wäre nämlich eine solche vorhanden gewesen, so müßte die scheinbare Temperaturschwankung mit der Höhe dauernd weiter zunehmen, was nicht der Fall ist.

Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

Vorgelegt in der Sitzung am 29. Juli 1911 durch Herrn Hilbert.

Einleitung.

Die Riemann'sche Zetafunktion der komplexen Variabeln $s = \sigma + it$ ist in der Halbebene $\sigma > 1$ durch das konvergente Produkt

$$(1) \qquad \zeta(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$$

dargestellt, wo p die sämtlichen Primzahlen 2, 3, 5, 7 ... durchläuft, und es ist, wegen der gleichmäßigen Konvergenz dieses Produktes für $\sigma > 1 + \delta$ $(\delta > 0)$, die Funktion $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ regulär.

Es folgt unmittelbar aus (1), daß in der Halbebene $\sigma > 1$

$$\zeta(s) \neq 0$$

ist. Dagegen hat, wie ich neuerdings bewiesen habe[1]), $|\zeta(s)|$ für $\sigma > 1$ keine positive untere Schranke.

Ich werde nunmehr in dieser Abhandlung beweisen: Es nimmt die Funktion $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert außer 0 an; sogar unendlich oft.

---

1) Sur l'existence de valeurs arbitrairement petites de la fonction $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ de Riemann pour $\sigma > 1$ [Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. 1911. Nr. 3]. — Der Leser braucht übrigens die zitierte Abhandlung nicht zu kennen.

§ 1.

Beweis eines Hilfssatzes.

Es sei p_n die n^{te} Primzahl (d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$). Dann ist bekanntlich die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} p_n^{-\sigma}$$

für $\sigma > 1$ konvergent, und zwar für $\sigma > 1 + \delta$ $(\delta > 0)$ gleichmäßig; dagegen ist bekanntlich

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} p_n^{-1}$$

divergent. Ferner ist bekanntlich für zu 1 abnehmendes σ

$$\lim_{\sigma=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} p_n^{-\sigma} = +\infty$$

und

$$\lim_{\sigma=+\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} p_n^{-\sigma} = 0.$$

Es sei $\sigma > 1$, und es sei

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

eine unendliche Folge reeller Zahlen. Dann konvergiert das Produkt

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n}) = F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)$$

und stellt für jedes Wertsystem $\sigma > 1$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ eine von Null verschiedene Zahl dar.

Ich werde nunmehr den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz I: Es sei die komplexe Zahl $z \neq 0$ beliebig gegeben. Dann existiert eine reelle Zahl $\sigma > 1$ sowie eine dazu gehörige reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ derart, daß

$$F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = z$$

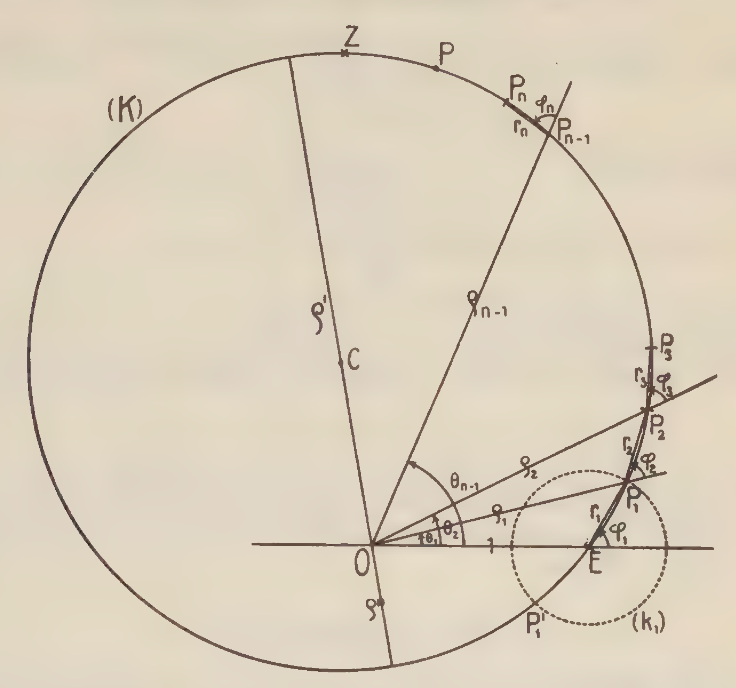
ist.

Beweis: Es mögen in der komplexen Ebene (siehe Figur) E und Z die Punkte bezeichnen, welche den Zahlen 1 und $z \neq 0$ entsprechen. Ich lege alsdann, was offenbar möglich ist, einen Kreis K durch die beiden Punkte E und Z (im Falle $z = 1$, wo E und Z zusammenfallen, einen Kreis durch den Punkt E) derart, daß erstens dieser Kreis K nicht durch den Nullpunkt O geht, und daß zweitens der Radius R des Kreises größer als 1 ist. Es be-

zeichne C den Mittelpunkt dieses Kreises und ϱ' den größten Abstand vom Nullpunkte O bis zur Peripherie des Kreises. Dann ist

$$\varrho' = \overline{OC} + R \leqq \overline{OE} + \overline{EC} + R = 1 + 2R < 3R < 2D,$$

wo $D = 2R$ den Durchmesser des Kreises K bezeichnet. Es ist also der größte Abstand ϱ' vom Nullpunkte O bis zum Kreise K kleiner als das doppelte des Durchmessers.



Ich definiere nunmehr für jedes $\sigma > 1$ eine (zu dem oben definierten Kreise K gehörige) Funktion $f(\sigma)$ folgendermaßen.

Es sei für alle $\sigma > 1$

$$f(\sigma) = F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n})$$

gesetzt, wo die von σ abhängigen Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ folgendermaßen bestimmt sind: Es sei $\sigma > 1$ fest. Ich betrachte alsdann zunächst die Zahl

$$1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1},$$

wo die reelle Größe φ_1 den Intervall von 0 (inkl.) bis 2π (exkl.) durchläuft; es durchläuft alsdann in der komplexen Ebene der Punkt, welcher dieser Zahl entspricht, einen Kreis k_1 mit dem

Mittelpunkte E und dem Radius $r_1 = p_1^{-\sigma} = \frac{1}{2^\sigma}\cdot$ Wegen

$$\sigma > 1, \quad D > 2 > \frac{1}{2}$$

ist hierbei offenbar $r_1 < D$, d. h. es ist der Radius des Kreises k_1 kleiner als der Durchmesser des Kreises K. Es hat daher der Kreis k_1 zwei Schnittpunkte P_1 und P_1' (siehe Fig.) mit dem Kreise K, und es bezeichne P_1 denjenigen Schnittpunkt, der in positiver Umlaufsrichtung von E aus der frühere ist. Alsdann ist

$$0 < [CE, CP_1] < \pi\,^{1)}.$$

Ich setze nunmehr

$$\varphi_1 = [OE, EP_1];$$

dann entspricht in der komplexen Ebene die Zahl

$$1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1} = \varrho_1 e^{i\theta_1}$$

offenbar dem Punkte P_1.

Ich betrachte nunmehr, nachdem φ_1 festgelegt ist, die Zahl

$$(1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1})\,(1 + p_2^{-\sigma} e^{i\varphi_2}) = \varrho_1 e^{i\theta_1}\,(1 + p_2^{-\sigma} e^{i\varphi_2}),$$

wo φ_2 von 0 (inkl.) bis 2π (exkl.) läuft; es durchläuft alsdann in der komplexen Ebene der Punkt, welcher dieser Zahl entspricht, einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkte P_1 und dem Radius $r_2 = \varrho_1 p_2^{-\sigma}$. Wegen

$$\varrho_1 = \overline{OP_1} \leqq \varrho' < 2D, \quad p_2^{-\sigma} = \frac{1}{3^\sigma} < \frac{1}{2}$$

ist hierbei offenbar der Radius r_2 dieses Kreises k_2 kleiner als der Durchmesser D des Kreises K. Es hat daher der Kreis k_2 zwei Schnittpunkte mit dem Kreise K. Ich gehe wieder in positivem Sinn weiter und bezeichne mit P_2 denjenigen Schnittpunkt, für welchen

$$0 < [CP_1, CP_2] < \pi$$

ist. Dann setze ich

$$\varphi_2 = [OP_1, P_1P_2],$$

und es entspricht alsdann in der komplexen Ebene die Zahl

1) Es seien L, M, N, Q vier Punkte in der komplexen Ebene, nnd L verschieden von M, N verschieden von Q. Dann bezeichne ich mit

$$[LM, NQ]$$

den Winkel zwischen 0 (inkl.) und 2π (exkl.), um welchen der Vektor LM bei festgehaltenen L zu drehen ist, damit er mit dem Vektor NQ gleich gerichtet wird.

$$(1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1}) . (1 + p_2^{-\sigma} e^{i\varphi_2}) = \varrho_2 e^{i\theta_2}$$

offenbar dem Punkte P_2.

Ich setze nunmehr die obige Methode fort, bestimme, nachdem φ_1 und φ_2 festgelegt sind, die reelle Zahl φ_3 derart, daß der Punkt P_3, welcher in der komplexen Ebene der Zahl

$$(1 + p_1^{-\sigma} e^{i\varphi_1}) (1 + p_2^{-\sigma} e^{i\varphi_2}) (1 + p_3^{-\sigma} e^{i\varphi_3}) = \varrho_3 e^{i\theta_3}$$

entspricht, auf dem Kreise K liegt, und zwar so, daß

$$0 < [CP_2, CP_3] < \pi$$

ist. ... Allgemein, es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ festgelegt, und es liege der Punkt P_{n-1}, welcher der Zahl

$$\varrho_{n-1} e^{i\theta_{n-1}} = \prod_{m=1}^{m=n-1} (1 + p_m^{-\sigma} e^{i\varphi_m})$$

entspricht, auf dem Kreise K. Ich bestimme alsdann φ_n folgendermaßen: Wenn die reelle Größe φ_n von 0 (inkl.) bis 2π (exkl.) läuft, so durchläuft in der komplexen Ebene der Punkt, welcher der Zahl

$$\prod_{m=1}^{m=n} (1 + p_m^{-\sigma} e^{i\varphi_m}) = \varrho_{n-1} e^{i\theta_{n-1}} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n})$$

entspricht, einen Kreis k_n mit dem Mittelpunkte P_{n-1} und dem Radius $r_n = \varrho_{n-1} p_n^{-\sigma}$. Wegen

$$\varrho_{n-1} \leq \varrho' < 2D, \quad p_n^{-\sigma} < \frac{1}{p_n} \leq \frac{1}{2}$$

ist hierbei offenbar $r_n < D$, und es hat somit der Kreis k_n zwei Schnittpunkte mit dem Kreise K; es bezeichne P_n denjenigen Schnittpunkt, für welchen

$$0 < [CP_{n-1}, CP_n] < \pi$$

ist. Ich setze alsdann

$$\varphi_n = [OP_{n-1}, P_{n-1} P_n].$$

Dann entspricht in der komplexen Ebene die Zahl

$$\varrho_n e^{i\theta_n} = \prod_{m=1}^{m=n} (1 + p_m^{-\sigma} e^{i\varphi_m})$$

offenbar dem Punkte P_n.

Es ist hiermit eine von σ abhängige reelle Zahlenfolge

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots,$$

und damit auch, für jedes $\sigma > 1$, die Zahl

$$f(\sigma) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n})$$

völlig bestimmt. Es habe $P_n = P_n(\sigma)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ die obige Bedeutung, d. h. es entspreche in der komplexen Ebene den Punkt P_n der Zahl

$$\varrho_n e^{i\theta_n} = \prod_{m=1}^{m=n} (1 + p_m^{-\sigma} e^{i\varphi_m}).$$

Es bezeichne ferner $P = P(\sigma)$ denjenigen Punkt in der komplexen Ebene, welcher der Zahl

$$f(\sigma) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n})$$

entspricht. Da für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ der Punkt P_n auf dem Kreise K liegt, ist, wegen

$$f(\sigma) = \lim_{n=\infty} \prod_{m=1}^{m=n} (1 + p_m^{-\sigma} e^{i\varphi_m}),$$

der Punkt P auch auf dem Kreise K gelegen. Ich behaupte nunmehr: es ist, bei passender Wahl eines $\sigma > 1$,

$$f(\sigma) = z,$$

d. h. es ist, bei passender Wahl eines $\sigma > 1$, der Punkt $P = P(\sigma)$ mit dem Punkte Z identisch.

Um dies zu beweisen, definiere ich für $\sigma > 1$ eine Zahl $L = L(\sigma)$ durch die Reihe

$$L = \sum_{n=1}^{n=\infty} (\smile P_{n-1} P_n),$$

wo, für alle $n = 1, 2, 3, \ldots, \smile P_{n-1} P_n$ diejenige auf dem Kreise K vom Punkte P_{n-1} bis zum Punkte P_n in positiver Umlaufsrichtung gerechnete Bogenlänge bedeutet, welche zwischen 0 und πR (beide exkl.) liegt (es bedeute hierbei P_0 den Punkt E). Es ist diese Reihe konvergent; denn es ist

$$0 < \smile P_{n-1} P_n < \frac{\pi}{2} \overline{P_{n-1} P_n} = \frac{\pi}{2} \varrho_{n-1} p_n^{-\sigma} \leqq \frac{\pi}{2} \varrho' p_n^{-\sigma} = c p_n^{-\sigma},$$

wo $c = \frac{\pi}{2} \varrho'$ eine nur vom Kreise K abhängige, d. h. von σ und n unabhängige, Konstante bedeutet, und es ist, wie oben erwähnt, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} p_n^{-\sigma}$$

für $\sigma > 1$ konvergent.

Ich behaupte nunmehr: es ist die für $\sigma > 1$ definierte positive Funktion $L = L(\sigma)$ eine für $\sigma > 1$ stetige Funktion von σ.

Dies folgt einfach daraus, daß erstens, wegen

$$\smile P_{n-1} P_n < c \, . \, p_n^{-\sigma},$$

die Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (\smile P_{n-1} P_n),$$

bei jedem $\delta > 0$, für $\sigma > 1 + \delta$ gleichmäßig konvergiert, während zweitens die einzelne Glieder der Reihe, d. h. die Zahlen $l_n(\sigma) = \smile P_{n-1} P_n$ stetige Funktionen von $\sigma > 1$ sind; dies letzte folgt unmittelbar durch Induktion; denn es ist, wegen $\overline{P_0 P_1} = p_1^{-\sigma}$, $\smile P_0 P_1$ stetig, und aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $\smile P_{r-1} P_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ folgt die Stetigkeit von $\varrho_{n-1} = \overline{OP_{n-1}}$, also von $\overline{P_{n-1} P_n} = \varrho_{n-1} p_n^{-\sigma}$, d. h. die Stetigkeit von $\smile P_{n-1} P_n$.

Ferner ist, wegen

$$L = L(\sigma) < c \sum_{n=1}^{n=\infty} p_n^{-\sigma},$$

$$\lim_{\sigma = +\infty} L(\sigma) = 0,$$

und aus der Ungleichung

$$\smile P_{n-1} P_n > \overline{P_{n-1} P_n} = \varrho_{n-1} p_n^{-\sigma} \geqq \varrho'' p_n^{-\sigma},$$

wo $\varrho'' > 0$ den kleinsten Abstand vom Nullpunkte O bis zur Peripherie des Kreises K bedeutet, ergibt sich weiter

$$L = L(\sigma) > \varrho'' \sum_{n=1}^{n=\infty} p_n^{-\sigma},$$

also, für zu 1 abnehmendes σ,

$$\lim_{\sigma = 1} L(\sigma) = +\infty.$$

Die für $\sigma > 1$ definierte positive stetige Funktion $L = L(\sigma)$ nimmt somit für $\sigma > 1$ alle positiven Werte an.

Ich trage nunmehr, bei festem $\sigma > 1$, die Bogenlänge $L = L(\sigma)$, mit dem ersten Endpunkte im Punkte $P_0 = E$, längs der Peripherie des Kreises K in der positiven Umlaufsrichtung ab; dann fällt offenbar, wegen

$$L = \sum_{n=1}^{n=\infty} (\smile P_{n-1} P_n),$$

der andere Endpunkt in den Punkt $P = P(\sigma)$, welcher der Zahl $f(\sigma)$ entspricht.

Es bezeichne nunmehr $\smile EZ$ diejenige vom Punkte E bis zum Punkte Z in positivem Sinne gerechnete Bogenlänge, welche zwischen 0 (exkl.) und $2\pi R$ (inkl.) liegt (es ist also im Falle $z = 1$, $\smile EZ = 2\pi R$ gesetzt), und es sei, was nach dem obigen möglich ist, $\sigma > 1$ so gewählt, daß $L(\sigma) = \smile EZ$ ist. Dann fällt offenbar für dieses σ der Punkt $P = P(\sigma)$ in den Punkt Z, d. h. es ist für dieses σ

$$f(\sigma) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n}) = z.$$

Damit ist der Hilfssatz I bewiesen[1]).

Aus dem Beweis des Hilfssatzes I folgt unmittelbar, daß man diesen Satz auch allgemeiner so formulieren kann.

Hilfssatz II: Es sei $z \neq 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine dem Intervall $1 < \sigma < 1 + \delta$ gehörige Zahl σ und eine reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ derart, daß

$$F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n}) = z$$

ist.

Denn, wegen

$$\operatorname*{Lim}_{\sigma=\infty} L(\sigma) = 0,$$

hat die für $\sigma > 1$ stetige positive Funktion $L(\sigma)$ für $\sigma \geqq 1 + \delta$ eine endliche obere Grenze M (die übrigens für $\sigma \geqq 1 + \delta$ erreicht wird). Ich bestimme alsdann zunächst die positive ganze Zahl N so groß, daß

$$\smile EZ + 2\pi R \,.\, N > M$$

ist, und danach eine Zahl $\sigma > 1$ derart, daß

1) Ich bemerke der Deutlichkeit wegen, daß es unwesentlich ist, daß ich beim Beweise des Hilfssatzes I eben einen durch die beiden Punkte E und Z gehenden Kreis verwendet habe. Ich konnte z. B. auch statt des Kreises K die Gerade EZ oder vielmehr den Halbstrahl, der von E durch Z ins Unendliche geht, verwendet haben, indem ich alsdann eine „zu diesem Strahl gehörige" Funktion $f(\sigma) = F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)$ konstruiert hatte. Bei der Benutzung eines solchen Halbstrahls EZ wäre aber für den Fall $z = 1$ (d. h. $E = Z$), wo von einem Halbstrahl EZ gar nicht die Rede sein kann, sowie für den Fall, wo z reell und kleiner als 1 ist, in welchem Falle der Halbstrahl EZ durch den Nullpunkt O geht, eine besondere, übrigens unschwere, Untersuchung nötig gewesen. Um eine solche besondere Untersuchung einiger Spezialfälle zu vermeiden, habe ich im Texte den durch E und Z gehenden Kreis K dem Halbstrahl EZ vorgezogen.

$$L(\sigma) = \smile EZ + 2\pi R \,.\, N$$

ist. Für dieses $\sigma > 1$ ist dann offenbar, wegen

$$L(\sigma) \equiv \smile EZ \pmod{2\pi R},$$

$$f(\sigma) = F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots) = z,$$

und, wegen $L(\sigma) > M$, ist hierbei eo ipso $\sigma < 1 + \delta$.

Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

§ 2.

Einführung eines Kronecker'schen Satzes über Diophantische Approximationen und Übergang von der Funktion $F(\sigma, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)$ zur Funktion $\zeta(\sigma + it)$.

Es sei die komplexe Zahl $z \neq 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es nach dem Hilfssatz I des § 1 eine reelle Zahl $\sigma_0 = \sigma_0(z) > 1$, sowie eine dazu gehörige reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, derart, daß

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}) = \frac{1}{z}$$

ist. Ich behaupte nunmehr den folgenden

Hilfssatz III: Es nimmt die Funktion $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$, wo $\sigma_0 = \sigma_0(z)$ die obige Bedeutung hat, Werte an, die beliebig nahe an z herankommen; d. h. nach Annahme eines $\varepsilon > 0$ gibt es ein reelles t_0 derart, daß

$$\left| \frac{\zeta(\sigma_0 + it_0)}{z} - 1 \right| < \varepsilon$$

ist.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ derart, daß

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}) = \frac{1}{z}$$

ist. Ferner ist für alle reellen t

$$\frac{1}{\zeta(\sigma_0 + it)} = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)}) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i(\pi - t \log p_n)}\right),$$

d. h.

$$\frac{1}{\zeta(\sigma_0 + it)} = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}),$$

wo, für alle $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\mu_n = \mu_n(t) = \pi - t \log p_n$$

ist.

Es lautet also die Behauptung: es gibt ein reelles t_0 derart, daß die Ungleichung

$$\left| \frac{\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n})}{\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n})} - 1 \right| < \varepsilon,$$

wo nur die Größen $\mu_n = \pi - t \log p_n$ von t abhängen, für $t = t_0$ erfüllt ist.

Um die Existenz eines solchen t_0 zu beweisen, bestimme ich zunächst eine Zahl ε_1 derart, daß

$$0 < \varepsilon_1 < 1, \quad \frac{4\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} < \varepsilon$$

ist; zu diesem ε_1 bestimme ich alsdann eine ganze Zahl N derart, daß

$$\prod_{n=N+1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0}) - 1 < \varepsilon_1$$

ist. Dann ist offenbar a fortiori

$$\left| \prod_{n=N+1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}) - 1 \right| < \varepsilon_1,$$

d. h. es ist

$$\prod_{n=N+1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}) = 1 + \alpha_1,$$

wo $|\alpha_1| < \varepsilon_1$ ist. Ferner ist für jedes reelle t

$$\prod_{n=N+1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}) = 1 + \alpha_2,$$

wo $\alpha_2 = \alpha_2(t)$ die Ungleichung $|\alpha_2| < \varepsilon_1$ erfüllt.

Es ist also für jedes reelle t

$$\frac{\zeta(\sigma_0 + it)}{z} = \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_2} \prod_{n=1}^{n=N} \left(\frac{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}} \right),$$

wo $|\alpha_1| < \varepsilon_1$ und $|\alpha_2| < \varepsilon_1$ ist.

Nachdem N festgelegt ist, bestimme ich nunmehr, was offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, ein $\varepsilon_2 > 0$ so (d. h. so klein), daß die Ungleichung

$$\left| \prod_{n=1}^{n=N} \left(\frac{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}} \right) - 1 \right| < \varepsilon_1$$

erfüllt ist, wenn, für alle $n = 1, 2, \ldots N$, die Zahl μ_n, auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π, betrachtet, von der festen Zahl φ_n um weniger als ε_2 abweicht, d. h. wenn für alle $n = 1, 2, \ldots N$ eine Ungleichung der Form

$$|\mu_n - \varphi_n - 2\pi g_n| < \varepsilon_2$$

in ganzen Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_N$ besteht.

Nun hat aber Kronecker den folgenden Satz über Diophantische Approximationen bewiesen:

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N$ reelle Zahlen derart, daß keine Relation der Form

$$C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + \cdots + C_N \lambda_N = 0$$

in ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Größen $C_1, C_2, \ldots C_N$ besteht; es seien ferner $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_N$ beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon' > 0$ eine reelle Zahl t_0 sowie N ganze Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_N$ derart, daß die N Ungleichungen

$$|\lambda_n t_0 - \nu_n - g_n| < \varepsilon' \quad (n = 1, 2, \ldots N)$$

sämtlich erfüllt sind.

Ich wende nun diesen Kronecker'schen Satz an auf: die Zahlen

$$\lambda_n = -\frac{1}{2\pi} \log p_n \quad (n = 1, 2, \ldots N)$$

$$\nu_n = -\frac{1}{2} + \frac{\varphi_n}{2\pi} \quad (n = 1, 2, \ldots N)$$

und

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_2}{2\pi}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes sind offenbar erfüllt; denn, wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen positiven Zahl in Primfaktoren, kann eine Relation der Form

$$C_1 \log p_1 + C_2 \log p_2 + \cdots + C_N \log p_N = 0$$

(d. h. eine Relation der Form $p_1^{C_1} . p_2^{C_2} \ldots p_N^{C_N} = 1$) in ganzen Zahlen $C_1, C_2, \ldots C_N$ nur bestehen, wenn die Zahlen $C_1, C_2, \ldots C_N$ sämtlich gleich 0 sind.

Der Kronecker'sche Satz ergibt alsdann die Existenz eines reellen t_0, sowie dazu gehöriger ganzer Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_N$, derart, daß für alle $n = 1, 2, \ldots N$ die Ungleichung

$$\left| -\frac{1}{2\pi} \log p_n . t_0 + \frac{1}{2} - \frac{\varphi_n}{2\pi} - g_n \right| < \frac{\varepsilon_2'}{2\pi},$$

d. h., wenn ich mit 2π multipliziere und, statt $-t_0 \log p_n + \pi$, $\mu_n = \mu_n(t_0)$ schreibe, die Ungleichung

$$|\mu_n - \varphi_n - 2\pi g_n| < \varepsilon_2 \quad (n = 1, 2, \ldots N)$$

besteht.

Für dieses t_0 ist alsdann

$$\left| \prod_{n=1}^{n=N} \left(\frac{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\mu_n}} \right) - 1 \right| < \varepsilon_1,$$

d. h.

$$\prod_{n=1}^{n=N} \left(\frac{1 + p_n^{-\sigma_0} e^{i\varphi_n}}{1 - p_n^{-(\sigma_0 + it_0)}} \right) = 1 + \alpha_3,$$

wo $|\alpha_3| < \varepsilon_1$ ist.

Hieraus ergibt sich dann weiter

$$\frac{\zeta(\sigma_0 + it_0)}{z} = \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_2} (1 + \alpha_3)$$

wo

$$|\alpha_1| < \varepsilon_1, \quad |\alpha_2| < \varepsilon_1, \quad |\alpha_3| < \varepsilon_1$$

ist.

Wir bekommen dann schließlich

$$\left| \frac{\zeta(\sigma_0 + it_0)}{z} - 1 \right| = \left| \frac{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_3)}{1 + \alpha_2} - 1 \right|$$

$$= \left| \frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2}{1 + \alpha_2} \right| < \frac{4\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} < \varepsilon.$$

Hiermit ist der Hilfssatz III bewiesen; d. h. es ist bewiesen: zu jedem $z \neq 0$ gibt es eine reelle Zahl $\sigma_0 > 1$ derart, daß auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ die Funktion $(\zeta(s) - z)$ beliebig kleine Werte annimmt.

§ 3.

Beweis, dass $\zeta(s)$ für $\sigma > 1$ alle Werte ausser 0 annimmt.

Ich werde zunächst den folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz IV: Es sei $z \neq 0$ beliebig gegeben; dann gibt es eine reelle Zahl $\sigma' = \sigma'(z) > 1$ derart, daß bei jedem ε des Intervalles $0 < \varepsilon < 1$ die Funktion

$$\frac{1}{\zeta(s) - z}$$

im Streifen $\sigma' + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma' + 1$ beschränkt ist, dagegen im Streifen $\sigma' - \varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma' + 1$ nicht beschränkt ist.

Beweis: Es sind beim Beweise zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $z = 1$ ist oder nicht.

Fall 1. $z \neq 1$.

Da, gleichmäßig für alle reellen t,

$$\lim_{\sigma=+\infty} \zeta(s) = 1$$

ist, ist die Funktion

$$\frac{1}{\zeta(s)-z}$$

für alle hinreichend großen reellen σ_1 in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma_1$ beschränkt. Anderseits gibt es nach dem Hilfssatze III des § 2 eine Zahl $\sigma_2 > 1$ derart, daß die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)-z}$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_2$ nicht beschränkt ist.

Es existiert folglich eine, durch einen Dedekind'schen Schnitt bestimmte, Zahl $\sigma' > 1$ derart, daß bei jedem $\varepsilon > 0$ die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)-z}$ in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma' + \varepsilon$ beschränkt ist, dagegen in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma' - \varepsilon$ nicht beschränkt ist.

Dann ist für dieses σ' die Bedingungen des Hilfssatzes IV offenbar a fortiori erfüllt.

Fall 2. $z = 1$.

Wegen $\lim\limits_{\sigma=\infty} \zeta(s) = 1$ ist für kein σ_1 die Funktion

$$\frac{1}{\zeta(s)-1}$$

in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma_1$ beschränkt, und es muß daher die im Falle 1 verwendete Beweismethode hier etwas geändert werden.

Es ist bekanntlich, und sehr leicht zu beweisen,

$$\lim_{\sigma=+\infty} \frac{\zeta(s)-1}{2^{-s}} = 1$$

und zwar gleichmäßig für alle reellen t. Hieraus folgt nunmehr unmittelbar, daß die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)-1}$ für hinreichend große σ_1 im Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_1 + 1$ (nicht aber in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq \sigma_1$) beschränkt ist. Anderseits gibt es aber nach dem Hilfssatz III des § 2 eine reelle Zahl $\sigma_2 > 1$ derart, daß die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)-1}$ auf der Geraden $\sigma = \sigma_2$ nicht beschränkt ist. Es existiert daher eine, durch einen Dedekind'schen Schnitt bestimmte, Zahl $\sigma' > 1$ derart, daß bei jedem ε des Intervalles $0 < \varepsilon < 1$ die

Funktion $\frac{1}{\zeta(s)-1}$ im Streifen $\sigma'+\varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma'+1+\varepsilon$ (also a fortiori im Streifen $\sigma'+\varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma'+1$) beschränkt ist, dagegen im Streifen $\sigma'-\varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma'+1$ nicht beschränkt ist.

Damit ist der Hilfssatz IV bewiesen.

Ich gehe nunmehr zum Beweise des Hauptsatzes über:

Hauptsatz: Es nimmt die Funktion $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert außer 0 an.

Beweis: Es sei $z \neq 0$ beliebig gegeben, und es habe $\sigma' = \sigma'(z) > 1$ die Bedeutung des Hilfssatzes IV, d. h. es sei bei jedem ε des Intervalles $0 < \varepsilon < 1$ die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)-z}$ im Streifen $\sigma'+\varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma'+1$ beschränkt, dagegen im Streifen $\sigma'-\varepsilon \leqq \sigma \leqq \sigma'+1$ nicht beschränkt. Ich werde dann beweisen: es nimmt, sogar für jedes $\delta > 0$, die Funktion $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma'-\delta$ den Wert z an.

Gesetzt, dies sei nicht der Fall; dann gäbe es eine feste Zahl $d > 0$, die ich offenbar $< \sigma'-1$ sowie $< \frac{1}{2}$ annehmen darf, derart, daß $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq \sigma'-d$ (> 1) verschieden von z wäre.

Es bezeichne unter dieser Annahme $F(s)$ einen beliebigen, für $\sigma \geqq \sigma'-d$ regulären Zweig der Funktion

$$\log(\zeta(s)-z).$$

Dann ist, im Streifen $\sigma'-d \leqq \sigma \leqq \sigma'+1$, $\Re(F(s))$ nach oben beschränkt; denn es ist in diesem Gebiete

$$\Re(F(s)) = \Re(\log(\zeta(s)-z)) = \log|\zeta(s)-z| \leqq \log(\zeta(\sigma'-d)+|z|) = k_1,$$

wo die positive Größe k_1 (sowie in der Folge $k_2 > 0, k_3 > 0, \ldots$) von s nicht abhängt.

Ferner ist, auf der Geraden $\sigma = \sigma'+d$, $\Re(F(s))$ auch nach unten beschränkt, d. h. es ist für $\sigma = \sigma'+d$

$$-\Re(F(s)) \leqq k_2;$$

denn es ist

$$-\Re(F(s)) = \log\left|\frac{1}{\zeta(s)-z}\right|$$

und, nach Voraussetzung, die Funktion $\frac{1}{\zeta(s)-z}$ für $\sigma = \sigma'+d$ beschränkt.

Nun hat aber Hr. Carathéodory bewiesen:

Es sei die analytische Funktion $F(s)$ für $|s-s_0| \leqq r$ regulär und A das Maximum von $\Re(F(s))$ für $|s-s_0| \leqq r$.

Es sei $0 < \varrho < r$. Dann ist für $|s - s_0| \leqq \varrho$

$$|\Re(F(s))| \leqq |\Re(F(s_0))| \frac{r+\varrho}{r-\varrho} + 2A \frac{\varrho}{r-\varrho}.$$

Wir wenden nun diesen Satz an auf: die Funktion

$$F(s) = \log(\zeta(s) - z),$$

den Punkt

$$s_0 = \sigma' + d + it \quad (-\infty < t < \infty)$$

und die Zahlen

$$r = 2d, \quad \varrho = \tfrac{3}{2} d.$$

Die Voraussetzungen des Satzes (d. h. insbesondere die Regularität von $F(s)$ für $|s - s_0| \leqq r$) sind offenbar erfüllt; denn es gehört ja der Kreis $|s - s_0| \leqq r$ dem Streifen $\sigma' - d \leqq \sigma \leqq \sigma' + 1$ an.

Ferner ist im Streifen $\sigma' - d \leqq \sigma \leqq \sigma' + 1$, also a fortiori im Kreise $|s - s_0| \leqq r$,

$$\Re(F(s)) \leqq k_1,$$

d. h. es ist die Zahl $A \leqq k_1$, und aus

$$\Re(F(s_0)) \leqq k_1, \quad -\Re(F(s_0)) \leqq k_2$$

folgt

$$|\Re(F(s_0))| \leqq k_3,$$

wo k_3 die größere der beiden positiven Zahlen k_1 und k_2 bedeutet.

Der Carathéodory'sche Satz ergibt alsdann für $|s - s_0| \leqq \varrho = \frac{3}{2} d$

$$|\Re(F(s))| \leqq k_3 \frac{2d + \frac{3}{2} d}{2d - \frac{3}{2} d} + 2k_1 \frac{\frac{3}{2} d}{2d - \frac{3}{2} d} = 7k_3 + 6k_1 = k_4.$$

Es wäre also im Streifen $\sigma' - \frac{d}{2} \leqq \sigma \leqq \sigma' + \frac{5}{2} d$

$$-\Re(F(s)) \leqq k_4,$$

also im Streifen $\sigma' - \frac{d}{2} \leqq \sigma \leqq \sigma' + 1$

$$-\Re(F(s)) \leqq k_5.$$

Die Funktion

$$\left| \frac{1}{\zeta(s) - z} \right| = e^{-\Re(F(s))}$$

wäre also im Streifen $\sigma' - \frac{d}{2} \leqq \sigma \leqq \sigma' + 1$ beschränkt, im Gegensatze zu den Voraussetzungen. Es muß also unsre Annahme $\zeta(s) \neq z$ für $\sigma \geqq \sigma' - d$ falsch gewesen sein. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 4.

Beweis, dass $\zeta(s)$ im Streifen $1 < \sigma < 1 + \delta$ ($\delta > 0$) alle Werte ausser 0 annimmt.

Satz: Es sei die komplexe Zahl $z \neq 0$, sowie $\delta > 0$, beliebig gegeben; dann nimmt die Funktion $\zeta(s)$ im Streifen $1 < \sigma < 1 + \delta$ den Wert z an.

Vorbemerkung: Aus diesem, für alle $\delta > 0$ giltigen, Satze folgt offenbar nach einem bekannten Schlußverfahren, daß $\zeta(s)$ im Streifen $1 < \sigma < 1 + \delta$ jeden Wert außer 0 sogar unendlich oft annimmt, also a fortiori, was in § 3 noch nicht bewiesen war, daß $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert außer 0 unendlich oft annimmt.

Beweis: Nach dem Hilfssatz II des § 1 existiert eine reelle Zahl σ' im Intervalle $1 < \sigma < 1 + \frac{\delta}{2}$ sowie eine dazu gehörige reelle Zahlenfolge $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ derart, daß

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma'} e^{i\varphi_n}) = \frac{1}{z}$$

ist.

Ich betrachte alsdann die für $\sigma > 1$ definierte, von 0 verschiedene, Funktion

$$g(\sigma) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n}),$$

wo φ_n ($n = 1, 2, \ldots$) dieselben festen (d. h. von σ unabhängigen) Zahlen sind, welche in dem obigen Produkte

$$\frac{1}{z} = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma'} e^{i\varphi_n})$$

vorkommen. (Es ist $g(\sigma)$ nicht etwa mit der im § 1 betrachteten Funktion

$$f(\sigma) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma} e^{i\varphi_n})$$

zu verwechseln, in welchem letzten Ausdruck die reellen Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ eben von σ abhängig waren.)

Dann ist speziell

$$g(\sigma') = \frac{1}{z};$$

ich wähle nunmehr eine reelle Zahl σ'' im Intervalle $\sigma' < \sigma < 1 + \frac{\delta}{2}$

derart, daß

$$g(\sigma'') \neq \frac{1}{z}$$

ist. Eine solche Wahl ist offenbar möglich; denn sonst wäre $g(\sigma)$ im ganzen Intervalle $\left(\sigma' < \sigma < 1 + \frac{\delta}{2}\right)$ konstant $\left(\text{übrigens} = \frac{1}{z}\right)$; also wäre die für $\sigma > 1$ definierte reguläre Funktion der komplexen Variabeln $s = \sigma + it$

$$G(s) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-s} e^{i\varphi_n}),$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ dieselben festen (d. h. von s unabhängigen) Zahlen sind, welche in $g(\sigma)$ vorkommen, in der ganzen Halbebene $\sigma > 1$ konstant, was offenbar, wie z. B. durch Betrachtung des Verhaltens von $G(s)$ für sehr große Werte von σ sehr leicht zu sehen, nicht der Fall ist.

Ich setze nunmehr

$$\sigma' = 1 + \delta', \quad \sigma'' = 1 + \delta'';$$

dann ist

$$0 < \delta' < \delta'' < \frac{\delta}{2}$$

und

$$g(\sigma') = \frac{1}{z}, \quad g(\sigma'') = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0),$$

wo $y \neq z$ ist.

Ich werde dann zunächst beweisen:

Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein reelles t_0, derart, daß die beiden Ungleichungen

$$\left|\frac{\zeta(\sigma' + it)}{z} - 1\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\zeta(\sigma'' + it)}{y} - 1\right| < \varepsilon$$

für $t = t_0$ gleichzeitig erfüllt sind.

Um die Existenz eines solchen t_0 zu beweisen, bestimme ich zunächst eine Zahl ε_1 derart, daß

$$0 < \varepsilon_1 < 1, \quad \frac{4\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} < \varepsilon$$

ist, und zu diesem ε_1 eine ganze Zahl N derart, daß

$$\prod_{n=N+1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma'}) - 1 < \varepsilon_1$$

ist; wegen $\sigma' < \sigma''$ ist hierbei auch

$$\prod_{n=N+1}^{n=\infty} (1+p_n^{-\sigma''}) - 1 < \varepsilon_1.$$

Es folgt alsdann, ganz wie im § 2, wenn ich wieder die Bezeichnung

$$\mu_n = \mu_n(t) = -t \log p_n + \pi$$

einführe, daß für alle reellen t

$$\frac{\zeta(\sigma'+it)}{z} = \frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_2} \prod_{n=1}^{n=N} \left(\frac{1+p_n^{-\sigma'} e^{i\varphi_n}}{1+p_n^{-\sigma'} e^{i\mu_n}}\right)$$

und

$$\frac{\zeta(\sigma''+it)}{y} = \frac{1+\beta_1}{1+\beta_2} \prod_{n=1}^{n=N} \left(\frac{1+p_n^{-\sigma''} e^{i\varphi_n}}{1+p_n^{-\sigma''} e^{i\mu_n}}\right)$$

ist, wo die vier Größen $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, $|\beta_1|$ und $|\beta_2|$ sämtlich $< \varepsilon_1$ sind.

Ich bestimme nunmehr mit Hilfe des Kronecker'schen Satzes über Diophantische Approximationen ein reelles t_0 derart, daß, für alle $n = 1, 2, \ldots N$, die Zahl $\mu_n(t_0) = -t_0 \log p_n + \pi$, wenn man sie auf der Kreisperipherie, d. h. modulo 2π, betrachtet, um so wenig von der festen Zahl φ_n abweicht, daß die beiden Ungleichungen

$$\left| \prod_{n=1}^{n=N} \left(\frac{1+p_n^{-\sigma'} e^{i\varphi_n}}{1+p_n^{-\sigma'} e^{i\mu_n}}\right) - 1 \right| < \varepsilon_1$$

und

$$\left| \prod_{n=1}^{n=N} \left(\frac{1+p_n^{-\sigma''} e^{i\varphi_n}}{1+p_n^{-\sigma''} e^{i\mu_n}}\right) - 1 \right| < \varepsilon_1$$

für $t = t_0$ erfüllt sind.

Dann ist für dieses t_0

$$\frac{\zeta(\sigma'+it_0)}{z} = \frac{1+\alpha_1}{1+\alpha_2} (1+\alpha_3)$$

und

$$\frac{\zeta(\sigma''+it_0)}{y} = \frac{1+\beta_1}{1+\beta_2} (1+\beta_3),$$

wo die sechs Größen $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, $|\alpha_3|$, $|\beta_1|$, $|\beta_2|$ und $|\beta_3|$ sämtlich $< \varepsilon_1$ sind.

Hieraus ergibt sich dann weiter, ganz wie im § 2, daß

$$\left| \frac{\zeta(\sigma'+it_0)}{z} - 1 \right| < \varepsilon$$

und

$$\left|\frac{\zeta(\sigma''+it_0)}{y}-1\right|<\varepsilon$$

ist, und es ist somit die obige Behauptung bewiesen.

Es folgt nunmehr unmittelbar die Existenz einer Folge von reellen Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ derart, daß gleichzeitig

$$\lim_{n=\infty} \zeta(\sigma'+it_n) = z$$

und

$$\lim_{n=\infty} \zeta(\sigma''+it_n) = y$$

ist.

Es sei nunmehr angenommen, daß $\zeta(s)$ im Streifen $1<\sigma<1+\delta$ verschieden von z wäre, und es bezeichne unter dieser Annahme $F(s)$ einen beliebigen, für $1<\sigma<1+\delta$ regulären Zweig der Funktion

$$\log(\zeta(s)-z).$$

Dann ist, im Streifen $1+\frac{1}{2}\delta' \leqq \sigma < 1+\delta$, $\Re(F(s))$ nach oben beschränkt, denn es ist in diesem Gebiete

$$\Re(F(s)) = \log|\zeta(s)-z| \leqq \log(\zeta(1+\tfrac{1}{2}\delta')+|z|) = k_1,$$

wo die positive Größe k_1 (sowie in der Folge $k_2>0$, $k_3>0, \ldots$) von s nicht abhängt.

Ferner ist, wegen

$$\lim_{n=\infty} (\zeta(\sigma''+it_n)-z) = y-z \neq 0,$$

für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Re(F(\sigma''+it_n)) = \log|\zeta(\sigma''+it_n)-z|$$

auch nach unten beschränkt; d. h. es ist

$$-\Re(F(\sigma''+it_n)) \leqq k_2,$$

wo k_2 von n unabhängig ist.

Wir wenden nun den Carathéodory'schen Satz an auf: die Funktion

$$F(s) = \log(\zeta(s)-z),$$

den Punkt

$$s_0 = \sigma''+it_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und die Zahlen

$$r = \delta''-\tfrac{1}{2}\delta', \quad \varrho = \delta''-\delta'.$$

Die Voraussetzungen jenes Satzes (d. h. insbesondere die Regularität von $F(s)$ für $|s-s_0|\leqq r$) sind offenbar erfüllt; denn es ge-

hört ja der Kreis $|s-s_0| \leqq r$ dem Streifen $1 < \sigma < 1+\delta$, ja sogar dem Streifen $1+\frac{1}{2}\delta' \leqq \sigma < 1+\delta$ an.

Ferner ist im Streifen $1+\frac{1}{2}\delta' \leqq \sigma < 1+\delta$, also a fortiori im Kreise $|s-s_0| \leqq r$

$$\Re(F(s)) \leqq k_1,$$

und aus

$$\Re(F(s_0)) \leqq k_1, \quad -\Re(F(s_0)) \leqq k_2$$

folgt sofort

$$|\Re(F(s_0))| \leqq k_3,$$

wo k_3 die größere der beiden Zahlen k_1 und k_2 bedeutet.

Der Carathéodory'sche Satz ergibt alsdann für $|s-s_0| \leqq \varrho = \delta''-\delta'$

$$|\Re(F(s))| \leqq k_3 \frac{2\delta''-\frac{3}{2}\delta'}{\frac{1}{2}\delta'} + 2k_1 \frac{\delta''-\delta'}{\frac{1}{2}\delta'} = k_4,$$

wo k_4 von s und n nicht abhängt.

Es wäre also speziell im Punkte $s = \sigma'+it_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, welcher vom Punkte $s_0 = \sigma''+it_n$ genau den Abstand $\varrho = \delta''-\delta' = \sigma''-\sigma'$ hat,

$$-\Re(F(s)) \leqq k_4;$$

d. h. es wäre für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma'+it_n)-z}\right| = e^{-\Re(F(\sigma'+it_n))} \leqq e^{k_4} = k_5,$$

im Gegensatze zur Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty} \zeta(\sigma'+it_n) = z.$$

Es muß also unsere Annahme $\zeta(s) \neq z$ für $1 < \sigma < 1+\delta$ falsch gewesen sein. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Bahn der von einer Wehneltkathode ausgehenden Kathodenstrahlen im homogenen Magnetfeld.

(Vorläufige Mitteilung).

(Mit einer Figur im Text).

Von

A. Bestelmeyer.

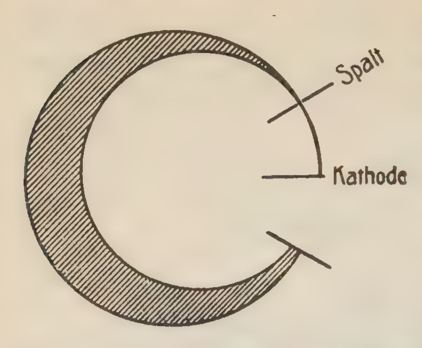
Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung vom 17. Juni 1911.

Die Verschiedenheit des von mir gefundenen Wertes[1]) der spezifischen Ladung des Elektrons bei der Geschwindigkeit Null ($\varepsilon/\mu_0 = 1{,}733 \, . \, 10^7$, reduziert nach der Relativitätstheorie) gegenüber den früheren Beobachtungen ($\varepsilon/\mu_0 =$ ca. $1{,}88 \, . \, 10^7$) legte die Frage nahe, inwieweit die große Differenz der beiden Werte eventuell durch die Verschiedenheit der Anordnung und Berechnung der Versuche bedingt ist.

Um diese Frage zu beleuchten, machte ich Bestimmungen von ε/μ aus Entladungspotential und magnetischer Ablenkung an Wehneltkathodenstrahlen. Das Resultat dieser Messungen ist in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen von Herrn Classen[2]) und Herrn Lerp[3]), daß auch diese Art der Bestimmung zu dem kleineren Werte $\varepsilon/\mu_0 = 1, 7 \ldots 10^7$ führt (Cl.: $\varepsilon/\mu = 1{,}774 \, . \, 10^7$; L.: $\varepsilon/\mu_0 = 1{,}72 \, . \, 10^7$).

Um möglichst guten Einblick in die Vorgänge zu gewinnen, verzichtete ich auf photographische Fixierung, und beobachtete

1) A. Bestelmeyer, Ann. 22, p. 429, 1907.
2) J. Classen, Phys. Z. 9, p. 762, 1908.
3) K. Th. Lerp, Inaug.-Diss. Göttingen 1911.



direkt den durch das Leuchten der Gasreste sichtbaren Kathodenstrahl auf seinem ganzen Wege. Der Strahl wurde im Innern eines Solonoids mit vertikaler Achse erzeugt und durchlief nach Passieren einer Blende noch $^5/_6$ eines vollen Kreises, in der Ebene des mittleren horizontalen Querschnitts des Solonoids und konzentrisch mit diesem. Das Entladungsgefäß war oben mit einer Glasplatte verschlossen. Durch diese hindurch wurde der Strahl beobachtet und an 6 um je 60^0 von einander abstehenden Stellen gemessen. Die unmittelbare Beobachtung ergab, daß der Strahl nicht immer aus Elektronen von einheitlicher Geschwindigkeit zusammengesetzt war. Das Aussehen des Strahles war dann von dem nebenstehenden Typus. Die Durchmesser des innersten und äußersten Randes und mithin die zugehörigen Geschwindigkeiten unterschieden sich bis zu 2,7 %. Die Schärfe der beiden Ränder war meist sehr wohl definiert. Der äußere Rand hatte ungefähr denselben Durchmesser wie der Gesamtstrahl in den Fällen, in denen dieser schmal und einheitlich erschien.

Die wiederholte Ausmessung des Strahles ergab im allgemeinen eine geringe Zunahme der Krümmung mit dem zurückgelegten Weg. Dies deutet auf eine Abnahme der Geschwindigkeit beim Durchgang durch den mit Gasresten erfüllten Raum hin. Doch ist die Größe des Effektes so gering, daß der Schluß nicht ganz sicher ist.

Aus dem Mittelwert des Durchmessers erhält man für die spezifische Ladung den Wert:

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{2P}{r^2 H^2} = \frac{2.870.10^8}{17{,}50^2 . 11{,}344^2} = 1{,}766.10^7.$$

Da die meisten Fehlerquellen die Wirkung haben, daß die Geschwindigkeit des beobachteten Strahles kleiner ausfällt, als bei der Berechnung angenommen wird, so ist dieser Wert wahrscheinlich noch etwas zu groß.

Göttingen, Physikalisches Institut der Universität, den 16. Juni 1911.

Graphische Lösung von Randwertaufgaben der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Von

C. Runge.

Vorgelegt in der Sitzung am 29. Juli 1911.

Sind auf dem Rande eines Bereiches die Werte einer Funktion $f(x, y)$ gegeben, die mit ihren ersten Ableitungen im Innern des Bereiches stetig sein und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

genügen soll, so ist die Funktion, wie man weiß, eindeutig bestimmt. In der folgenden Arbeit soll für den Fall eines einfach zusammenhängenden graphisch gegebenen Bereiches eine graphische Methode angegeben werden, um die Funktion zu ermitteln. Ehe wir aber an die eigentliche Aufgabe herantreten, muß auseinandergesetzt werden, wie sich der Zusammenhang der gesuchten Funktion $f(x, y)$ mit der Greenschen Funktion graphisch darstellen läßt.

Es sei $G(x, y)$ die Greensche Funktion, die an einer Stelle P im Innern des Bereichs wie $\log \frac{r}{a}$ (r bedeutet dabei den Abstand vom Punkte P und a irgend eine gegebene Länge) unendlich wird, an allen übrigen Punkten des Bereichs mit ihren ersten Ableitungen stetig ist, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0$$

genügt und auf dem Rande des Bereichs Null ist. Der Unterschied $G(x, y) - \log r/a$ werde mit $u(x, y)$ bezeichnet, so daß also

$$G(x, y) = \log \frac{r}{a} + u(x, y).$$

Dann ist $u(x, y)$ in dem ganzen Bereich mit seinen ersten Ableitungen stetig, genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und nimmt auf dem Rande die Werte $-\log \frac{r}{a}$ an. Wir denken uns nun die bis auf eine willkürliche rein imaginäre Konstante bestimmte analytische Funktion der komplexen Variabeln $x + yi$, deren reeller Teil $u(x, y)$ ist. Ihre imaginäre Koordinate bezeichnen wir mit $v(x, y)$ und denken uns die rein imaginäre Konstante so bestimmt, daß $v(x, y)$ im Punkte P verschwindet. Es seien x_p, y_p die Koordinaten des Punktes P und es sei

$$x - x_p + (y - y_p)i = re^{\varphi i}$$

Dann verstehen wir unter $G_1(x, y)$ den Ausdruck

$$G_1(x, y) = \varphi + v,$$

sodaß also

$$G + G_1 i = \log \frac{re^{\varphi i}}{a} + u + vi$$

$$= \log \frac{x + yi - (x_p + y_p i)}{a} + u + vi.$$

$G + G_1 i$ ist somit auch eine analytische Funktion von $x + yi$, die im Innern des ganzen Bereichs sich regulär verhält außer in P. Das Bild der Kurven $G =$ konst. und ihrer rechtwinkligen Trajektorien $G_1 =$ konst., so weit sie dem Bereiche angehören, wollen wir uns als Stromlinien je einer stationären rotationslosen Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeitsschicht vorstellen. Denken wir uns in P ein Hindernis, und denken wir uns die Flüssigkeit um das Hindernis derartig zirkulierend, daß der Rand des Bereiches eine Stromlinie bildet, so sind die Kurven $G =$ konst. die Stromlinien dieser Bewegung. P ist dabei der einzige Punkt, der von allen Stromlinien umschlungen wird. Diese Stromlinien nennen wir „die Zirkulationsstromlinien.“ Denken wir uns andrerseits in P eine Quelle und die Stromlinien des herausquellenden Wassers der Bedingung unterworfen, daß sie den Rand des Bereichs recht-

winklig treffen sollen, so stimmen sie mit den Kurven $G_1 =$ konst. überein. Wir nennen diese Kurven die Quellstromlinien. P ist dabei innerhalb des Berbichs die einzige Quelle.

Eine Funktion $f(x, y)$, die auf dem Rande gegeben ist und im Innern der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

genügt, nimmt im Punkte P den Wert an

$$f_P = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial G}{\partial n} f(x_s, y_s)\, ds,$$

wobei $\frac{\partial G}{\partial n}$ die Ableitung in Richtung der nach außen gerichteten Normalen und s die Bogenlänge des Randes bedeutet. Die Integration ist dabei um den ganzen Rand zu erstrecken. Da nun $G + G_1 i$ eine analytische Funktion von $x + yi$ ist, so ist auf dem Rande

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{dG_1}{ds},$$

wenn wir s in dem positiven Umlaufsinn wachsend annehmen. Wir können auf dem Rande G_1 anstatt s als Veränderliche einführen und erhalten so:

$$f_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\, dG_1.$$

Für die graphische Darstellung denken wir uns G_1 als Abszises und die Randwerte von f als Ordinaten dazu aufgetragen; dann ist f_P der Mittelwert von f.

Die Variable G_1 können wir den Parameter der Quellstromlinien nennen und analog G den Parameter der Zirkulationsstromlinien. G_1 stimmt im Punkte P mit dem Winkel überein, den die Quellstromlinien mit der Richtung der positiven x Achse bilden. Es empfiehlt sich, die Parameter G und G_1 in einer andern Einheit zu messen. G_1 soll bei einem ganzen Umlauf von 0 bis 256 statt von 0 bis 2π laufen. Das kommt auf dasselbe hinaus, als wenn wir die rechte Seite der Gleichung, durch die G_1 definiert wird, mit $\frac{256}{2\pi}$ multiplizieren

$$G_1 = \frac{256}{2\pi} (\varphi + v).$$

Die rechte Seite der Gleichung für G multiplizieren wir mit demselben Faktor

$$G = \frac{256}{2\pi}\left(\log\frac{r}{a} + u\right),$$

damit $G + G_1 i$ eine analytische Funktion von $x + yi$ bleibt. Diese Zählung des Parameters entspricht der Winkeleinteilung in „Achtel-Strich“ der Seeleute. Der rechte Winkel zerfällt dabei in 64 gleiche Teile. Bei der graphischen Anwendung erleichtert diese Einteilung das Verfahren, wie wir unten sehen werden, dadurch, daß sie auf der wiederholten Zweiteilung beruht. Der Mittelwert f_P wird nach dieser neuen Zählung:

$$f_P = \frac{1}{256}\int_0^{256} f dG_1.$$

In der graphischen Darstellung des Mittelwerts ist gar kein Unterschied, da bei ihr die Einheiten für f und für G_1 ohnehin willkürliche Längen sind.

Denken wir uns für unsern Bereich die Quellstromlinien und Zirkulationsstromlinien gezeichnet und zwar etwa alle Quellstromlinien, die den Parameter-Werten $G_1 = 0, 1, 2, \ldots 255$ entsprechen und alle Zirkulationsstromlinien, die den Parameter-Werten $G = 0, -1, -2, \ldots -255$ entsprechen. Dann ist damit zugleich eine konforme Abbildung unsres Bereichs auf den Kreis dargestellt. Im Kreis vom Radius a denken wir uns eine Quelle im Mittelpunkt und ziehen 256 Radien in gleichen Richtungsunterschieden von je ein Achtel Strich, dazu als Zirkulationsstromlinien konzentrische Kreise mit Radien R, derart, daß

$$\frac{256}{2\pi}\log\frac{a}{R} = +1, 2, \ldots, 255.$$

Die beiden Stromliniennetze entsprechen sich dann Masche für Masche. Wenn die Zahl der Stromlinien groß genug ist, so werden einander entsprechende Maschen nahezu einander ähnlich, so daß auch das Innere einer Masche mit ausreichender Genauigkeit auf das Innere der entsprechenden Masche bezogen werden kann. Für den Kreis sind $\frac{2\pi}{256} G_1$ und $e^{\frac{2\pi G}{256}}$ nichts anderes als die Polarkoordinaten, wobei die Länge a als Einheit gewählt ist.

Nunmehr läßt sich der Wert von $f(x, y)$ auch in jedem andern Punkte Q des Bereiches ausdrücken. Wir suchen dazu mit Hilfe des Stromliniennetzes den entsprechenden Punkt Q im Innern des

Kreises auf und denken uns zugleich die Werte von f auf dem Rande des Kreises aufgetragen als Funktion des Quellstromlinienparameters G_1. Der Wert von $f(x, y)$ im Punkte Q ist derselbe, ob wir nun den Punkt Q in dem gegebenen Bereich oder den ihm entsprechenden Kreispunkt betrachten. Der Kreispunkt Q wird nun zu einem Quellpunkt gemacht. Bezeichnet G_1^* den zugehörigen Quellstromlinienparameter, so ist wie oben:

$$f_Q = \frac{1}{256} \int_0^{256} f dG_1^*,$$

d. h. f_Q ist wieder der Mittelwert von f, nur daß f jetzt zur Abszisse G_1^* statt wie vorhin zur Abszisse G_1 aufgetragen ist. Wir wollen uns die Abhängigkeit zwischen G_1 und G_1^*, die weiter unten analytisch ausgedrückt werden soll, durch eine ungleichmäßige Skala dargestellt denken, deren Teilstriche in dem ursprünglichen Maßstab von G_1 die Stellen angeben, wo die diesen Werten von G_1 entsprechenden Werte von G_1^* gleich 0, 1, 2, ... 255 sind. Legt man diese Skala auf die ursprüngliche Abszissenachse von G_1, über der die Werte von f als Kurve aufgetragen sind, so kann man ohne Weiteres die Werte von f für die Werte $G_1^* = 0, 1, 2, \ldots 255$ ablesen und somit den Wert von f_Q berechnen oder auch graphisch ermitteln, indem man die zu den Teilpunkten der Skala gehörigen Ordinaten in gleiche Abstände bringt und so die neue Kurve f als Funktion von G_1^* zeichnet. Läßt man den Punkt Q sich auf einer Zirkulationsstromlinie verschieben, so ist es nicht nötig, die Skala, die die Abhängigkeit zwischen G_1 und G_1^* darstellt, von Neuem zu zeichnen. Man braucht sie nur an der G_1 Achse entlang zu verschieben. Die Quellstromlinie der Quelle P, auf der der Punkt Q liegt, ist auch Quellstromlinie von Q. Das Stück zwischen Q und dem Rande wollen wir dem Werte $G_1^* = 0$ entsprechen lassen. Die Symmetrie der Kreisfigur läßt sofort erkennen, daß ein im selben Abstand vom Kreismittelpunkt liegender Punkt Q' dieselbe Skala liefert wie Q, nur daß der Teilstrich $G_1^* = 0$ an eine andere Stelle der Abszissenachse G_1 geschoben werden muß.

Läßt man dagegen den Punkt Q auf eine andere Zirkulationsstromlinie rücken, so bedingt das eine Änderung der Skala. Nähert sich Q einem Randpunkte, so rücken die Skalenteile $G_1^* = 0, 1, 2, \ldots 255$ zusammen und häufen sich um den Wert G_1, der dem Randpunkt entspricht. Die Kurve, die f als Ordinate zur Abszisse G_1^* darstellt, geht dadurch mehr und mehr in eine

Parallele zur Abszissenaxe über, so daß der Mittelwert immer mehr gleich dem Randwert wird. Die Abhängigkeit zwischen G_1 und G_1^* läßt sich in analytischer Form in folgender Weise ableiten:

Der Punkt Q im Innern der Kreisfläche sei durch die komplexe Zahl

$$ce^{\varphi_0 i}$$

gegeben. Ihm entspricht nach reziproken Radien der Punkt Q'

$$c' e^{\varphi_0 i}$$

wo $cc' = a^2$ ist. Wenn z die komplexe Zahl eines beliebigen Punktes bezeichnet, so liefert uns der Ausdruck

$$\frac{z - ce^{\varphi_0 i}}{c' e^{\varphi_0 i} - z}$$

gleichzeitig die Gleichungen der Zirkulationsstromlinien und der Quellstromlinien des Punktes Q. Für die Zirkulationsstromlinien ist der absolute Betrag des Ausdrucks konstant, für die Quellstromlinien ist das Argument konstant. Auf dem Kreis mit dem Radius a ist der absolute Betrag des Ausdrucks gleich c/a und $z = ae^{\varphi i}$. Sei $u = \log a/c$ oder $a/c = e^u$ dann ist auf der Kreisperipherie

$$\frac{ae^{\varphi i} - ce^{\varphi_0 i}}{c' e^{\varphi_0 i} - ae^{\varphi i}} = \frac{c}{a} e^{\alpha i}$$

oder

$$\frac{e^u e^{(\varphi - \varphi_0) i} - 1}{e^u - e^{(\varphi - \varphi_0) i}} = e^{\alpha i}$$

Der Winkel φ ist der Parameter der Quellstromlinien des Punktes P und der Winkel α der der Quellstromlinien von Q. Bei der Winkelmessung nach Achtelstrich haben wir also zu setzen

$$G_1 = \frac{256}{2\pi} \varphi, \quad G_1^* = \frac{256}{2\pi} \alpha.$$

Der Zusammenhang zwischen φ, α, u stellt sich einfacher dar, wenn wir schreiben

$$\frac{e^{\alpha i} - 1}{e^{\alpha i} + 1} = \frac{(e^{(\varphi - \varphi_0) i} - 1)(e^u + 1)}{(e^{(\varphi - \varphi_0) i} + 1)(e^u - 1)}$$

oder in reeller Form:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{u}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\ ^{1)}.$$

Bezeichnet G_0 den Wert von G, der dem Punkte Q zukommt, so ist

$$G_0 = \frac{256}{2\pi}\log\frac{c}{a} \quad \text{also} \quad = -\frac{256}{2\pi}\cdot u.$$

Für die verschiedenen Zirkulationsstromlinien

$$G_0 = -1, -2, \ldots, -255$$

haben wir also

$$u = \frac{2\pi n}{256} \qquad (n = 1, 2, \ldots 255)$$

einzusetzen und jedes Mal für

$$\alpha = \frac{2\pi\nu}{256} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots 255)$$

die entsprechenden Werte von $\varphi - \varphi_0$ zu berechnen, um die Skalen zu finden, die den 255 Zirkulationsstromlinien entsprechen. Jede Skala dient dann aber gleichzeitig für alle 256 Punkte Q der betreffenden Zirkulationsstromlinie. Auf diese Weise lassen sich somit die Werte von $f(x, y)$ in allen Netzpunkten bestimmen[2]).

Die ganze Aufgabe läuft also darauf hinaus für einen Punkt P des gegebenen Bereiches die Zirkulationsstromlinien und Quellstromlinien zu konstruieren, und wie das gemacht werden kann, haben wir jetzt auseinander zu setzen.

Wir wählen den Punkt P möglichst weit vom Rande entfernt und zeichnen zunächst einen Entwurf eines grobmaschigen Netzes von Quellstromlinien und Zirkulationsstromlinien etwa für

$$-G, G_1 = 32n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots 7).$$

Dabei haben wir auf Folgendes zu achten. Die acht Quellstromlinien laufen in den vier Richtungen der Koordinatenachsen (deren eine wir willkürlich wählen können) und den vier Richtungen der Graden, die die rechten Winkel zwischen ihnen halbieren, vom Punkte P aus und endigen rechtwinklig auf der durch den Rand des Bereiches bestimmten Zirkulationsstromlinie $G = 0$. Die

---

1) Diese einfache Form der Gleichung verdanke ich Herrn W. Rottsieper.

2) Die Berechnung der Skalen ist dabei von der Gestalt des gegebenen Bereichs ganz unabhängig und geschieht ein für alle Mal.

andern sieben Zirkulationsstromlinien $-G = 32n$ $(n = 1, 2, \dots 7)$ schneiden die Quellstromlinien senkrecht. Die innerste Zirkulationsstromlinie muß, wenn das Netz dichter wird, mehr und mehr in einen Kreis übergehn. Schalten wir zwischen je zwei Zirkulationsstromlinien und je zwei Quellstromlinien eine neue Stromlinie des nächst dichteren Netzes, hier also

$$-G,\ G_1 = 16n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots 15)$$

ein, so wird jede Masche in vier Maschen zerteilt und diese Teile müssen, wenn das Netz fein genug wird, mehr und mehr Quadraten ähnlich werden. Diese Eigenschaft eines durch rechtwinklig sich schneidende Kurven gebildeten Vierecks, sich durch wiederholte Unterteilung in Teile teilen zu lassen, die Quadraten einigermaßen ähnlich werden, lernt man dem Viereck anzusehn, oder man lernt wenigstens durch versuchte Unterteilung sich zu überzeugen, ob das Viereck ungefähr die verlangte Eigenschaft hat oder ob seine Form erheblich von der Gestalt eines solchen abweicht. Weiter unten werden bestimmtere Kriterien angegeben, die man aber beim ersten Entwurf gut tut, noch bei Seite zu lassen.

Wenn der gegebene Bereich eine oder gar mehr als eine Symmetrieachse besitzt, so wird die Aufgabe sehr erleichtert. Denn für einen Punkt P auf einer Symmetrieachse fallen zwei Quellstromlinien mit dieser zusammen, die damit von vorne herein gegeben sind und dem Entwurf des Netzes eine höhere Sicherheit verleihn.

Durch diesen ersten Entwurf erhält man auf dem Rande des Bereiches eine Skala der Werte $G_1 = 0, 1, 2, \dots 255$, den Punkten entsprechend, wo die Quellstromlinien nach dem Entwurf endigen. Man trägt nun zur Abszisse G_1 die Werte von

$$u = -\log\frac{r}{a} = \log\frac{a}{r}$$

auf, die den durch den Entwurf ermittelten Punkten zukommen. Ihr Mittelwert gibt genähert den Wert der durch die Gleichung

$$\frac{2\pi}{256}\,G = \log\frac{r}{a} + u$$

definierten Funktion u im Punkte P.

Man überzeugt sich nun, daß dieser Mittelwert gegen eine Änderung der Quellstromlinien des Entwurfes einigermaßen unempfindlich ist, so daß sein Fehler auch dann klein bleibt, wenn der Entwurf stärker abgeändert werden müßte. Die Zeichnung

selbst gibt eine Vorstellung davon, wie weit sich wohl die Enden der Quellstromlinien auf dem Rande noch verschieben können. Daraus läßt sich beurteilen, wie weit die Verteilung der Ordinaten $\log\frac{a}{r}$ auf ihre Abszissen G_1 noch Änderungen zuläßt und wie weit das ihren Mittelwert beeinflussen wird. Ganz ebenso kann man auf einer der inneren Zirkulationsstromlinien, die von dem Rande hinreichend weit entfernt bleibt, die Werte von u auf den verschiedenen sie schneidenden Quellstromlinien ermitteln. Dabei wird der Wert u auch als ein Mittelwert gefunden aber zur Abszisse G_1^* und wieder wird der Mittelwert gegen Fehler des Entwurfs einigermaßen unempfindlich sein, sobald die betrachtete Zirkulationsstromlinie weit genug vom Rande entfernt ist. Mit den so ermittelten Werten von u und dem betrachteten Werte von G berechnet man aus der Gleichung

$$\frac{2\pi}{256}G=\log\frac{r}{a}+u$$

die Werte von r, die den Netzpunkten auf dieser Zirkulationsstromlinie zukommen. Damit läßt sich diese Stromlinie korrigieren, indem man jeden der Netzpunkte auf seiner Quellstromlinie des Entwurfes in die berechnete Entfernung r schiebt. Gegen die Fehler der Quellstromlinien des Entwurfes sind diese Korrekturen einigermaßen unempfindlich, wenn die Zirkulationsstromlinie nicht zu stark von der Kreisform abweicht. Ergeben sich auf diese Weise erhebliche Abweichungen gegen die Zirkulationsstromlinie des ersten Entwurfs, so wird man den Entwurf unter Annahme der neuen Zirkulationsstromlinie korrigieren und die Bestimmung mit dem veränderten Entwurf wiederholen, bis sich genügende Übereinstimmung ergibt.

Jetzt verfährt man ähnlich mit der durch die Gleichung

$$\frac{2\pi}{256}G_1=\varphi+v$$

definierten Funktion v. Aus ihren auf dem Rande mit Hilfe des Entwurfes ermittelten Werten, wird zunächst zur Kontrolle ihr Wert in P berechnet, der gleich Null werden muß. Alsdann berechnet man ebenso wie oben in den Netzpunkten, die auf der betrachteten Zirkulationsstromlinie liegen, die Werte von v und findet mit den den Netzpunkten entsprechenden G_1 die Werte von φ, die nun mit den oben gefundenen r die Netzpunkte bestimmen. Ergeben sich auf diese Weise Abweichungen von den Netzpunkten

des Entwurfs, so werden die neuen Punkte festgehalten und damit ein verbesserter Entwurf konstruiert, mit dem die Rechnung eventuell zu wiederholen ist. Ergibt sich kein Unterschied mehr, so geht man zur nächsten Zirkulationsstromlinie über, die um eine oder mehrere Maschen weiter dem Rande zu liegt, und wendet dasselbe Verfahren auf diese an. In dieser Weise verbessert man das Netz schrittweise, bis es auch in der Nähe des Randes nicht mehr wesentlich verbessert werden kann. Unter Umständen wird es sich empfehlen, für mehr als einen Punkt P ein Stromliniennetz zu zeichnen, und jedes für die Berechnung der gesuchten Werte in solchen Punkten zu verwenden, die in der Nähe der Quelle des betreffenden Netzes liegen. Jeder Quellpunkt muß einem folgenden hinreichend nahe liegen, um ihn mit genügender Sicherheit in sein Netz aufzunehmen.

Um zu kontrollieren, wie genau das konstruierte Netz ist, zeichnen wir in den gegebenen Bereich die Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. ein. Das geschieht in der Weise, daß wir von P aus nach allen Seiten in Winkelabständen von je ein Achtel Strich (gleich $\frac{1}{256}$ von 360^0) grade Linien ziehn und um P als Mittelpunkt mit den Radien R, wo

$$\log \frac{a}{R} = \frac{2\pi}{256} n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Kreise schlagen. Die Länge a wollen wir dabei so wählen, daß der Kreis vom Radius a den gegebenen Bereich umfaßt, aber nicht erheblich über ihn hinausreicht. Diese konzentrischen Kreise und Radien bilden ebenfalls ein Netz von Quell- und Zirkulationsstromlinien, das aber von der Gestalt des gegebenen Bereiches unabhängig ist und daher ein für alle Mal in zahlreichen Kopien hergestellt werden kann. Wir können uns den Bereich von vorne herein auf einer solchen Kopie gegeben denken und den ersten Entwurf seines Stromliniennetzes mit seinen sich ergebenden Korrekturen darauf zeichnen.

In den Schnittpunkten der beiden Stromliniennetze nehmen u und v die Werte

$$\frac{2\pi}{256} n \qquad (n \text{ ganzzahlig})$$

an. Durch graphische Interpolation finden wir aus ihnen die Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. Die Differenz der u- oder v-Werte ist dabei für benachbarte Kurven gleich $\frac{2\pi}{256}$.

Die Kurven $v =$ konst. müssen, wenn unsre Konstruktion richtig war, die Kurven $u =$ konst. rechtwinklig schneiden.

Die Randpunkte der Kurven $u =$ konst. sind sicher richtig. Nach der folgenden Methode können wir feststellen, wie weit sie auch im Innern richtig sind.

Es mögen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ die wahren Lösungen bezeichnen, während u und v unsere auf graphischem Wege ermittelten Näherungsfunktionen sind. Die Abweichungen $u-\bar{u}$ und $v-\bar{v}$ wollen wir mit U, V bezeichnen. Da nun

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}-\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{dx}=0,$$

so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Wir bezeichnen diese beiden Größen mit L und M

$$L=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad M=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Die Größen L und M lassen sich in den Netzpunkten des u-, v-Netzes graphisch ermitteln. Denn es ist

$$L+Mi=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,i\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\,i\right)i$$

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\,i$ ist der Gradient von u. Wir finden ihn graphisch, indem wir orthogonal durch die Kurven $u =$ konst. gehen und u als Funktion der Bogenlänge der orthogonalen Trajektorie darstellen. Der Differentialquotient liefert die Länge des Vektors. Analog findet man den Gradienten von v, den Vektor $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\,i.$ Den Gradienten von v schwenkt man um 90^0 im positiven Drehungssinn und addiert ihn geometrisch zum Gradienten von u. Die Summe liefert den Vektor $L+Mi$. In den übrigen Punkten sind die Werte von L und M durch Interpolation zu konstruieren. Nun ist bekanntlich[1]) im Punkte P, da U auf dem Rande verschwindet,

$$U=-\frac{1}{256}\int\left(\frac{\partial G}{\partial x}\,L+\frac{\partial G}{\partial y}\,M\right)dw,$$

1) Siehe Hilbert, Theorie der Integralgleichungen 5te Mitteilung. Nachr. d. Göttinger Ges. d. Wiss. 1906.

wo dw ein Flächenelement bedeutet und die Integration über den Bereich zu erstrecken ist.

$$\frac{\partial G}{\partial x} L + \frac{\partial G}{\partial y} M$$

ist das skalare Produkt der beiden Vektoren

$$L + Mi \quad \text{und} \quad \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} i.$$

Bezeichnet daher ϑ den Winkel, den die beiden Vektoren mit einander bilden, so ist

$$U = -\frac{1}{256} \int \sqrt{L^2 + M^2} . \cos\vartheta . \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2} dw$$

oder

$$U = -[\sqrt{L^2 + M^2} . \cos\vartheta] \cdot \frac{1}{256} \int \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2} dw$$

wo

$$[\sqrt{L^2 + M^2} \cos\vartheta]$$

einen Mittelwert von $\sqrt{L^2 + M^2} . \cos\vartheta$ bedeutet, bei dem die Gewichtsverteilung durch die Flächenelemente multipliziert mit der absoluten Größe des Gradienten von G definiert ist. In dem übrig bleibenden Integral führen wir als Integrationsvariable den Parameter G_1 und die Bogenlänge s der Quellstromlinien (von P zum Rande wachsend) ein. Ist σ die Bogenlänge einer Zirkulationsstromlinie G (in derselben Richtung wie G_1 wachsend) so ist

$$\frac{dG}{ds} = \frac{dG_1}{d\sigma}$$

und daher

$$\sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2} dw = \frac{dG}{ds} ds\, d\sigma = dG_1 ds$$

und somit

$$\frac{1}{256} \int \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2} dw = \frac{1}{256} \int\int dG_1 ds = s_m$$

s_m bedeutet dabei den Mittelwert der Länge der Quellstromlinien, die Länge als Funktion von G_1 aufgetragen.

Die Abweichung $\bar{u} - u$ der gefundenen Funktion u von der wahren Lösung $\bar{u}$ ergibt sich also im Punkte P

$$\bar{u} - u = [\sqrt{L^2 + M^2} . \cos\vartheta]\, s_m.$$

Aus der Zeichnung des Stromliniennetzes läßt sich ein Näherungswert von s_m entnehmen, so daß wir also aus der Größe des Vektors

$$L+Mi$$

auf den Fehler von u schließen können. Mit Hilfe des genähert bekannten Gradienten von u kann man aus dem Fehler von u wieder auf die Größe der Quer-Verschiebung schließen die an der u-Kurve angebracht werden müßte um sie an die richtige Stelle zu bringen.

Für andere Punkte des Bereiches, deren Quellstromlinien nicht gezeichnet sind, läßt sich gleichwohl aus der Gestalt des Bereiches eine obere Grenze für die mittlere Länge der Quellstromlinien aus der Anschauung entnehmen, so daß sich auch in solchen Punkten der Fehler von u abschätzen läßt.

Eine andere graphische Methode das u-, v-Netz zu prüfen, beruht auf der folgenden Überlegung.

In der Umgebung eines Punktes Q, den wir zum Nullpunkt der komplexen Zahlenebene $x+yi$ machen wollen, verhalte sich die analytische Funktion $u+vi$ regulär und ihr Differentialquotient sei von Null verschieden, so daß sich auch $x+yi$ nach Potenzen der Änderung von $u+vi$ entwickeln läßt. Wir wollen uns u, v als Funktionen des Orts vorstellen, die sich nicht ändern, wenn wir das rechtwinklige Koordinatensystem drehen oder die Längeneinheit verändern. Dann können wir das Koordinatensystem so angenommen denken, daß der Differentialquotient $u+vi$ nach $x+yi$ im Nullpunkt gleich 1 wird. Nun bezeichne δ eine Änderung von $u+vi$, so wird also die Entwicklung von $x+yi$ nach Potenzen von δ mit δ anfangen.

$$x+yi = \delta+(a_1+b_1 i)\delta^2+(a_2+b_2 i)\delta^3+(a_3+b_3 i)\delta^4+(a_4+b_4 i)\delta^5+\cdots$$

Die Koordinaten der Kurve $v=$ konst. die durch den Nullpunkt läuft, erhalten wir, wenn wir für δ eine reelle Größe einsetzen $\delta=\varepsilon$; die Koordinaten der Kurve $u=$ konst., wenn wir eine rein imaginäre Größe $\delta=\varepsilon i$ einsetzen. Mithin ist für die Kurve $v=$ konst.

$$x = \varepsilon+a_1\varepsilon^2+a_2\varepsilon^3+a_3\varepsilon^4+a_4\varepsilon^5+\cdots$$

$$y = b_1\varepsilon^2+b_2\varepsilon^3+b_3\varepsilon^4+b_4\varepsilon^5+\cdots$$

für die Kurve $u=$ konst. dagegen

$$x = -a_1\varepsilon^2+b_2\varepsilon^3+a_3\varepsilon^4-b_4\varepsilon^5+\cdots$$

$$y = \varepsilon-b_1\varepsilon^2-a_2\varepsilon^3+b_3\varepsilon^4+a_4\varepsilon^5+\cdots$$

Wir wollen nun die vier benachbarten Netzpunkte A, B, C, D betrachten, die auf den durch den Anfangspunkt 0 laufenden Kurven $v =$ konst. und $u =$ konst. liegen. A und B sollen auf der Kurve $v =$ konst. liegen und A soll der Änderung $-\varepsilon$, B der Änderung $+\varepsilon$ von u entsprechen. Analog sollen C und D auf der Kurve $u =$ konst. liegen, C der Änderung $-\varepsilon$, D der Änderung $+\varepsilon$ von v entsprechend. Die Koordinaten von A, B, C, D berechnen sich demnach aus den Formeln:

$$x_A = -\varepsilon + a_1\varepsilon^2 - a_2\varepsilon^3 + a_3\varepsilon^4 - a_4\varepsilon^5 + \cdots, \quad y_A = b_1\varepsilon^2 - b_2\varepsilon^3 + b_3\varepsilon^4 - b_4\varepsilon^5 + \cdots$$

$$x_B = \varepsilon + a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^3 + a_3\varepsilon^4 + a_4\varepsilon^5 + \cdots, \quad y_B = b_1\varepsilon^2 + b_2\varepsilon^3 + b_3\varepsilon^4 + b_4\varepsilon^5 + \cdots$$

$$x_C = -a_1\varepsilon^2 - b_2\varepsilon^3 + a_3\varepsilon^4 + b_4\varepsilon^5 + \cdots, \quad y_C = -\varepsilon - b_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon^3 + b_3\varepsilon^4 - a_4\varepsilon^5 + \cdots$$

$$x_D = -a_1\varepsilon^2 + b_2\varepsilon^3 + a_3\varepsilon^4 - b_4\varepsilon^5 + \cdots, \quad y_D = \varepsilon - b_1\varepsilon^2 - a_2\varepsilon^3 + b_3\varepsilon^4 + a_4\varepsilon^5 + \cdots$$

Für die Vektoren AB und CD ergeben sich daraus die Komponenten

AB: $2\varepsilon + 2a_2\varepsilon^3 + 2a_4\varepsilon^5 +$ Gl. 7. Ordn., $2b_2\varepsilon^3 + 2b_4\varepsilon^5 +$ Gl. 7. Ordn.

CD: $2b_2\varepsilon^3 - 2b_4\varepsilon^5 +$ Glieder 7. Ordn., $2\varepsilon - 2a_2\varepsilon^3 + 2a_4\varepsilon^5 +$ Gl. 7. Ordn.

oder wenn man unter $\overline{AB}$ den um 90° im positiven Sinne gedrehten Vektor versteht:

$\overline{AB}$: $-2b_2\varepsilon^3 - 2b_4\varepsilon^5 +$ Gl. 7. Ordn., $2\varepsilon + 2a_2\varepsilon^3 + 2a_4\varepsilon^5 +$ Gl. 7. Ordn.

Folglich unterscheiden sich die Vektoren CD und $\overline{AB}$ um den Vektor

$CD - \overline{AB}$: $4b_2\varepsilon^3 +$ Glieder 7. Ordn., $-4a_2\varepsilon^3 +$ Glieder 7. Ordn.

Nimmt man statt des Intervalls ε das Intervall 2ε und bezeichnet mit $A'\, B'\, C'\, D'$ die A, B, C, D analogen Punkte, so ergibt sich ebenso der Vektor

$C'D' - \overline{A'B'} = 4b_2(2\varepsilon)^3 +$ Gl. 7. Ordn., $-4a_2(2\varepsilon)^3 +$ Gl. 7. Ordn.

oder

$$\frac{C'D' - \overline{A'B'}}{8} = CD - \overline{AB} + \text{Gl. 7. Ordn.}$$

Mit andern Worten ist ε klein genug, daß für die Zeichnung die Glieder 3. Ordnung unmerklich sind, so müssen die Vektoren AB und CD gleich lang sein und auf einander senkrecht stehn. Sind die Glieder 3. Ordnung nicht unmerklich, so daß $\overline{AB}$ von CD merklich verschieden ist, so muß, wenn nur die Glieder 7. Ordnung unmerklich sind, der vektorielle Unterschied zwischen den beiden

Vektoren $\overline{AB}$ und CD mit wachsendem ε die gleiche Richtung behalten und seine Länge muß proportional ε^3 zunehmen.

Berechnen wir andrerseits den Mittelpunkt E der Verbindungslinie AB und den Mittelpunkt F der Verbindungslinie CD:

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = a_1 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^4 + a_5 \varepsilon^6 + \text{Gl. 8. O.},$$

$$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = b_1 \varepsilon^2 + b_3 \varepsilon^4 + b_5 \varepsilon^6 + \text{Gl. 8. O.},$$

$$x_F = \frac{x_C + x_D}{2} = -a_1 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^4 - a_5 \varepsilon^6 + \text{Gl. 8. O.},$$

$$y_F = \frac{y_C + y_D}{2} = -b_1 \varepsilon^2 + b_3 \varepsilon^4 - b_5 \varepsilon^6 + \text{Gl. 8. O.}$$

und daraus den Mittelpunkt S der Verbindungslinie von E und F

$$\frac{x_E + x_F}{2} = a_3 \varepsilon^4 + \text{Gl. 8. O.}, \quad \frac{y_E + y_F}{2} = b_3 \varepsilon^4 + \text{Gl. 8. O.}$$

Mit andern Worten ist ε klein genug, daß die Glieder 4. Ordnung nicht merklich sind, so fällt der Schwerpunkt S von A, B, C, D in den Punkt O, wo sich die beiden Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. kreuzen. Sind die Glieder 4. Ordnung dagegen nicht unmerklich, wohl aber die Glieder 8. Ordnung, so wird der Vektor OS mit wachsendem ε seine Richtung nicht ändern und seine Länge wird proportional ε^4 wachsen.

Es ist vielleicht noch nützlich die Komponenten des Vektors EF hinzuschreiben:

$$EF: \; -2a_1 \varepsilon^2 + \text{Gl. 6. O.}, \quad -2b_1 \varepsilon^2 + \text{Gl. 6. O.}$$

So sind also in der Entwicklung von x und y nach Potenzen von ε:

die Glieder 2. O durch den Vektor $\frac{FE}{2}$ bis zu Gl. 6. O.

die Glieder 3. O. durch den Vektor $\frac{CD - \overline{AB}}{4}$ bis zu Gl. 7. O.

die Glieder 4. O. durch den Vektor OS bis zu Gl. 8. O.

bestimmt.

Wenn man an Stelle der analytischen Funktion $u + vi$ die analytische Funktion

$$(u + vi)(1 + i) = u - v + (u + v)i$$

betrachtet, so kann man das ihr entsprechende Netz der Kurven $u-v=$ konst., $u+v=$ konst. für dasselbe Intervall ε aus dem ersten Netz graphisch ableiten, indem man die diagonal verlaufenden Kurven zeichnet. Zeichnet man in dieses abgeleitete Netz nochmal die Diagonalkurven ein, so ergeben sich die Kurven des ersten Netzes wieder aber zwischen je zweien von ihnen die Kurve, die der Hälfte des Intervalls entspricht. Auf diese Weise lassen sich zwischen die Netzpunkte eines gegebenen Netzes neue einschalten.

Die Punkte A, B, C, D bilden in dem Netz der Diagonalkurven die Eckpunkte einer Masche für ein Intervall, das doppelt so groß ist, wie das des ersten Netzes. Folglich können wir den oben gefundenen Satz auch so aussprechen:

Wenn die Glieder dritter Ordnung nicht in Betracht kommen, so müssen die Diagonalen einer Masche gleich lang sein und auf einander senkrecht stehn. Dieser Satz muß auch für das ursprüngliche Netz gelten.

Wenn die Glieder 4. Ordnung nicht merklich sind, so haben wir den Satz:

Der Schwerpunkt der Eckpunkte einer Masche fällt mit dem Schnittpunkt der Diagonalkurven zusammen.

Diese Sätze lassen sich in mannigfacher Weise anwenden, um die Richtigkeit eines Netzes zu prüfen, oder um aus einer Reihe von Netzpunkten andere abzuleiten. Die Prüfung geschieht zweckmäßig in der Weise, daß man auf Pauspapier zwei sich senkrecht schneidende Grade zeichnet. Man legt das Pauspapier so auf das Netz, daß die beiden Graden in die Diagonalen fallen und vergleicht dann mit einem Stellzirkel durch das Pauspapier hindurch die Längen der beiden Diagonalen.

Sind zwei benachbarte Netz-Kurven z. B. $u=$ konst. gegeben und auf ihnen je ein Punkt, derart, daß die beiden Punkte demselben Wert von v entsprechen, so findet man bei Vernachlässigung der Glieder, die in ε von der dritten Ordnung sind, die übrigen auf den beiden Kurven liegenden Netzpunkte in der folgenden Weise. Man legt das Pauspapier mit den beiden sich senkrecht schneidenden Graden so auf die Zeichnung, daß die eine Grade durch den einen, die andere durch den andern der beiden gegebenen Punkte läuft. Dreht man nun das Pauspapier, ohne diese Bedingung zu verletzen, so ändern sich die Abschnitte der beiden Graden, die zwischen den beiden Kurven $u=$ konst. liegen. Durch Probieren findet man alsbald die Lage, wo die Abschnitte gleich lang sind und sticht mit der Spitze des Stellzirkels, mit

dem man die Längen vergleicht, die Endpunkte der Abschnitte ein. Von den so gefundenen zwei neuen Punkten geht man in derselben Weise wieder zu zwei neuen über usw.

Ist eine Netzkurve z. B. $u =$ konst. mit den auf ihr liegenden Netzpunkten gegeben, so kann man bei Vernachlässigung der Glieder, die in ε von der dritten Ordnung sind, die benachbarten Netzpunkte in der folgenden Weise finden. Es seien A, O, B drei auf einander folgende Netzpunkte auf der Kurve $u =$ konst. Man bestimmt zunächst den Punkt E in der Mitte zwischen A und B, zieht EO und verlängert es über O hinaus um sich selbst bis F. Durch F zieht man eine Grade senkrecht zu AB und trägt auf ihr von F aus die halbe Länge von AB nach beiden Seiten ab. Dann erhält man die benachbarten Netzpunkte C und D.

Will man die Glieder dritter und vierter Ordnung berücksichtigen, so betrachte man die so gefundenen Punkte C, D als erste Annäherungen für die gesuchten Netzpunkte und verbessere sie in folgender Weise. Seien A' und B' die beiden nächsten Netzpunkte auf der gegebenen Kurve $u =$ konst., A' dem A und B' dem B benachbart. Dann sind nach den oben entwickelten Formeln die Komponenten der Vektoren AB und $A'B'$

$$AB: \; 2\varepsilon + 2a_2\varepsilon^3 + \text{Gl. 5. O}, \qquad 2b_2\varepsilon^3 + \text{Gl. 5. O.}$$

$$A'B': \; 4\varepsilon + 2a_2(2\varepsilon)^3 + \text{Gl. 5. O.}, \quad 2b_2(2\varepsilon)^3 + \text{Gl. 5. O.}$$

folglich

$$\frac{1}{3}\left(AB - \frac{A'B'}{2}\right): \; -2a_2\varepsilon^3 + \text{Gl. 5. O.}, \quad -2b_2\varepsilon^3 + \text{Gl. 5. O.}$$

Vernachlässigt man die Glieder vierter Ordnung, so ist F nicht mehr zu korrigieren. Der Vektor FD dagegen ist um den um $+90^0$ gedrehten Vektor $\frac{1}{3}\left(AB - \frac{A'B'}{2}\right)$ und FC um den entgegengesetzten Vektor zu korrigieren. Will man auch die Glieder vierter Ordnung berücksichtigen, so ist außer E auch die Mitte E' von A' und B' zu konstruieren. Dann ist nach den obigen Formeln

$$\frac{OE'}{4} - OE: \; 3a_3\varepsilon^4 + \text{Gl. 6. O.}, \quad 3b_3\varepsilon^4 + \text{Gl. 6. O.}$$

und mithin

$$OF = -OE + \frac{2}{3}\left(\frac{OE'}{4} - OE\right) + \text{Gl. 6. O.}$$

An den in erster Näherung gefundenen Punkt F ist also noch der Vektor $\frac{2}{3}\left(\frac{OE'}{4} - OE\right)$ anzutragen und damit verschieben sich C und D um denselben Vektor.

Hat man C und D konstruiert, so kann man die übrigen Netzpunkte der durch sie hindurchlaufenden Kurven $u =$ konst. entweder nach derselben Methode oder unter Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung auch nach dem Diagonalensatz ermitteln. Man verbindet z. B. A und C durch eine Grade und fällt von O auf AC ein Lot, dessen Länge gleich der von AC gemacht wird. Der Endpunkt liefert den zu A und C benachbarten Netzpunkt. Der Vergleich mit der ersten Methode gibt zu erkennen, ob die Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung einen merklichen Unterschied ergibt. Ist das nicht der Fall, so wird man mit der zweiten Methode fortfahren.

Denkt man sich einen der Punkte der zu ermittelnden Reihe z. B. den Punkt C mit einem Fehler behaftet, so wird dieser Fehler bei Anwendung der zuletzt genannten Methode auch Fehler der folgenden Punkte erzeugen. Der Vektor AC wird, wenn C um einen gewissen Vektor f aus der wahren Lage verschoben ist, um denselben Vektor verändert sein. Wird nun AC um 90^0 gedreht und von O aus abgetragen, so wird der so ermittelte Netzpunkt offenbar um den um 90^0 in dem gleichen Sinne gedrehten Vektor f von seiner wahren Lage entfert sein (die Glieder 3. Ordn. als unmerklich angesehn). Der folgende Netzpunkt wird um den um 180^0 gedrehten Vektor f aus seiner wahren Lage entfernt sein, der nächste 270^0 u. s. f. Denkt man sich die wahre Kurve $u =$ konst. gezeichnet, so werden daher die ermittelten Punkte auf einer Kurve liegen, die sich wellenförmig auf die wahre Kurve aufsetzt, wobei auf jeder Welle vier Punkte liegen. Sind die Maschen eng genug gewählt, daß die wahren Kurven durch vier auf einander folgende Netzpunkte mit gleichmäßiger Krümmung verlaufen, so wird man an der wellenförmigen Lage der konstruierten Punkte den Fehler sogleich erkennen und bei der Einzeichnung der Kurve beseitigen.

Die ganze in der vorliegenden Arbeit auseinandergesetzte Methode hat einen starken experimentellen Einschlag, und so läßt sich auch ihre Zweckmäßigkeit ja sogar ihre Durchführbarkeit eigentlich erst durch den Versuch nachweisen. Resultate, die mit dieser Methode gewonnen sind, werden demnächst vorgelegt werden.

Formeln zur Berechnung der optischen Konstanten einer Metallschicht von beliebiger Dicke aus den Polarisationszuständen des reflektierten und des durchgegangenen Lichts.

Von

K. Försterling.

(Mit Beobachtungen von N. Galli.)

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 1. Juli 1911.

In einer früheren Arbeit[1]) hatte ich Formeln angegeben, welche das optische Verhalten dünner Metallschichten darstellten, solange $4\pi\, \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 \frac{l}{\lambda}$ klein neben 1 war. Hier soll nun ein Weg angegeben werden, welcher gestattet, in voller Strenge die optischen Konstanten einer Metallschicht (die als homogen vorausgesetzt ist) von beliebiger Dicke aus geeignet angestellten Polarisationsbeobachtungen zu berechnen.

Die Voraussetzung ist, daß die Schicht sich zwischen zwei gleichen Medien befindet. Es gilt dann:

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \frac{\mathfrak{r}_s}{\mathfrak{r}_p} \frac{1-\mathfrak{r}_p^2\,\mathfrak{e}^{-2}}{1-\mathfrak{r}_s^2\,\mathfrak{e}^{-2}}, \qquad \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} = \frac{\mathfrak{d}_s \mathfrak{d}_s'}{\mathfrak{d}_p \mathfrak{d}_p'} \frac{1-\mathfrak{r}_p^2\,\mathfrak{e}^{-2}}{1-\mathfrak{r}_s^2\,\mathfrak{e}^{-2}}.$$

$$\frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \operatorname{tg}\chi_R\, e^{i\delta_R} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} = \operatorname{tg}\chi_D\, e^{i\delta_D}$$

sind beobachtbare Größen, die aber in sehr komplizierter Weise von den optischen Konstanten und der Dicke der Schicht abhängen. Daher knüpft man passend an die Größe:

1) N. Galli und K. Försterling, Göttinger Nachr. 1911, S. 58. Die Bezeichnungen sind hier dieselben, wie dort.

$$(2)\ \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p}\frac{\mathfrak{D}_p}{\mathfrak{D}_s} = \frac{\mathfrak{r}_s}{\mathfrak{r}_p}\frac{\mathfrak{d}_p\mathfrak{d}_p'}{\mathfrak{d}_s\mathfrak{d}_s'} = -\left(c^2 - \frac{a^2}{\mathfrak{n}_1^2}\right) = -\left(c^2 - a^2\frac{n_1^2 - k_1^2 + 2in_1k_1}{(n_1^2+k_1^2)^2}\right)$$

an, welche von der Dicke der Schicht unabhängig ist. Dieser Ausdruck rechts ist identisch mit der rechten Seite der ersten Gleichung auf Seite 5 der zitierten Abhandlung. In der Tat geht auch die linke Seite unserer Gleichung in der dort benutzten Annäherung für sehr kleine Dicke in $\frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p}$ über. Setzt man zur Abkürzung $\frac{\operatorname{tg}\chi_R}{\operatorname{tg}\chi_D} = \operatorname{tg}\chi$, $\delta_R - \delta_D = \delta$, so ist

$$(3)\quad \begin{aligned} \operatorname{tg}^2\chi &= c^4 + \frac{a^2}{(n_1^2+k_1^2)^2}\{a^2 - 2c^2(n_1^2 - k_1^2)\} \\ \operatorname{tg}\delta &= -\frac{2a^2 n_1 k_1}{c^2(n_1^2+k_1^2)^2 - a^2(n_1^2 - k_1^2)} \end{aligned}$$

Man sieht, daß $\operatorname{tg}\delta$ nur dann ∞ werden kann, wenn $n_1 > k_1$ ist. In diesem Falle gilt:

$$(4)\qquad \operatorname{cotg}^2\bar{\varphi} = \frac{n_1^2 - k_1^2}{(n_1^2+k_1^2)}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\bar{\chi}}{\sin^2\bar{\varphi}} = \frac{2n_1k_1}{(n_1^2+k_1^2)^2}.$$

Ist $k_1 > n_1$, so ist $\bar{\varphi}$ nicht reell. In diesem Falle mögen $\operatorname{cotg}^2\bar{\varphi}$ und $\frac{\operatorname{tg}\bar{\chi}}{\sin^2\bar{\varphi}}$ Abkürzungen sein, die wir durch (4) definieren. Denn durch $\bar{\varphi}$ und $\bar{\chi}$ läßt sich χ und δ in sehr einfacher Weise ausdrücken (analog den Eigenschaften von Hauptazimut und Haupteinfallswinkel bei der Reflexion an massiven Metallen). Da nämlich

$$\frac{1}{(n_1^2+k_1^2)^2} = \operatorname{cotg}^4\bar{\varphi} + \frac{\operatorname{tg}^2\bar{\chi}}{\sin^4\bar{\varphi}}$$

ist, so folgt:

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\dfrac{\operatorname{tg}\bar{\chi}}{\sin^2\bar{\varphi}}}{\operatorname{cotg}^2\bar{\varphi} - \operatorname{cotg}^2\varphi}$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2\chi}{\sin^4\varphi} - \frac{\operatorname{tg}^2\bar{\chi}}{\sin^4\bar{\varphi}} = (\operatorname{cotg}^2\varphi - \operatorname{cotg}^2\bar{\varphi})^2$$

(die Größe $\frac{\operatorname{tg}\chi}{\sin^2\varphi}$ hat also bei $\varphi = \bar{\varphi}$, falls $\bar{\varphi}$ reell, ein Minimum).

Um aus dem beobachteten χ und δ die Konstanten der Schicht

zu berechnen, hat man (5) nach $\operatorname{cotg}^2 \bar{\varphi}$ und $\frac{\operatorname{tg} \bar{\chi}}{\sin^2 \bar{\varphi}}$ aufzulösen; man erhält:

$$
(6) \quad \begin{aligned}
\operatorname{cotg}^2 \bar{\varphi} &= \operatorname{cotg}^2 \varphi \mp \frac{\operatorname{tg} \chi}{\sin^2 \varphi} \cos \delta = \frac{n_1^2 - k_1^2}{(n_1^2 + k_1^2)^2} \\
\frac{\operatorname{tg} \bar{\chi}}{\sin^2 \bar{\varphi}} &= \qquad \pm \frac{\operatorname{tg} \chi}{\sin^2 \varphi} \sin \delta = \frac{2 n_1 k_1}{(n_1^2 + k_1^2)^2}
\end{aligned}
$$

In der ersten Gleichung ist das Vorzeichen so zu wählen, daß

$$\pm (\operatorname{cotg}^2 \bar{\varphi} - \operatorname{cotg}^2 \varphi) \frac{1}{\cos \delta} > 0.$$

Zu beachten ist, daß $\operatorname{cotg}^2 \bar{\varphi}$ nur ein Symbol ist und ev. negativ sein kann. Das Vorzeichen der 2ten Gleichung ist bestimmt durch:

$$\pm \frac{\operatorname{tg} \chi}{\sin^2 \varphi} \sin \delta > 0.$$

Es bleibt nun noch übrig, einen Weg zur Berechnung der Dicke anzugeben. Es gelang mir indes nicht, einfache Formeln zu erhalten. Am besten knüpft man wohl an die Schwingungsform des durchgegangenen Lichtes an[1]). Es ist:

$$\frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} = \frac{(c + \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1)^2 - (c - \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1)^2 e^{-2}}{(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{n}_1 c)^2 - (\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{n}_1 c)^2 e^{-2}},$$

also

$$e^{-4\pi \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1 \frac{l}{\lambda}} = \frac{(c + \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1)^2 - (\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{n}_1 c)^2 \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p}}{(c - \mathfrak{n}_1 \mathfrak{c}_1)^2 - (\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{n}_1 c)^2 \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p}}.$$

Für sehr dünne Schichten versagt diese Methode, da hier in Annäherung $\frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} = 1$ ist. Für diesen Fall wird man zur Dickenbestimmung die Formeln, die ich in der oben zitierten Arbeit gegeben habe, wobei außer Beobachtungen mit 2 gleichen Medien auch solche mit 3 verschiedenen Medien herangezogen werden, benutzen können.

Ebenfalls kann man bei so großen Schichtdicken, daß die Intensität des durchgegangenen Lichtes Polarisationsmessungen nicht mehr erlaubt, den hier gegebenen Weg nicht einschlagen. In diesem Falle kommen indes die Zickzackreflexionen innerhalb der

1) Vgl. auch W. Betz, Diss. Leipzig. 1905.

Schicht nicht in Frage; man kann also dann die Konstanten wie bei einem massiven Metall bestimmen. Zur Bestimmung der Dicke bleibt dann die Interferenzmethode, die namentlich von O. Wiener[1]) ausgearbeitet ist: Man erzeugt die Interferenzstreifen zwischen 2 planen Glasplatten, von denen die eine zum Teil von der Schicht bedeckt ist und mißt den am Rande der Schicht auftretenden Sprung der Streifen. Da man die Phasenänderung des an der Schicht reflektierten Lichtes gegen das einfallende aus den Konstanten angeben kann, so liefert die Interferenzmethode schon in ihrer einfachsten Gestalt völlig exakt die Dicke der Schicht.

Zur Illustration der Theorie gebe ich im Folgenden einige Beobachtungen, die Frau N. Galli im hiesigen Institut angestellt hat, wieder. Beobachtet wurden bisher chemisch niedergeschlagene Silberschichten und Platinschichten. Letztere waren aus einer von der Gold- und Silberscheideanstalt, Frankfurt, bezogenen Platinierungslösung hergestellt.

φ	δ_B	δ_D	χ_B	χ_D	$\frac{tg\,\chi}{\sin^2\varphi}\cos\delta$	$\frac{tg\,\chi}{\sin^2\varphi}\sin\delta$	$\cot g^2\varphi \pm \frac{tg\,\chi}{\sin^2\varphi}\cos\delta$	
67° 20′	83° 0′	180°	10° 40′	45°	0,03	0,22	0,15	Sehr dünne
64 20	105 0	180	11 30	45	— 0,07	0,24	0,16	Silberschich
61 10	120 10	180	12 20	45	— 0,14	0,24	0,16	
58 10	138 10	180	14 30	45	— 0,27	0,24	0,11	
55 0	148 10	180	16 40	45	— 0,39	0,24	0,10	
67 20	104 20	278° 20′	43 10	72° 20′	0,35	0,04	— 0,17	Dickere, abe
64 20	115 0	288 12	43 30	70 30	0,41	0,05	— 0,18	noch durch
61 10	118 40	294 50	42 20	68 50	0,45	0,04	— 0,16	sichtige Si
58 10	126 0	300 10	41 20	67 16	0,52	0,05	— 0,14	berschicht.
67 20	83 86	326 36	28 19	60 0	0,17	0,32	+ 0,01	Sehr dünne
64 20	95 12	331 24	27 19	57 33	0,23	0,34	0,00	Platinschich
61 10	105 16	331 48	26 30	56 16	0,29	0,30	+ 0,01	
58 10	115 24	334 0	26 25	54 54	0,37	0,29	+ 0,01	
67 20	73 36	313 24	25 54	57 0	0,18	0,32	0,00	Dickere, abe
64 20	81 36	318 12	24 28	56 24	0,21	0,31	0,02	noch durch
61 10	93 12	322 12	23 24	53 44	0,27	0,31	0,03	sichtige Pla
58 10	104 0	323 24	24 19	52 47	0,36	0,30	0,02	tinschicht.

Nach der Theorie sollen die letzten beiden Spalten konstant sein für jede Schicht. Dies ist in befriedigender Weise erfüllt. Bei der ersten Schicht ist $\overline{\varphi}$ reell = 70°. In der Nähe dieses

1) O. Wiener, Ann. d. Phys. 31 1887 S. 644.

Winkels ist die Übereinstimmung am besten. Für weiter abliegende φ ist $\operatorname{cotg}^2 \bar{\varphi} = \operatorname{cotg}^2 \varphi - \frac{\operatorname{tg} \chi}{\sin^2 \varphi} \cos \delta$ die Differenz zweier relativ großer Zahlen. Solche Winkel sind also zur Berechnung der Konstanten weniger geeignet. Die sehr gute Übereinstimmung von $\frac{\operatorname{tg} \chi}{\sin^2 \varphi} \sin \delta$ bei der zweiten Schicht beruht wohl zum Teil auf Zufall, da $\delta = \pi - 4^0$ ungefähr beträgt, die Übereinstimmung also besser ist, als es die Fehler der Beobachtung erwarten lassen.

Die Konstanten dieser Schichten ergeben sich zu:

	Silber		Platin	
	I	II	I	II
n	2,5	0,5	1,94	2,00
k	1,4	3,6	1,87	1,87

Man sieht, daß bei der ersten Silberschicht $n > 1$, $k < 1$ ist. Dies wäre in Übereinstimmung mit Beobachtungen von O. Wiener und P. Drude über die Phasenverzögerung des reflektierten gegen das einfallende Licht. Wernicke u. a. haben die Resultate Drudes und Wieners durch Oberflächenschichten erklären wollen. Wäre indes bei den hier mitgeteilten Beobachtungen der Einfluß fremder Schichten so groß gewesen, daß sie n und k so stark entstellen, so müßte die Konstanz der Werte $\operatorname{cotg}^2 \varphi \pm \frac{\operatorname{tg} \chi}{\sin^2 \varphi} \cos \delta$ und $\frac{\operatorname{tg} \chi}{\sin^2 \varphi} \sin \delta$, die sich außer bei den mitgeteilten auch bei allen anderen untersuchten Schichten[1]) fand, ein Zufall sein. Indes gehe ich an dieser Stelle nicht näher auf diese Diskussion ein.

Die dickere Silberschicht zeigt schon fast die von P. Drude gefundenen Konstanten des massiven Silbers (wie schon erwähnt ist der Wert für $\frac{\operatorname{tg} \chi}{\sin^2 \varphi} \sin \delta$ sehr unsicher und daher auch der mitgeteilte Wert von n).

Die für Platin gefundenen Werte für n und k weichen von den Drudeschen erheblich ab. Indes stimmten auch die an dicken undurchsichtigen Schichten, die ebenfalls chemisch hergestellt waren, beobachteten keineswegs mit den von Drude angegebenen, sondern

1) Soweit sie sich nicht anderweitig als inhomogen erwiesen, z. B. bei Beobachtungen von beiden Seiten verschiedene Werte gaben.

waren: $n = 1,61$, $k = 2,22$. Eine ähnliche, wenn auch nicht so große Differenz der Konstanten fand auch W. Meier[1]) bei Platinspiegeln, die auf verschiedenem Wege hergestellt waren.

---

1) W. Meyer, Diss. Göttingen 1909. Ann. d. Phys. 31. S. 1017 1909.

Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß.

Gesammelt von **F. Klein** und **M. Brendel**.

I. Über Gauß' zahlentheoretische Arbeiten.

Von

P. Bachmann in Weimar[1]).

Vorgelegt in der Sitzung vom 29. Juli 1911.

Wer eine Darstellung alles dessen unternimmt, was die mathematischen Wissenschaften Gauß verdanken, muß füglich seine zahlentheoretischen Arbeiten an erster Stelle in Betracht ziehen. Nicht so sehr aus dem Grunde, weil die Disquisitiones arithmeticae, sein größtes und zwar nicht dem Erscheinen aber der Entstehung nach erstes Werk, der Zahlentheorie gewidmet sind, als vielmehr deswegen, weil in der Tat in dem Kranze von Gauß' epochemachenden wissenschaftlichen Leistungen seine Entdeckungen im Gebiete der Zahlentheorie die großartigsten und in ihrer Wirkung auf die weitere Entwicklung der Mathematik am bedeutendsten gewesen sind; von jenem monumentalen Jugendwerke an datieren wir erst die Wissenschaft der höheren Arithmetik.

Im Folgenden wollen wir versuchen, eine zugleich möglichst knappe, aber auch das Wesentliche erschöpfende systematische Skizze dieser zahlentheoretischen Gaußschen Ergebnisse zu zeichnen, indem wir zunächst von den hauptsächlichsten Teilen der D. A. eine Analyse geben, und dann zeigen, wie die hier begründeten Theorien in den späteren Arbeiten von Gauß sich entwickelt und

1) Zur Abkürzung steht im Folgenden:
D. A. für Disquisitiones arithmeticae, A. R. für Analysis Residuorum,
T. für Tagebuch von Gauß (S. Festschrift der K. Ges. d. W. zu Göttingen, Berlin 1901, oder auch den Abdruck in Band 57 der mathematischen Annalen),
W. für Gauß' Werke.

neue Früchte gezeitigt haben. Zugleich werden wir bemüht sein, dem Interesse an der Entstehungsgeschichte dieser Arbeiten oder einzelner Lehrsätze an der Hand der eigenen Gaußschen Aufzeichnungen darüber, soweit möglich, Rechnung zu tragen.

Die D. A. erschienen im Sommer des Jahres 1801. In der Vorrede zu seinem Werke setzt Gauß den Beginn seiner Beschäftigung mit dessen Gegenstande in den Anfang des Jahres 1795. Dies ist nun freilich nicht ganz genau zu nehmen. Schon vorher hat Gauß sich viel mit rechnerischen Versuchen beschäftigt, die hauptsächlich auf die Teilbarkeit der ganzen Zahlen, insbesondere auf die Eigenschaften der Primzahlen, auf die Reste, welche die Potenzen anderer Zahlen durch solche geteilt lassen, u. dgl. m. gerichtet gewesen sind. Gauß selbst erwähnt in einem an Encke gerichteten Briefe (W. II, p. 444), daß er bereits als 15jähriger (im Jahre 1792 oder 1793), als er sich die Lambertschen Supplemente zu den Logarithmentafeln verschafft habe, mit einer der verzwicktesten Aufgaben der Zahlentheorie, der Frequenz der Primzahlen, rechnerisch sich beschäftigt habe. Bald hernach schon hat Gauß diesem Briefe zufolge die Tafel solcher Frequenz, welche W. II, p. 435 abgedruckt ist, begonnen, während ihre vollständige Berechnung erst späterer Zeit angehört. Auch entstammt jener Zeit wohl schon die Tafel des quadratischen Charakters der Primzahlen (W. II, p. 399), jedenfalls die Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche (W. II, p. 411), die nur zum Teil den artt. 99 resp. 316 der D. A. angefügt sind. Von der letzteren sagt Gauß a. a. O.: quam integram sive etiam ulterius continuatam occasione data publici juris faciemus. Sie besteht aus zwei Teilen, deren zweiter in der Handschrift des Nachlasses den Vermerk trägt: explicitus October 11. 1795. Ob nun dieser zweite Teil die geplante weitere Fortsetzung ausmache oder nicht, jedenfalls gehört diese Tabelle dem genannten Jahre an; im ersteren Falle aber dürfte man schließen, daß der bezügliche Teil der D. A. schon vor jenem Tage verfaßt sein müsse. Dieser Ansicht zu Hilfe käme eine andere Tabelle mit dem Titel: „I. Ausschließung gewisser Zahlen beim Aufsuchen der Faktoren“, welche in einem Hefte des Nachlasses mit der Aufschrift „Neue Beiträge zu den mathematischen Tafeln besonders zur Erleichterung der Zahlenrechnungen“ und mit dem Datum März 1795 vorhanden ist. Sie bezieht sich auf die Methode der artt. 319—322 des sechsten Abschnitts der D. A., dessen Inhalt hiernach, soweit er nicht die Theorie der quadratischen Formen voraussetzt, als von Gauß schon im Jahre 1795 gefunden angenommen werden darf. Die „Hülfstafel bei

Auflösung der unbestimmten Gleichung $A = fx^2 + gy_2$ vermittelst der Ausschließungsmethode“ (W. II, p. 509), bei welcher schon auf den sechsten Abschnitt der D. A. Bezug genommen wird, auf den sie sich bezieht, gehört erst späterer Zeit an.

Zahlentabellen, wie die zuvor genannten, dienten damals wie später Gauß wohl als numerisches Beobachtungsmaterial, um auf induktivem Wege arithmetische Gesetzmäßigkeiten daraus zu erkennen. So geschah es denn auch, wie Gauß in der Vorrede der D. A. erzählt, daß zufällig bei einer anderen Arbeit im Anfange d. J. 1795 ein ausgezeichneter arithmetischer Satz (er meint: der Satz des art. 108 vom quadratischen Charakter von -1) ihm aufstieß, der ihn nun reizte, seine tieferen Gründe und seinen Beweis aus denselben zu finden; und hieraus entsprangen dann schnell Gauß' theoretische Forschungen und Ergebnisse. Noch in demselben Jahre und zwar im Monat März (W. I, p. 475, Anm. zu art. 131) entdeckte Gauß durch Induktion das berühmte theorema fundamentale von den quadratischen Resten. Im Herbst d. J. siedelte er nach Göttingen über und fand hier schon am 8. April 1796 (Nr. 2 T.) seinen ersten Beweis des Fundamentaltheorems. Ohne Zweifel hat Gauß nun in Göttingen die (s. D. A. p. 6) bis dahin ihm fehlende Bekanntschaft mit den Arbeiten seiner Vorgänger Euler, Lagrange, Legendre schnell sich verschafft, von der seine Zitate in den D. A. Zeugnis geben. Nach seiner Aussage in der Vorrede zu den D. A. aber hatte er den größten Teil ihrer ersten vier Abschnitte vorher schon „absolviert“. Hiernach und auf Grund der Daten, welche Gauß in seinem T. für die auf jene Abschnitte bezüglichen Entdeckungen angegeben hat und die fast sämtlich in das Jahr 1796 fallen, wie der schon erwähnte Beweis des Fundamentaltheorems, mit dem er den Höhepunkt dieser Teile der D. A. erreichte, darf man annehmen, daß er den Inhalt der ersten vier Abschnitte schon 1796 besaß. Ob er sie aber damals bereits niedergeschrieben hatte? In seinem Nachlasse befindet sich ein Manuskript mit dem Titel Analysis Residuorum, das als eine frühere Niederschrift der letzten Abschnitte der D. A. zu betrachten ist. Sie besteht aus drei Kapiteln, dem 6., 7. und 8ten. Das letztere kann nicht vor dem September 1797 entstanden sein, da nach den Angaben des Gaußschen Tagebuchs die Auffindung seiner Sätze oder Beweise zum größten Teil über 1796 hinaus bis zum 9. September 1797 reicht. In art. 367 desselben (W. II, p. 235) aber heißt es von der kubischen Gleichung für die drei $\frac{\nu-1}{3}$-gliedrigen Perioden aus ν^{ten} Einheitswurzeln: quam in

Cap. VI a priori determinandam docuimus. Diese Gleichung ist (Nr. 39 T.) am 1. Oktober 1796 auf induktivem Wege von Gauß ermittelt, aber erst am 20. Juli 1797 (Nr. 67 T.) wirklich hergeleitet worden. Da nun das 6. Kapitel der A. R. genau mit einem unvollendeten Versuche, dies zu leisten, abbricht, jene Gleichung selbst noch nicht darin auftritt, darf man vermuten, daß dies Kapitel vor dem letztbezeichneten Datum verfaßt sei. Was es sonst von der Kreisteilung enthält, geht nicht über das Jahr 1796 hinaus. Das 7. Kapitel ferner, das bei einer nicht auf den Text bezüglichen Randzeichnung das Datum „1796 Januar" trägt, enthält im Wesentlichen genau dasselbe, was den sechsten Abschnitt der D. A. bis zu der Stelle ausmacht, wo die Theorie der quadratischen Formen zur Anwendung kommt, und man möchte also nach dem, was über die darauf bezüglichen Tabellen gesagt ist, annehmen, daß es spätestens schon 1796 niedergeschrieben sei. Für das 6. Kapitel würde dann dasselbe gelten. Müßte man aber die Notiz Nr. 68 T. auf die in der Annotatio seines art. 251 (W. II, p. 209) bemerkte Schwierigkeit beziehen, die dann erst am 21. Juli 1797 behoben worden wäre, so könnte dies Kapitel nicht vor diesem Tage verfaßt sein. Dasselbe würde gelten, wenn man die Worte Error Lagrangii, welche in der Handschrift dem 7. Kapitel vorangestellt sind, auf Lagrange's von Gauß (W. II, p. 249) getadelte Meinung beziehen müßte. Jedenfalls aber wird es richtig sein, wenn man die Niederschrift der A. R. auf 1796—7 datiert.

Diejenige der vier ersten Abschnitte der D. A. wird vor jener und in der Hauptsache wohl vor 1797 geschehen sein, doch kann die definitive Fassung der D. A. ihnen frühestens in diesem Jahre gegeben sein, da sich in Gauß' Tagebuche bis in letzteres hinein noch Angaben über gelungene Beweise für Sätze der vier ersten Abschnitte finden. In der Tat zeigen Gauß' Briefe an den Hofrat Zimmermann vom 22. November und 24. Dezember 1797, daß er erst in dieser Zeit beschäftigt ist, die ersten Bogen seines Werks für den Druck fertig zu stellen[1]). Der fünfte Abschnitt kann nicht wohl vor dem 22. Juni 1796 (nach Nr. 15 T.) begonnen sein, hatte aber im Sommer 1798 schon eine dritte Darstellung erhalten (Brief von Gauß an Bolyai vom 29. Nov. 1798). Seine vierte Bearbeitung stammt diesem Briefe und den Notizen in Gauß' Tagebuch zufolge bestimmt aus dem Winter 1798/9. Gauß schreibt u. a., daß es ihm bei jeder folgenden Bearbeitung geglückt sei, die Sache auf

---

1) Die in dem erstern Briefe erwähnten Stellen accedere possunt p. 5 und eine andere p. 7 stehen in W. I, p. 11 Zeile 9 v. u. resp. p. 13 Zeile 7—8.

eine solche Art auszuführen, daß es seine bei der vorhergehenden gehegten kühnsten Hoffnungen überstieg, und er werde das in ein paar Tagen zum vierten Male vollendet haben. Diesmal war es offenbar die Theorie der ternären quadratischen Formen, welche solches Gelingen herbeiführte und deren Studium er in jenen Tagen begann (s. Nr. 95 und 96 des T.). Die vierte Bearbeitung des fünften Abschnitts wird in der Hauptsache dessen endgiltige Fassung gewesen sein, wenngleich Gauß einen sehr wesentlichen Punkt der genannten Theorie erst im Februar 1800 erledigte (Nr. 103 des T.). Es heißt weiter in dem erwähnten Briefe: „der sechste [Abschnitt] ist von keinem großen Umfange, der siebente (der die Theorie der Polygone enthält) etwas größer aber im wesentlichen schon fertig und nur der letzte wird mich noch beträchtliche Zeit beschäftigen, da er die schwersten Materien behandelt". Dieser Teil ist bei Veröffentlichung der D. A. wegen zu großen Umfangs des Werkes — jedenfalls auch, weil Gauß seinen Inhalt noch nicht ausgereift genug fand — unterdrückt worden.

Das Fragment, welches unter dem Titel Sectio octava in W. II, p. 510 veröffentlicht ist, wird als eine zur Fortsetzung der D. A. unternommene Neubearbeitung der A. R. anzusehen und erst nach Vollendung der D. A. zu setzen sein, da die Artikelnummern unmittelbar an die der D. A. sich anschließen. Nachdem Gauß auch diese einstweilen bei Seite gelegt, nahm er erst 1808 in dem andern Fragmente W. II, p. 243 seine Absicht wieder auf, jedoch hat er deren Ausführung über seinen andern gleichzeitigen Untersuchungen auch bald wieder fallen lassen. —

Wenden wir uns nun zum Inhalte der D. A. selbst. Ihre vier ersten Abschnitte geben die Elemente der heutigen Zahlentheorie, genauer desjenigen Teils derselben, den man multiplikative Zahlentheorie nennt, weil er wesentlich auf die Darstellbarkeit der Zahlen als Produkte von einfachsten Faktoren, den Primzahlen, gegründet und auf die Teilung der Zahlen durch einander, die Eigenschaften der Reste, welche dabei verbleiben, u. dgl. mehr gerichtet ist. Hier fand Gauß Vieles und Wichtiges von dem, was er selbständig erforscht, schon von älteren Mathematikern, wie Fermat, Euler, Lagrange und Legendre, teils nur bemerkt, teils aber auch bewiesen. Er aber hat es Alles zuerst methodisch und in wissenschaftlichem Zusammenhange uns entwickelt und dargestellt. Gleich die Einführung des Begriffes der Kongruenz, mit welcher der erste Abschnitt beginnt, eines Begriffs, der zwar auch sonst schon stillschweigend verwendet,

aber bis dahin noch nicht formuliert und methodisch verwertet worden war, gilt eine Tat: zwei Zahlen a, b heißen einander kongruent nach einem Modul m, in Zeichen:

$$a \equiv b \pmod{m},$$

wenn sie gleichen Rest lassen bei der Teilung durch m. Und äußerst glücklich gewählt ist das Zeichen für solches Verhalten, weil es die weitgreifende Analogie, die sich leicht zwischen Kongruenzen und Gleichungen herausstellt, zur lichten Anschauung bringt. So steht der Forderung, eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades

$$ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

aufzulösen, falls die Koeffizienten ganzzahlig gedacht werden, die Aufgabe zur Seite, die Wurzeln der Kongruenz

$$ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod{m}$$

d. h. die inkongruenten ganzzahligen Werte von x zu finden, die ihr genügen. Der zweite Abschnitt gibt neben Fundamentalsätzen über Teilbarkeit der Zahlen die Lösung jener Aufgabe für die Kongruenzen ersten Grades, welche im Grunde mit der schon von Euler und Lagrange nach verschiedenen Methoden behandelten Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$ax + by = c$$

übereinkommt. Während Gauß die analoge Aufgabe für mehrere lineare Kongruenzen mit mehr als einer Unbekannten nur flüchtig behandelt, zieht er aus der Auffindung einer Zahl, welche nach mehreren gegebenen Moduln gegebene Reste läßt, eine neue Bestimmung des bereits von Euler ermittelten Ausdrucks der Funktion $\varphi(m)$, welche die Anzahl der zu m primen Zahlen, welche $\overline{\gtrless} m$, bezeichnet. Der Abschnitt schließt mit dem nicht wesentlich von dem Lagrangeschen verschiedenen Beweise der Tatsache, daß eine Kongruenz in Bezug auf einen Primzahlmodul nicht mehr Wurzeln haben kann, als ihr Grad beträgt. Etwas unvermittelt schiebt sich in art. 42 jener fundamentale Gaußsche Satz ein, daß, wenn eine ganze Funktion von x mit ganzzahligen Koeffizienten in ein Produkt zweier ganzer Funktionen mit rationalen Koeffizienten zerlegbar ist, diese Koeffizienten ebenfalls ganzzahlig sein müssen, ein Satz, welcher die Grundlage für die besonders von Kronecker ausgebildete Arithmetik der ganzen Funktionen bildet und auch in andern Disziplinen, u. a. für einen der wichtigsten Sätze über Ideale eines algebraischen Zahlenkörpers, sich grundlegend gezeigt hat. In

Gauß' Tagebuch (Nr. 69) wird die Auffindung dieses Satzes verhältnismäßig spät erst auf den 23. Juli 1797 datiert; vermutlich den Studien zur Theorie der höheren Kongruenzen, welche der achte Abschnitt behandelt, entsprungen, ist er hier eingefügt.

Der Fortgang von den Kongruenzen ersten zu denjenigen höheren Grades führt von selbst zur Theorie der Potenzreste d. i. zur Untersuchung der Reste, welche die Potenzen der verschiedenen Zahlen lassen, wenn sie durch einen gegebenen Modul geteilt werden, sowie der Bedingungen, unter denen eine gegebene Zahl solch Rest einer Potenz von vorgeschriebenem Grade sein kann, u. a. mehr. Besonders interessiert hierbei der Fall, wo der Modul eine ungerade Primzahl p ist; Gauß behandelt im dritten Abschnitte diesen daher vorzugsweise. Für jede durch p nicht teilbare Zahl a gibt es eine kleinste Potenz a^d, welche den Rest 1 läßt; dieser Exponent d, zu welchem „a gehört (mod. p)", ist stets ein Teiler von $p-1$, und aus diesem Umstande folgt sogleich der berühmte, schon von Fermat ausgesprochene Satz, daß a^{p-1} stets kongruent 1 sei (mod. p). Der Beweis dieser Sätze durch die Methode der Exhaustion, wie Gauß ihn gibt, war durch eine im wesentlichen gleiche Betrachtung schon von Euler erhalten, und schon früher hatte dieser den Fermatschen Satz mittels des binomischen Satzes begründet. Gauß fügte dem einen neuen Beweis mit Hilfe des polynomischen Satzes hinzu. Wesentlich neu aber war seine Bestimmung der Anzahl aller inkongruenten Zahlen, die zu einem gegebenen Teiler d von $p-1$ als Exponent gehören, aus welcher dann sofort die Tatsache der Existenz einer primitiven Wurzel (mod. p), d. i. einer Zahl g, welche zum Exponenten $p-1$ gehört, hervorging, eine Tatsache, welche nur irrtümlicherweise vordem Euler schon festgestellt zu haben gemeint hatte. Die Potenzen

$$1, g, g^2, \ldots, g^{p-2}$$

einer solchen Wurzel haben die Eigenschaft, daß jede durch p nicht teilbare Zahl einer einzigen von ihnen kongruent ist (mod. p). Dabei bestimmen die geraden Potenzen dieser Reihe die quadratischen Reste (mod. p) d. i. die Zahlen, welche (mod. p) einer Quadratzahl kongruent sein können. Aus dieser Bemerkung schloß Euler — dem eben Gesagten zufolge aber ohne genügende Grundlage — sein bekanntes Kriterium für den quadratischen Charakter einer Zahl a, nach welchem $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1$ (mod. p) ist, jenachdem a ein quadratischer Rest (mod. p) ist oder nicht, und konnte ferner den Satz feststellen, daß für eine Primzahl

$p = 4n+1$ stets ganze durch p nicht teilbare Zahlen x, y gefunden werden können, für welche x^2+y^2 durch p teilbar wird. Aus festerem und breiterem Grunde schöpfte diese Sätze Gauß. Dem schon Gesagten gemäß gibt es in der obigen Reihe der Potenzen von g eine solche Potenz g^α, daß $a \equiv g^\alpha \pmod{p}$; der Exponent α heißt nach Gauß der Index von a. Aus den Gesetzen, welche diese Indizes befolgen, läßt sich leicht ein Kriterium ableiten, nach welchem die allgemeine binomische Kongruenz

$$x^n \equiv a \pmod{p}$$

auflösbar ist: versteht man unter δ den größten gemeinsamen Teiler von n und $p-1$, so muß $a^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}$ sein. Für $n = 2$ ergibt sich so (wie es nach Nr. 52 T. Gauß am 10. Januar 1797 hergeleitet zu haben scheint) von selbst das Eulersche Kriterium. Gehört ferner eine Zahl a zum Exponenten d, so bilden die allein einander inkongruenten Potenzen $1, a, a^2, \ldots, a^{d-1}$ derselben die sogenannte Periode der Zahl $a \pmod{p}$ und ihr Produkt ist $\equiv -(-1)^d$. Wird für a eine primitive Wurzel g gewählt, so findet sich hieraus sogleich der bereits von Waring mitgeteilte und Wilson zugeschriebene Satz, nach welchem das Produkt aller zu p primen Reste, nämlich

$$1.2.3\ldots(p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

ist. Diesen Satz bewies (unter Annahme der Existenz einer primitiven Wurzel) auf dem zuletzt angegebenen Wege von Gauß schon Euler, aus wesentlich anderen Prinzipien Lagrange. Gauß aber gab noch einen neuen Beweis des Satzes, der, auf die sogenannten bezüglich p assoziierten Zahlen gegründet, den Vorzug hat, daß er sich auf den allgemeineren Fall eines zusammengesetzten Moduls übertragen läßt. Der von Gauß nur ausgesprochene, hier geltende verallgemeinerte Wilsonsche Satz ist später auf dem angedeuteten Wege von Brennecke, dann von Schering bewiesen. —

Einige andere Sätze übergehend wenden wir uns nun zur Theorie der quadratischen Reste, welcher der vierte Abschnitt gewidmet ist.

Die Frage nach den quadratischen Resten eines Moduls m ist identisch mit der Frage nach der Auflösbarkeit der binomischen Kongruenz zweiten Grades

$$x^2 \equiv a \pmod{m}.$$

Sie bietet aber eine zwiefache Seite dar, jenachdem man den Modul m oder den Rest a als gegeben betrachtet. In der erstern

Annahme verursachte die Beantwortung der Frage keine erhebliche Schwierigkeit. Es ist leicht, sie auf den Fall zurückzuführen, wo der Modul eine Primzahlpotenz ist, und, da sie für den Modul 2^n einfach erledigt und für den Modul p^n, wo p eine ungerade Primzahl bedeutet, aus dem Falle des einfachen Moduls p entschieden werden kann, so handelt es sich schließlich nur noch um die Kongruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$, wo a als durch p nicht teilbar gedacht werden darf. Jenachdem sie möglich ist oder nicht, heißt a nach Gauß quadratischer Rest oder Nichtrest (residuum oder nonresiduum) von p, in Zeichen aRp oder aNp. Nach Legendre bezeichnet man dies verschiedene Verhalten, indem man dem Symbole $(\frac{a}{p})$ entsprechend den Wert $+1$ oder -1 beilegt. Es gibt der inkongruenten Zahlen a beider Arten gleichviel.

Bei weitem schwieriger aber erwies sich die Beantwortung der Frage in der zweiten der erwähnten Annahmen, der Frage: von welchen ungeraden Primzahlen p eine gegebene Zahl a quadratischer Rest bezw. quadratischer Nichtrest sei. Schon vor Gauß hatte Euler die Antwort auf diese Frage für die Werte $a = 1$ und 3, Lagrange für $a = 2, 5, 7$ gefunden, und Gauß selbst begründet zunächst seinerseits die so erhaltenen Sätze. Der berühmte Eulersche Satz, der nach Gauß' oben erwähnter Aussage der Ausgangspunkt seiner tieferen arithmetischen Forschungen geworden ist, der Satz, daß -1 quadratischer Rest von jeder Primzahl von der Form $4n+1$, Nichtrest von jeder Primzahl von der Form $4n+3$ ist, was sich einfach ausspricht in der Gleichung $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, folgt unmittelbar aus dem Eulerschen Kriterium oder läßt sich mittels assoziierter Zahlen oder auch auf Grund des Wilsonschen Satzes erhärten. Für den ebenso schönen Satz, daß 2 quadratischer Rest von jeder Primzahl von einer der Formen $8n+1, 7$, Nichtrest von jeder Primzahl einer der beiden Formen $8n+3, 5$, daß also in Legendrescher Bezeichnung $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ ist, gab Gauß an dieser Stelle seiner D. A. zwei zum Teil von einander abweichende einfache Begründungen. Nun aber zeigte sich, daß für den quadratischen Charakter einer ungeraden Primzahl q bezüglich einer andern solchen Primzahl p kein ähnlicher direkter Ausspruch angebbar, jener vielmehr nur umgekehrt durch den quadratischen Charakter von p in Bezug auf q bestimmbar ist. Das hier geltende eigentümliche Gesetz, das Gauß durch Induktion fand, war so auch vorher schon von Legendre ermittelt worden, dem jedoch noch nicht gelang es streng

zu beweisen. Durch Kronecker aber ist zuerst bemerkt worden, daß Euler als Entdecker des Gesetzes gelten darf, da er es in einer mit der von Gauß gegebenen wesentlich identischen Formulierung schon vor Legendre ausgesprochen hat. Diese Gaußsche Fassung besagt:

Wenn p eine Primzahl von der Form $4n+1$, so ist $+p$, wenn es eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, so ist $-p$ Rest oder Nichtrest von jeder Primzahl, welche positiv gedacht Rest resp. Nichtrest von p ist.

Mit Recht hat Gauß diesen Satz das theorema fundamentale der quadratischen Reste genannt, da es nicht nur in ihrer Theorie den eigentlichen Kern ausmacht, sondern auch für weitere Teile der höheren Arithmetik grundlegende Bedeutung hat. Kaum aber hat er schon voraussehen können, wie groß dessen Bedeutung für die ganze Entwicklung der Zahlentheorie werden, wie schon seine eigenen weiteren Beweise des Satzes, von denen wir zu sprechen haben werden, sodann die ungefähr 40 andern Beweise, welche wir späteren Forschern zu danken haben, mit immer neuen Gesichtspunkten auch neue Richtungen der Forschung herbeiführen, wie endlich das Bedürfnis, den analogen Satz für Potenzreste höheren Grades zu erledigen, dem schon Gauß selbst, später besonders Kummer und in unserer Zeit Hilbert erfolgreich ihre Bemühungen gewidmet, ganze neue Welten mathematischer Ideen uns eröffnen und gewinnen lassen würde!

Den ersten strengen Beweis des Gesetzes gab also Gauß. Er beruht auf der Methode der allgemeinen Induktion und ist dadurch charakterisiert, daß er, ohne aus dem eigentlichsten Gebiete der Theorie der quadratischen Reste herauszutreten, allein mit dem Begriffe eines solchen operiert. Aber er ist recht umständlich, da er acht verschiedene Fälle einzeln zu erledigen nötigt. Mit Verwendung des Legendreschen Symbols gelang es später Dirichlet ihn sehr zu vereinfachen und die acht Fälle auf nur zwei verschiedene zusammenzuziehen. Wenn Gauß einmal gegen eine Äußerung von Waring einwendet, daß Beweise mehr ex *notionibus* quam ex *notationibus* geschöpft werden müßten, eine Maxime, welcher die neuere Mathematik weithin Rechnung getragen hat, so hat er zwar mit seinem ersten Beweise des Fundamentaltheorems dies Ziel aufs beste erreicht, gleichwohl zeigt die so übersichtliche Dirichletsche Darstellung, wie auch eine geeignete *notatio* von nicht zu unterschätzender Bedeutung sein kann. Spricht sich dies doch deutlich in der Fassung aus, welche zuerst Legendre in der Gleichung

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

dem Gesetze gab, derzufolge wir es jetzt das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste nennen und in welcher seine große Eleganz erst voll zur Erscheinung kommt. Bei beiden Darstellungen aber war es ein Fall, der eine ganz besondere Schwierigkeit verursachte: die für den Beweis erforderliche Tatsache, daß jede Primzahl $p > 5$ und von der Form $4n+1$ positiv oder negativ genommen Nichtrest einer kleineren Primzahl sei, eine Tatsache, welche für den Fall $p \equiv 5 \pmod{8}$ sehr einfach nachzuweisen, ist es nicht so für den andern Fall $p \equiv 1 \pmod{8}$. Nach Gauß' Aussage hat er ein volles Jahr mit dieser Schwierigkeit gerungen (W. II, p. 4: per integrum annum me torsit operamque enixissimam effugit), bis es ihm endlich gelang, durch eine einfache und doch tiefe Betrachtung, welche Kronecker mit Recht eine Kraftprobe des Gaußschen Genius genannt hat, ihrer am 8. April 1796 (Nr. 2 T.) mächtig zu werden.

Nachdem so Gauß das für zwei Primzahlen p, q geltende Gesetz bewiesen, hat er ihm im art. 133 bereits auch diejenige Allgemeinheit gegeben (am 29. April 1796, Nr. 4 T.), welche mittels des von Jacobi verallgemeinerten Legendreschen Symbols sich ausspricht in der Gleichung

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\cdot\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}+\frac{\delta-1}{2}\cdot\frac{\varepsilon-1}{2}},$$

worin P, Q zwei relativ prime ungerade Zahlen und δ, ε den Vorzeichen von P, Q resp. entsprechend gleich ± 1 sind; wie er denn auch die sogenannten Ergänzungssätze d. i. die obigen Sätze für -1 und 2, die nun aus dem Fundamentaltheoreme aufs neue bewiesen werden konnten (art. 145, nach Nr. 56 T. am 4. Febr. 1797), auf den Fall ausgedehnt hat, daß p eine zusammengesetzte positive ungerade Zahl ist. So ward es dann auch möglich, den quadratischen Charakter einer beliebigen Zahl in Bezug auf einen beliebigen zu ihr teilerfremden ungeraden Modul zu bestimmen, sowie die Linearformen der sogenannten Teiler und Nichtteiler von x^2-a d. i. der Primzahlen, von denen die Zahl a quadratischer Rest bezw. Nichtrest ist, aufzustellen. —

Das bisher Dargestellte ist in der Hauptsache von Gauß bereits gefunden, bevor er Kenntnis von der schon vor ihm vorhandenen Literatur gewann. Das Studium der Arbeiten von Lagrange und Legendre machte ihn aber mit einem Gebiete der

Zahlentheorie bekannt, das seinem Interesse bis dahin fremd gewesen zu sein scheint, mit der Theorie der quadratischen Formen. Anfänge dieser Theorie als Probleme der additiven Zahlentheorie, wie die Frage nach der Zerfällbarkeit einer Zahl n in die Summe zweier Quadratzahlen oder in die Summe einer Quadratzahl und einer mehrfachen andern Quadratzahl d. i. nach den Auflösungen der Diophantischen Gleichung $n = x^2 + my^2$ und Ähnliches fand sich schon bei Fermat, besonders aber bei Euler, welcher auch bereits die eng damit verbundene allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch ganze oder rationale Werte der letzteren zu lösen unternommen hatte. Hieran anknüpfend hatten Lagrange und Legendre die allgemeinere Frage nach der Darstellung einer Zahl durch einen Ausdruck von der Gestalt $ax^2 + bxy + cy^2$ behandelt und hatten bereits eine Fülle von schönen und wichtigen Ergebnissen gewonnen, als Gauß vom 22. Juni 1796 an (s. Nr. 15 T.) diesen Fragen nahe trat. Im Vergleich zu seinen Arbeiten lassen diejenigen seiner Vorgänger, so tief sie auch schon eindrangen, sich ähnlich kennzeichnen, wie es Gauß von Diophant's arithmetischen Arbeiten aussagt: daß sie mehr dexteritatem quandam scitamque tractationem quam principia profundiora gewiesen und, nimis specialia, nur selten ad conclusiones generaliores geführt hätten. Das Gold zum Reifen zu zwingen war ihnen noch nicht gelungen. Erst Gauß entwickelte im fünften Abschnitte seiner D. A. die Theorie der quadratischen Formen methodisch von sicherer Grundlage aus und führte sie zu bis dahin ungeahnten Höhen und Gesichtspunkten. Schon die konsequente Verwendung der Bezeichnung „quadratische Form“ (forma secundi gradus) für die ganze homogene Funktion zweiten Grades mit zwei oder mehr Unbestimmten rührt von Gauß her; Lagrange wie Legendre nennen jene Ausdrücke expressions oder formules und sprechen nur beiläufig von den Teilern eines Ausdrucks $x^2 \pm my^2$ als d'une forme linéaire oder quadratique; ähnlich auch Euler. Übrigens nimmt Gauß abweichend von Legendre die quadratische Form in der Gestalt

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

die er, wo es auf die Unbestimmten nicht ankommt, kurz mit $f = (a, b, c)$ bezeichnet, also mit geradem mittleren Koeffizienten. Das beruht auf dem Umstande, daß Gauß seine Theorie derselben auf formal algebraischer Grundlage erbaut, wo er dann durch solche Beschränkung das Auftreten gebrochener Zahlen verhütet, macht aber andererseits mancherlei Unterscheidungen, wie diejenige

der Formen in eigentlich- und uneigentlich primitive u. a. notwendig, wodurch die Theorie wieder beschwert wird und manche ihrer Ergebnisse an Einfachheit verlieren. Als es später gelang, aus der algebraischen Schale der Theorie ihren eigentlich arithmetischen Kern herauszuschälen, indem man sie als die Theorie des quadratischen Zahlenkörpers erfaßte und so von dem ursprünglich additiv-zahlentheoretischen Probleme der Darstellung einer Zahl durch eine quadratische Form wieder zur multiplikativen Zahlentheorie zurückkehrte, der Legendre mit dem Begriffe des quadratischen Teilers näher verbunden geblieben war als Gauß, mußte man jene Beschränkung wieder aufgeben.

Gauß errichtet nun das Gebäude seiner Theorie auf zwei algebraischen Grundeigenschaften der quadratischen Formen. Die eine von ihnen ist die Identität

$$f(x, y) . f(x', y') = [(ax + by) x' + (bx + cy) y']^2 - D (xy' - x' y)^2,$$

worin D die Verknüpfung der Koeffizienten

$$D = b^2 - ac$$

bedeutet und als eine die ganze Theorie beherrschende Zahl von Gauß als Determinante der Form benannt worden ist; je nach ihrem Vorzeichen zerfallen die Formen in zwei Gattungen, welche vielfach ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen. Aus obiger Identität ergibt sich sogleich die zur eigentlichen Darstellung von n durch (a, b, c) d. i. zur Darstellung mittels teilerfremder Werte x, y notwendige Bedingung, daß D quadratischer Rest von n sei, sowie die Erkenntnis, daß zwischen den vorhandenen eigentlichen Darstellungen und den Wurzeln der Kongruenz $z^2 \equiv D \pmod{n}$ ein enger Zusammenhang besteht, dem gemäß jede solche Darstellung als zu einer bestimmten der Kongruenzwurzeln „gehörig“ bezeichnet werden darf. Die zweite Grundeigenschaft ist die Transformation einer quadratischen Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ mittels einer linearen ganzzahligen Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \; y = \gamma x' + \delta y'$$

in eine andere Form $a' x'^2 + 2b' x' y' + c' y'^2$, deren Determinante $D' = D . (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ ist und welche unter der ersteren enthalten, insbesondere, wenn der Substitutionsmodul $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist, ihr äquivalent genannt wird. Die zuerst von Gauß getroffene Unterscheidung solcher Äquivalenz in eine eigentliche und uneigentliche je nach dem Vorzeichen von ± 1 verleiht der ferneren Entwicklung erhebliche Klarheit und Einfachheit. Das Problem der Darstellung

einer Zahl n durch eine gegebene Form f wird nunmehr zurückgeführt auf die Frage, ob diese Form mit gewissen andern Formen F mit gleicher Determinante, von denen je eine der Wurzel entspricht, zu der die Darstellung gehörig gedacht wird, äquivalent sei. Die neue Frage aber entscheidet sich durch eine zwiefache Untersuchung. Die eine von ihnen lehrt, daß eine gegebene Form durch eine Kette von sogenannten benachbarten Formen, deren jede mit der vorhergehenden eigentlich äquivalent ist, in eine ihr eigentlich äquivalente Form übergeführt werden kann, deren Koeffizienten durch gewisse Ungleichheiten beschränkt sind, und welche reduziert genannt wird, womit sich dann zugleich auch eine Transformation der gegebenen Form in die reduzierte ergiebt; diesen Umstand und daß die Anzahl der reduzierten Formen nur endlich ist, fand Gauß schon als von Lagrange nachgewiesen vor. Durch die andere Untersuchung wird festgestellt, ob zwei solche reduzierte Formen selbst einander äquivalent sind oder nicht, und im erstern Falle eine Transformation der einen in die andere gegeben. Hierdurch ermöglicht sich nicht nur die Entscheidung jener Frage für jede der gedachten Formen F, sondern auch im Falle der Äquivalenz eine Transformation der gegebenen Form in jede ihr äquivalente von ihnen. Die Bestimmung der reduzierten Formen ist aber eine ganz verschiedene, jenachdem die Determinante D eine positive (nicht quadratische) oder negative Zahl ist. Während im letztern Falle die zweite Untersuchung sehr einfach ist, bereitet sie im erstern größere Schwierigkeit. In ihm zerfallen die reduzierten Formen in eine endliche Anzahl von Perioden benachbarter Formen, welche also einander eigentlich äquivalent sind; daß aber Formen verschiedener Perioden es nicht sind, erfordert einen umständlicheren Beweis, der, wenn man auf sein Wesen sieht, auf die Entwicklung der sogenannten „Wurzeln“ einer reduzierten Form in einen Kettenbruch begründet ist, wie später Dirichlet sehr schön und einfach klargelegt hat. Wenn nun auf dem angedeuteten Wege eine Transformation der Form f in eine der Formen F ermittelt ist, so lassen sie sich sämtlich aufstellen, sobald man alle Auflösungen der von Euler als Pellsche bezeichneten Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

anzugeben weiß. Diesen Teil der Aufgabe, der für eine negative Determinante sich unmittelbar erledigt, löste für den Fall einer positiven Determinante schon Lagrange, der auch zuerst die Existenz einer Auflösung nachwies, auf Grund der Kettenbruchentwicklung für die Quadratwurzel aus D. Die für

den gleichen Zweck von Gauß gegebene Analyse, von der er sagt, sie sei ex principiis omnino diversis petita, und welche durch Verbindung der Transformation einer reduzierten Form in die erste in ihrer Periode ihr gleiche mit der identischen Transformation zum Ziele gelangt, kommt gleichwohl, da die Äquivalenz der aufeinanderfolgenden reduzierten Formen mit der Äquivalenz ihrer Wurzeln identisch, die letztere aber mit jener Kettenbruchentwicklung aufs engste verbunden ist, im Wesen mit der von Lagrange überein.

So haben wir die Ergebnisse der von Gauß in streng logischer Verkettung und mit größter Vollständigkeit unter Berücksichtigung aller Nebenumstände, wie der Formen mit quadratischer oder der Null gleichen Determinante usw., entwickelten Elemente der Theorie in der Hauptsache gezeichnet. Als deren Abschluß können wir die Verteilung aller Formen mit einer gegebenen Determinante in eine endliche Anzahl von Klassen unter einander äquivalenter Formen, die übrigens Lagrange schon zugehört, betrachten. Aus der allgemeinen Theorie aber fließen nun als aus ihrer eigentlich wissenschaftlichen Quelle die schon von Fermat erkannten Sätze von der Darstellbarkeit einer Primzahl von der Form $4n+1$, von einer der Formen $8n+1$ oder $8n+3$, und von der Form $6n+1$ bezw. in den Formen x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2+3y^2, von denen der erste nach etwa dreißig Jahre fortgeführter Bemühung durch Euler, der zweite durch Lagrange, der dritte wieder durch Euler zuerst bewiesen worden war. Den ersten derselben hat Gauß an einer späteren Stelle der D. A. (art. 265) noch einmal aus tieferen Prinzipien wieder hergeleitet.

Nunmehr aber beginnt das üppig fruchtbare Neuland, um welches Gauß' eigenste Forschung die Lehre von den quadratischen Formen bereichert hat. Zur Verteilung der Formen mit gegebener Determinante D in Klassen tritt die weitere Verteilung dieser Klassen in Ordnungen, je nach dem größten gemeinsamen Teiler m der Koeffizienten $a, 2b, c$ ihrer Formen (a, b, c), der für alle Formen einer Klasse derselbe ist, hinzu. Hervorzuheben sind hier die eigentlich — und eventuell die uneigentlich — primitive Ordnung, für welche $m = 1$ resp. $m = 2$ ist. Die Klassen einer primitiven Ordnung zerfallen nun wieder in mehrere Geschlechter. Für alle zu $2D$ teilerfremden Zahlen n nämlich, welche durch eine primitive Form darstellbar sind, sind ihre quadratischen Charaktere bezüglich der einzelnen Primfaktoren der Determinante und in besonderen Fällen auch bezüglich der Moduln 4 oder 8 die gleichen. Diese Einzelcharaktere, deren Anzahl λ heiße, bilden zusammen den

Gesamtcharakter der Form und auch der Klasse, der sie angehört, und alle Klassen, deren Gesamtcharakter derselbe ist, bilden ein Geschlecht. Die Anzahl aller denkbaren Gesamtcharaktere ist $\chi = 2^\lambda$, und es entsteht die Frage, ob für jeden von ihnen ein entsprechendes Geschlecht wirklich vorhanden ist. Zu ihrer Beantwortung dient eine eigentümliche Rechnung, deren Elemente nicht Zahlen, sondern Formklassen sind. Sie gründet sich auf die sogenannte Zusammensetzung quadratischer Formen, für welche die oben eingeführte Gaußsche Grundformel das einfachste Beispiel ist: eine Form

$$AX^2 + 2BXY + CY^2$$

heißt aus den beiden andern:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

zusammengesetzt, wenn sie durch eine bilineare Substitution, deren Koeffizienten gewisse Bedingungen erfüllen, in ihr Produkt übergeht. Aus der von Gauß wieder im Gewande algebraischer Beziehungen gehaltenen ausführlichen allgemeinen Theorie solcher Zusammensetzung entnehmen wir hier nur die wesentlichsten Folgesätze. Ist F eine aus den Formen f, f' und F_1 eine aus den Formen f_1, f_1' zusammengesetzte Form, so gehören F, F_1 derselben Klasse an, wenn sowohl von f, f_1 als auch von f', f_1' je dasselbe gilt. Somit darf die Klasse von F aus den Klassen von f, f' zusammengesetzt heißen. Gauß faßt diese Zusammensetzung zweier Klassen C, C' als eine additive Verknüpfung $C + C'$ derselben; zweckmäßiger ist es, sie als eine Multiplikation zu fassen und die zusammengesetzte Klasse als Produkt der beiden andern durch $C . C'$ zu bezeichnen. Auf Grund dieser Definition bietet nun die Gesamtheit der primitiven Formklassen — abgesehen etwa von den Potenzen einer primitiven Wurzel (mod. p), auf deren Analogie Gauß selbst (art. 306 VI) hingewiesen hat — das erste Beispiel eines Begriffes, der bald nach Gauß in der gesamten Mathematik weitreichende Herrschaft eingenommen hat, des Begriffs der Gruppe, speziell der Abelschen Gruppe dar. Die Zusammensetzung der Formklassen ist kommutativ und assoziativ; nennt man die Form $x^2 - Dy^2$ die Hauptform, die Klasse der sie angehört, die Hauptklasse, das Geschlecht, welches die letztere enthält, das Hauptgeschlecht, so spielt die Hauptklasse bei der Zusammensetzung die Rolle der Einheit, indem jede Klasse bei der Zusammensetzung mit ihr ungeändert bleibt; zwei entgegengesetzte Klassen, nämlich solche, in denen entgegengesetzte Formen (a, b, c), $(a, -b, c)$ auf-

treten, sind einander reziprok d. h. sie setzen sich zur Hauptklasse zusammen. Aus diesen von Gauß hergeleiteten Sätzen folgt nun nach einem allgemeinen für Abelsche Gruppen von Kronecker bewiesenen Satze, was speziell für die Formklassen vordem schon Schering gezeigt hat, daß alle Klassen eindeutig aus einer Anzahl fundamentaler Klassen zusammensetzbar sind. Soweit ist aber Gauß noch nicht gelangt, soweit seine Aufzeichnungen darüber urteilen lassen; er hat nur noch an einer späteren Stelle der D. A. (in artt. 305 u. 306) sowie in einem nachgelassenen, aus dem Jahre 1801 (s. W. II, p. 268) stammenden Fragmente (W. II, p. 266) für diejenige Untergruppe, welche aus den Klassen des Hauptgeschlechtes besteht, solche Darstellung ihrer Klassen mittels fundamentaler begonnen. Lassen sie sich sämtlich durch den Zyklus $C, C^2, C^3, \ldots C^k$ der verschiedenen Potenzen einer einzigen darstellen, so nennt er die Determinante D regulär, andernfalls irregulär, und bezeichnet, wenn dann jener Zyklus der größte der vorhandenen ist, den Quotienten $\frac{g}{k}$, in welchem g die Anzahl aller Klassen des Hauptgeschlechts bedeutet, als den Exponenten der Irregularität; der art. 306 VIII enthält hierüber noch mancherlei Aussagen, u. a. daß die Determinante stets regulär ist, wenn g keinen quadratischen Teiler hat, daß in der wachsenden Reihe der negativen Determinanten die Menge der irregulären stets zuzunehmen scheint, usw. —

Zu den früheren Betrachtungen zurückkehrend begegnen wir der Frage nach dem Verhältnis der Anzahl Klassen in irgend einer Ordnung O zur Anzahl der eigentlich primitiven Klassen. Es findet sich gleich der Anzahl der letztern Formen, welche mit einer besonderen Form jener Ordnung zusammengesetzt diese Form reproduzieren. Heißt sie (A, B, C), so sind das diejenigen eigentlich primitiven Formen, durch welche A^2 darstellbar ist. Gauß hat ihre Anzahl berechnet für negative Determinanten, für positive aber nur zwischen ihr und der Fundamentalauflösung der Pellschen Gleichung einen Zusammenhang erkannt, den erst nach ihm Dirichlet klargelegt und bestimmt hat. — Ferner heben wir den Satz hervor, daß in jedem Geschlechte derselben Ordnung gleichviel Klassen befindlich sind, beschränken fortan die Betrachtung auf die eigentlich primitive Ordnung und müssen nun besonders der sogenannten Anzepsklassen gedenken, die dadurch charakterisiert sind, daß sie durch Duplikation d. i. durch Zusammensetzung mit sich selbst die Hauptklasse hervorbringen. Von größter Wichtigkeit ist die Gaußsche Bestimmung ihrer Anzahl α, welche gleich der halben

Anzahl aller angebbaren Gesamtcharaktere: $\alpha = \frac{1}{2}\chi$ gefunden wird. Andererseits ist die Anzahl aller eigentlich primitiven Klassen $h = g.\gamma$, wo γ die Anzahl ihrer Geschlechter; während sich zeigen läßt, daß auch $h = \alpha.\delta$ gesetzt werden kann, wenn δ die Anzahl derjenigen unter jenen Klassen bedeutet, welche durch Duplikation entstehen können. Da alle diese aber zum Hauptgeschlechte gehören müssen, sodaß $\delta \overline{\overline{<}} g$ sein muß, so ergibt sich $\gamma \overline{\overline{<}} \alpha$ d. h. der Satz, daß die Anzahl der Geschlechter höchstens halb so groß, wie die aller angebbaren Gesamtcharaktere, daß also für die Hälfte der letztern gewiß kein entsprechendes Geschlecht vorhanden ist.

Nur beiläufig und doch als ein Glanzpunkt in der Reihe dieser Betrachtungen knüpft sich an das letztere Ergebnis, indem es auf den Fall angewandt wird, wo die Determinante eine positive oder negative Primzahl bezw. das Produkt von zwei solchen ist, der zweite, am 27. Juni 1796 (Nr. 16 T.) gefundene Gaußsche Beweis des Reziprozitätsgesetzes samt seiner beiden Ergänzungssätze an, ein Beweis, der, in seiner Grundlage scheinbar so gänzlich fremd der Frage, auf welche er zielt, eben wegen der Verbindung ganz verschiedener Gedankenreihen, die er knüpft, als der tiefste all' seiner Beweise des Gesetzes bezeichnet werden darf.

Noch tiefer dringend aber ist das von Gauß erkannte Mittel, um die durch den zuvor angeführten Satz nur beschränkte Anzahl γ der Geschlechter genau zu bestimmen. Es ist die Theorie der ternären quadratischen Formen

$$f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx',$$

für welche der Ausdruck

$$\Delta = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''$$

die Determinante der Form genannt wird. An sich zwar lag der verallgemeinernde Fortschritt von den binären quadratischen Formen zu den quadratischen Formen mit mehreren Unbestimmten oder auch zu Formen höheren Grades nahe genug. Immerhin hat Gauß mit dem Hinweis und dem am 14. Febr. 1799 (Nr. 96 T.) begonnenen erfolgreichen Beschreiten dieser Richtung der weiteren Forschung ein schier unermeßliches Feld gewiesen, auf welchem dann später die Bemühungen von H. St. Smith und Minkowski, von Eisenstein u. A. reichsten Ertrag geliefert. Für seinen Zweck bedurfte Gauß nur der ersten Elemente der Theorie. Diese laufen, obwohl sie mannigfaltigere Verhältnisse und neue Probleme darbieten, denjenigen der binären Formen ganz parallel. Zur Seite einer Form f ist stets eine zweite F, ihre Adjungierte, zu betrachten, deren

Koeffizienten durch diejenigen der Form f bestimmt sind, deren Determinante gleich Δ^2, und deren eigene Adjungierte im wesentlichen wieder mit f selbst identisch ist. Auch hier ist dann jede Form einer Reduzierten äquivalent, in welcher ebenso wie in der dazu Adjungierten die Koeffizienten durch gewisse Ungleichheiten beschränkt sind und deren Anzahl endlich ist. Neben Zahlen sind aber durch ternäre Formen auch binäre Formen darstellbar, und zwar entspricht einer Darstellung der binären Form $\varphi = (p, q, r)$ durch eine ternäre Form f eine Darstellung ihrer Determinante D durch deren Adjungierte F und umgekehrt; die letztern Darstellungen lassen sich also auf die erstern zurückführen. Diese aber gehören wieder zu gewissen Kongruenzwurzelpaaren g, h (mod. D), nämlich zu einer Lösung der Kongruenzen

$$g^2 \equiv \Delta p,\ gh \equiv -\Delta q,\ h^2 \equiv \Delta r \pmod{D}$$

oder, wie Gauß kurz sagt, zur Wurzel $\sqrt{\Delta(p, -q, r)}$ (mod. D), und die Aufgabe, sie sämtlich zu finden, läuft auf die andere hinaus, die ganzzahligen Transformationen der gegebenen Form f in gewisse andere, jenen Lösungen verbundene Formen mit derselben Determinante und in sich zu ermitteln. Die Lösung der letztern Aufgabe jedoch wurde von Gauß nicht mehr allgemein gegeben. In den D. A. findet sie sich nur noch für die Form $ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2$ mit positiven a, a', a'' und in einer kurzen, in einem am 22. November 1799 begonnenen Notizhefte (Scheda Ac, S. 22) des Nachlasses[1]) enthaltenen Notiz (W. II, p. 311) für die Form $x^2 + x'^2 - x''^2$. Für Formen, durch welche nur positive Zahlen darstellbar sind, hat in der Folge Seeber diese Aufgabe wieder aufgenommen. Seine Arbeit bedeutete aber auch darin einen Fortschritt über Gauß' Darstellung der Theorie, daß es ihr gelungen ist, die Bedingungen für reduzierte Formen so zu fassen, daß in jeder Klasse nur eine von diesen vorhanden ist, sodaß die schwierige Frage nach der Äquivalenz reduzierter Formen ganz wegfällt. Durch Gauß' Anzeige von Seebers Arbeit (W. II, p. 188) sah er sich selbst veranlaßt, sich aufs Neue mit den ternären quadratischen Formen zu befassen und er gab zunächst den Beweis der nur induktiv von Jenem gemachten Bemerkung, daß für die reduzierten Formen stets $aa'a'' < 2\Delta$ sei. Gauß hat aber auch bei dieser Gelegenheit (am 9. Juli 1831) der Theorie der quadratischen Formen, sowohl der binären wie der ternären, eine ganz andere, nämlich geometrische Deutung gegeben, als Erster von Allen ihren Zusammenhang mit den sogenannten Zahlengittern, den geometrischen Sinn der eigent-

1) Die Hinweise auf den Nachlaß entsprechen dem von Herrn Brendel angefertigten Register desselben.

lichen wie der uneigentlichen Äquivalenz sowie der zuvor angeführten Seeberschen Ungleichheit und anderes klargelegt, wodurch die Theorie der ternären Formen sogar praktischen Wert erhält als ein Hilfsmittel für die Kristallographie; in einem kurzen, aus dem Juli 1831 (W. II, p. 311) stammenden Fragmente (W. II, p. 305) hat Gauß seine bezüglichen Andeutungen durch eine Reihe raumgeometrischer Sätze weiter ausgeführt und für die letztgenannte Disziplin verwertet. Übrigens war ihm die Vorstellung der Zahlengitter, wenigstens solcher von besonderer Art, lange vor jener späten Veröffentlichung schon vertraut. Schon die doppelte Periodizität der lemniskatischen, allgemeiner der elliptischen Funktionen, deren Untersuchung ihn bereits zu der Zeit der D. A. beschäftigte, mußte sie ihm nahe legen. Als ihm dann, mit unter dem Einflusse dieser Untersuchungen, der Gedanke kam, der Theorie der biquadratischen Reste die komplexen ganzen Zahlen $a+bi$ zu Grunde zu legen, boten sich ihm die quadratischen, bei den kubischen Resten auch parallelogrammatische Zahlengitter dar, von denen er sowohl in seinen Abhandlungen W. II, p. 65 u. 93, wie in den nachgelassenen Schriftstücken W. II, p. 313—374 und VIII, p. 18 verschiedentlich Gebrauch gemacht hat, desgleichen auch bei dem geometrischen Hilfssatze W. II, p. 271, 277, auf welchen er seine Bestimmung der Klassenanzahl quadratischer Formen stützt. In der Theorie der letztern aber, wie die D. A. sie enthalten, tritt die gedachte geometrische Vorstellung nirgends zu Tage, so wenig wie die damit verwandte Zerlegbarkeit der Formen in irrationale Linearfaktoren, zu der namentlich die Lehre von der Komposition der Formen den besten Anlaß bot; erst Dirichlet hat von der letzteren ausgiebigeren Gebrauch gemacht und in neuerer Zeit F. Klein gezeigt, wie schön die Zahlengitter zur Veranschaulichung der Kompositionslehre benutzt werden können. Welche ganz neuen arithmetischen Probleme aber aus der Gittervorstellung entspringen, hat dann Minkowski in seiner Geometrie der Zahlen und den bezüglichen späteren Arbeiten in weitem Umfange entwickelt.

In den D. A. leistet die Theorie der ternären quadratischen Formen aber den ebenso wichtigen Dienst, durch ihre Anwendung auf die Darstellung einer binären Form durch die besondere ternäre Form $x^2-2x'x''$ erkennen zu lassen, daß jede Klasse des Hauptgeschlechts binärer Formen durch Duplikation entsteht, mithin $\delta=g$, also auch $\gamma=\alpha=\frac{1}{2}\chi$ und somit für die eine Hälfte aller Gesamtcharaktere stets ein dem betreffenden Charakter entsprechendes Geschlecht vorhanden ist. Das Reziprozitätsgesetz gestattet auch, diese Hälfte der Gesamtcharaktere näher zu bestimmen; sie

umfaßt diejenigen, für welche $\left(\frac{D}{n}\right) = 1$ ist, wenn n eine durch eine Form des entsprechenden Geschlechts darstellbare zu $2D$ teilerfremde Zahl bedeutet. — Gauß hat sich nicht getäuscht, wenn er (art. 287 Schluß) diese so einfach lautenden und doch so tief wurzelnden Sätze zu den allerschönsten der ganzen Arithmetik rechnen zu dürfen gemeint hat.

Nachdem Gauß diesen hochbedeutsamen Punkt festgestellt hatte, führte ihn die Theorie der ternären Formen auch zu andern schönen Ergebnissen. Er bestimmte die Anzahl eigentlicher Darstellungen sowohl einer Zahl wie einer binären Form als Summe dreier Quadrate; während für die Zahlen von den Formen $8\varkappa$, $8\varkappa + 4$, $8\varkappa + 7$ keine solche möglich ist, läßt jede andere Zahl n eine Anzahl von Darstellungen zu, welche bemerkenswerter Weise von der Anzahl der Klassen im Hauptgeschlechte derjenigen binären Formen abhängt, deren Determinante $-n$ ist. So lieferte schon Gauß ein ausgezeichnetes Beispiel viel allgemeinerer Ergebnisse, zu denen nach ihm namentlich H. St. Smith und Minkowski gelangt sind und bei denen der von Eisenstein neu eingeführte Begriff des Maßes von Formen oder Darstellungen als bestimmend in den Vordergrund tritt. Aus der Darstellung als Summe dreier Quadratzahlen folgerte er dann leicht auch den zuvor noch unbewiesenen Fermatschen Satz, daß jede Zahl als Summe dreier Dreieckszahlen darstellbar sei. Das *ʽΕΥΡΗΚΑ*, mit welchem Gauß in Nr. 18 T. unter dem 10. Juli 1796 seinen auf diesen Satz bezüglichen Fund hervorhebt, läßt auf den Wert schließen, den er ihm beigemessen hat, und die Folgerung zu, daß, was er gefunden, neu für ihn war. Wenn es die induktive Tatsache des Fermatschen Ausspruchs war, so mußte er ihm damals also noch unbekannt sein. Ein direkter, von der Theorie der ternären quadratischen Formen unabhängiger Beweis ist es gewiß nicht gewesen, ihn würde Gauß sicherlich in seinen D. A. mitgeteilt haben. Andererseits zeigt zwar Nr. 17 T. vom 3. Juli 1796, daß er damals wenigstens schon mit der besonderen ternären Form $x^2 + x'^2 + x''^2$ sich befaßt und für diese gefunden, was später, als er die Theorie der ternären quadratischen Formen regelrecht durchführte, in art. 280 allgemein von ihm festgestellt worden ist. Da er aber für die Sätze des art. 288/9 über die Darstellung von Zahlen durch jene Form erst viel später (April 1798, Nr. 84 T.) den sicheren Boden fand (das betreffende Resultat ist zu art. 288 erforderlich), bleibt die Annahme eines Induktionsschlusses wahrscheinlich, es müßte denn Gauß insbesondere der Darstellbarkeit der Zahlen $8\varkappa + 3$ irgendwie schon gewiß geworden sein und aus

ihr den Fermatschen Satz wie in den D. A. gefolgert haben. Vielleicht findet letztere Meinung eine Stütze in der Bemerkung: Kap. 5. In demonstratione nostra de connexione discerptionum in $\square \overset{\square}{} \square$ et formarum [Linearformen?] ad formas ubi $\alpha = 8n+3$ respiciendum, welche nebst mehreren anderen unter der Überschrift: Inserenda in opere meo de Residuis (wohl einer frühen oder erst beabsichtigten Niederschrift seiner D. A.) bei Gauß' Auszügen aus den Miscell. Taurin. vol. I—IV zu finden ist. Übrigens liest man auch schon in Gauß' durchschossenem Exemplare von Leiste, Arithmetik und Algebra zu S. 68 den Satz „Jede Zahl besteht aus drei Trigonalzahlen" und im Anschluß daran die Angabe, daß jede Zahl von den Formen $8n+1$, 3, 5 als Summe von drei, die Zahlen von der Form $8n+7$ als Summe von vier Quadraten darstellbar sei, mit Angabe zugleich von deren Parität oder Imparität.

Ferner gewährte die allgemeine Theorie der ternären Formen die Herleitung der Bedingungen für die Auflösbarkeit der Gleichung

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 = 0,$$

die ebenfalls in Leiste zu S. 111 ausgesprochen sind, sowie eine Methode zur Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbestimmten in rationalen Werthen der letztern, während ihre ganzzahlige Auflösung schon an früherer Stelle (art. 216 sqq.) mittels Zurückführung auf die Darstellung einer ganzen Zahl durch eine binäre Form geleistet worden war. Die Aufgabe, die allgemeine Gleichung

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx' = 0$$

in ganzen Zahlen zu lösen, findet sich kurz skizziert auch in einem im Juli 1800 begonnenen Notizbüchlein des Nachlasses (Scheda Ae, S. 4/5) behandelt und auf dieselben Prinzipien zurückgeführt, welche Gauß für die Auflösung der genannten einfacheren Gleichung benutzt hat. Es ist dabei bemerkenswert, daß er die Bedingungen zu ihrer Auflösbarkeit, die aus den für jene einfachere Gleichung geltenden ableitbar und zuerst von H. St. Smith bekannt gemacht worden sind, a. a. O. in völliger Übereinstimmung mit dem Letztern ausgedrückt hat.

Noch sei bemerkt, daß aus einer kurzen Notiz des Nachlasses (Ed 3) hervorgeht, daß Gauß auch schon quadratische Formen von der Art, die man Hermitesche nennt, betrachtet hat. Dort gibt er die Transformation einer Form

$$axx' + bx'y + b'xy' + cyy'$$

mit reellen a, c, für welche er $\Delta = bb' - ac$ als Determinante be-

nennt, mittels der Substitution

$$x = -u, \quad y = t + mu'$$
$$x' = -u', \ y' = t' + m'u',$$

wobei die akzentuierten Größen die konjugiert imaginären zu den nicht akzentuierten sind. Eine andere Notiz über „duplizierte quadratische Formen“, in welcher auch schon die kubische Form

$$x^3 + ny^3 + n^2 z^3 - 3nxyz$$

auftritt (im Handbuche vom Oktober 1805 S. 151) deutet durch den dort auftretenden Ausdruck

$$a + b\sqrt{-3}\,.\,x + c\sqrt{-7}\,.\,y + d\sqrt{21}\,.\,xy$$

auf eine Beschäftigung mit den biquadratischen Formen hin, welche Normen komplexer, aus zwei Quadratwurzeln gebildeter Zahlen sind. Dies bestätigt eine Notiz in einem der Gaußschen Handexemplare der D. A., nach welcher jede Primzahl $8n+1$ als Norm der komplexen Zahl

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} + \gamma\sqrt{-2} + \delta\,.\sqrt{-1}\,.\sqrt{-2}$$

in der Gestalt

$$p = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2 - 2\delta^2)^2 + 8(\alpha\gamma + \beta\delta)^2$$

darstellbar sei.

Der sechste Abschnitt der D. A. enthält nur einige Anwendungen des Vorhergehenden teils zur Zerlegung eines Bruchs $\frac{m}{n}$ in sogenannte Partialbrüche, deren Nenner die in n enthaltenen Primzahlpotenzen sind, teils zu seiner Entwicklung in einen periodischen Dezimalbruch und zur Bestimmung der Größe von dessen Periode aus den Exponenten, zu welchen die Zahl 10 bezüglich jener Potenzen als Moduln gehört; ferner Methoden zur Unterscheidung der Primzahlen von den zusammengesetzten Zahlen und im Zusammenhange damit zur Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv A$ (mod. M), der Gleichung $mx^2 + ny^2 = A$ usw., was alles mehr praktisches als theoretisches Interesse erweckt. —

Der Fortgang zum siebenten Abschnitte der D. A. aber führt uns nun zu Ergebnissen, welche wohl unter Gauß' arithmetischen Entdeckungen das vielseitigste Interesse darbieten. Eigentlich nur eine ganz einfache Anwendung eines elementaren arithmetischen Satzes, sind sie gleichwohl zur Quelle der schönsten zahlentheoretischen Erkenntnisse geworden, ja schließlich zur Grundlage der stolzesten Gebilde, welche die neuere Zahlentheorie

in ihrer Lehre von den Zahlenkörpern und deren Idealen geschaffen hat. Andererseits aber hat eben jene Anwendung die engste Verbindung herbeigeführt zwischen der höheren Arithmetik auf der einen, und der Theorie der algebraischen Gleichungen auf der anderen Seite, und wieder durch die Natur der in Frage kommenden Gleichungen jene Wissenschaft auch als Ursprung tiefliegender Wahrheiten der Geometrie erwiesen, eines Gebietes, das an sich gänzlich ihr abseits zu liegen schien. Hatte die Lösung der Aufgabe, die Kreisperipherie in eine Anzahl gleicher Teile zu teilen, völlig auf dem Standpunkte beharrt, den sie vor 2000 Jahren schon erreicht und auf dem sie scheinbar sich erschöpft hatte, so lehrte jene arithmetische Anwendung neben den schon bekannten noch mancherlei Teiler kennen, für welche die Aufgabe ebenfalls mit Zirkel und Lineal ausführbar war, insbesondere die Konstruktion des regelmäßigen Siebenzehnecks. Wie ein neuer glänzender Stern am Firmamente mußte diese Entdeckung Aufsehen erregen, und Gauß selbst schätzte sie gebührend hoch ein, indem er nicht nur von seinem, am 30. März 1796 (Nr. 1 T.) gefundenen Forschungsresultate in Nr. 66 des Intelligenzblatts der allg. Litteraturzeitung (1. Juli 1796) unter dem Datum des 18. April schon vor der Veröffentlichung seiner Theorie Kenntnis gab, sondern es auch seinem Freunde Bolyai gegenüber als ein solches bezeichnete, das hinreichend sei, als Ruhmestitel sein Grabmal zu zieren.

Wie Gauß zu seiner Theorie geführt sein mag? Kaum wohl von Seiten der Geometrie, der er (s. Sartorius v. Waltershausen, Gauß z. Gedächtnis, p. 80/1) in seiner Jugend kein großes Interesse geschenkt hat, wahrscheinlicher durch algebraische Studien, welchen er ohne Zweifel neben seinen arithmetischen schon frühzeitig obgelegen hat und aus denen dann seine Doktorarbeit (1799) hervorgegangen ist. Welche Gleichung höheren Grades konnte ihm näher liegen, als die Gleichung $x^p = 1$, deren Wurzeln dann das Problem der Kreisteilung von selber in den Gesichtskreis zogen! Wie bedeutsam dabei, daß Gauß diese einfachere Gleichung jenen andern, durch welche die trigonometrischen Funktionen von $\frac{2\pi}{p}$ selbst bestimmt werden, vorzog, obwohl ihre Wurzeln zu den imaginären Größen zählen, deren Bürgerrecht in der Wissenschaft damals noch so umstritten war, daß er sie in seiner Doktorarbeit geflissentlich vermied!

Bedenkt man aber, daß in Kap. 6 der A. R. die Theorie der Gleichung $x^p = 1$ erst derjenigen der Kongruenz $x^p \equiv 1$ nachfolgt und daß die Methode zur Auflösung der letztern das

genaue Vorbild für die Auflösung der Kreisteilungsgleichung ist, so darf man wohl auf den rein arithmetischen Ursprung von Gauß' Beschäftigung mit der letzteren schließen. Ist doch das Prinzip seiner Methode von dieser Art! Die Wurzeln jener Gleichung oder genauer der Gleichung

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

die, wenn wir $r = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ setzen, durch die Potenzen $r, r^2, r^3, \ldots, r^{p-1}$ dargestellt sind, zeigen, wenn p als eine ungerade Primzahl vorausgesetzt wird, auf Grund des arithmetischen Satzes, daß die Potenzen $1, g, g^2, \ldots, g^{p-2}$ einer primitiven Wurzel g (mod. p) den Resten $1, 2, 3, \ldots, p-1$ von der Ordnung abgesehen kongruent sind, das eigentümliche Verhalten, daß bei der zyklischen Anordnung $r, r^g, r^{g^2}, \ldots, r^{g^{p-2}}$ derselben jede die gleiche rationale Funktion (nämlich die g^{te} Potenz) der vorhergehenden ist. Mit dieser Einsicht war der schöpferische Gedanke gewonnen, aus welchem die ganze Gaußsche Theorie der Kreisteilungsgleichung entsprang. Die Verallgemeinerung der Gaußschen Betrachtung, welche wir Abel verdanken, ließ darauf später die algebraische Auflösbarkeit aller Gleichungen erkennen, deren Wurzeln analoge Eigenschaft zeigen, und eröffnete den Weg zu den bahnbrechenden Ergebnissen von Galois und Kronecker über die algebraische Auflösung der Gleichungen, deren wir uns jetzt erfreuen. Übrigens war sich Gauß selbst schon zur Zeit der D. A. bewußt, daß seine Methode zur Auflösung der Kreisteilungsgleichung viel weiter reichte. Im art. 335 weist er in dieser Hinsicht auf die Funktionen hin, die aus dem Integrale $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ entspringen und für die Lemniskate gleiche Bedeutung haben, wie die trigonometrischen für den Kreis, und er hat nach den Angaben seines Tagebuchs schon am 19. März 1797 (Nr. 60 T.) die Gleichung untersucht, die zur Teilung der Lemniskate dient, und am 21. desselben Monats (Nr. 62 T.) die Tatsache festgestellt, daß die Fünfteilung auch für diese Kurve geometrisch mittels Zirkel und Lineal ausführbar sei.

Gauß' Methode beruht nun einerseits auf der Irreduktibilität der Gleichung $X = 0$, für welche er in art. 341 den ersten der vielen Beweise gab, die man jetzt dafür kennt; nach Nr. 40 des T. war er aber erst am 9. Oktober 1796 in seinem Besitze und hat dann (Nr. 136 T.) am 12. Juni 1808 auch für die Irreduktibilität der Gleichung, welche die primitiven p^{ten} Wurzeln der

Einheit bestimmt, falls p eine zusammengesetzte Zahl ist, einen Beweis gehabt. Diese Gleichung selbst sowie einige Grundgedanken des Beweises finden sich in dem im Oktober 1805 begonnenen und über 1808 hinaus fortgeführten Handbuche des Gaußschen Nachlasses (auf S. 198/9), eine Notiz, der man mithin wohl auch jenes Datum des Tagebuchs beilegen darf. Der andere Grundpfeiler seiner Theorie ist die Verteilung der Wurzeln in sogenannte Perioden. Ist $p-1 = e.f$, so erhält man e f-gliedrige Perioden

$$\eta_i = r^{g^i} + r^{g^{i+e}} + r^{g^{i+2e}} + r^{g^{i+(f-1)e}}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, e-1).$$

Sie sind die Wurzeln einer Gleichung $X_e = 0$ vom e^{ten} Grade, deren Koeffizienten rationale ganze Zahlen sind, und welcher dieselbe charakteristische Grundeigenschaft zukommt, wie der Gleichung $X = 0$: in der zyklischen Anordnung $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$ ihrer Wurzeln ist jede die gleiche rationale Funktion von der vorhergehenden. Diese Gleichung gestattet somit eine entsprechende Behandlung. Zerlegt man die f-gliedrigen Perioden, indem man $e = e'.f'$ setzt, jede in e' Perioden von f' Gliedern, so sind die e' Perioden

$$\eta_i' = r^{g^i} + r^{g^{i+ee'}} + \cdots + r^{g^{i+(f'-1)ee'}},$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, e'-1)$$

welche die Periode η_0 zusammensetzen, die Wurzeln einer Gleichung $X_{e'}' = 0$ vom Grade e', deren Koeffizienten rational (genauer: linear) durch die f-gliedrigen Perioden ausdrückbar und somit nach Auflösung der Gleichung $X_e = 0$ bekannt sind. Auch diese Gleichung ist von demselben Charakter, wie die vorigen, und kann daher ebenso behandelt werden, usw.. Hiernach kommt, wenn irgendwie $p-1 = ee'e'' \ldots e^{(\nu-1)}$ gesetzt wird, die Auflösung der Kreisteilungsgleichung darauf zurück, der Reihe nach die Hilfsgleichungen $X_e = 0$, $X_{e'}' = 0, \ldots X_{e^{(\nu-1)}}^{(\nu-1)} = 0$ von den Graden $e, e', \ldots, e^{(\nu-1)}$ aufzulösen. Man erhält die Hilfsgleichungen kleinsten Grades, wenn man $p-1$ in seine Primzahlpotenzen: $p-1 = a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma$ zerlegt denkt, und hat dann α Gleichungen vom Grade a, β Gleichungen vom Grade $b, \ldots, \gamma$ Gleichungen vom Grade c zu lösen. Nur in dem Falle $p = 2^{2^k}+1$ sind alle Hilfsgleichungen quadratisch, die Kreisperipherie also mittels Zirkel und Lineal in p gleiche Teile zu zerlegen; in jedem andern Falle tritt mindestens eine Hilfsgleichung höheren Grades auf, und mit gesperrtem Druck ist in art. 365 von Gauß bemerkt worden, daß sie dann auf keine Weise zu vermeiden oder zu erniedrigen ist (omni rigore demon-

strare possumus, has aequationes elevatas nullo modo nec evitari nec ad inferiores reduci posse). Dieser Passus ist offenbar dem Werke noch in letzter Stunde während des Drucks eingefügt worden, da (nach Nr. 116 T.) Gauß erst am 6. April 1801 zu solcher Gewißheit gelangte, die D. A. aber im Sommer dieses Jahres erschienen, und er zeigt, wie tiefe Blicke Gauß schon in die algebraische Auflösung der Gleichungen getan haben muß. Der Beweis selbst ist aber weder in den Schriften noch im Nachlasse von Gauß vorhanden. Das Siebenzehneck gehört zu den erstbezeichneten Fällen, ist also mit Zirkel und Lineal konstruierbar, und ist in Übereinstimmung mit der Gaußschen Theorie zuerst von Erchinger (s. W. II, p. 186) rein geometrisch konstruiert worden.

Gauß hat aber ferner jede der Hilfsgleichungen auf eine reine Gleichung zurückzuführen gelehrt, indem er sich dazu der Resolvente von Lagrange bediente. Die Verwendung der Resolvente ist in Gauß' Tagebuch (Nr. 65, 66 T.) auf den 17. Juli 1797 datiert, denn die dort angegebene deductio secunda ist nichts anderes, als die in art. 360 der D. A. gelehrte Methode, wie aus dem Passus: quae theoriam s e c u n d a m aequationum purarum in art. 360 D. A. inchoatam magis illustrant (W. II, p. 263, Ende von Nr. 18) deutlich hervorgeht, während mit der Notiz Nr. 55 T. vom 19. Januar 1797 die e r s t e Methode der sukzessiven Hilfsgleichungen gemeint sein dürfte. Übrigens tritt der Gedanke an das Mittel der Resolvente schon früher (am 17. Sept. 1796, Nr. 37 T.) anscheinend selbständig bei Gauß auf, wie er denn auch andere, elementarere Stücke der Lehre von den Gleichungen, wie die Newtonschen Formeln (Nr. 6 T. 23. Mai 1796; Nr. 28 T. 21. Aug. 1796) und anderes für die Entwicklung seiner Kreisteilungstheorie sich erst selbst zurechtgelegt zu haben scheint. Setzt man nun, unter R eine primitive e^{te} Einheitswurzel verstehend,

$$[r, R^i] = r + R^i r^g + R^{2i} r^{g^2} + \cdots + R^{(p-2)i} r^{g^{p-2}},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, e-1)$$

wofür auch

$$[r, R^i] = \eta_0 + R^i \eta_1 + R^{2i} \eta_2 + \cdots + R^{(e-1)i} \eta_{e-1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, e-1)$$

geschrieben werden kann, so findet sich

$$[r, R^i]^e = T_i,$$

wo T_i gleichzeitig mit der Wurzel R als bekannt betrachtet werden kann. Durch Auflösung dieser $e-1$ reinen Gleichungen e^{ten} Grades und mit Zuhilfenahme der Gleichung $[r, 1] = -1$ findet sich dann

sogleich

$$\eta_0 = \frac{1}{e}(-1+\sqrt[e]{T_1}+\sqrt[e]{T_2}+\cdots+\sqrt[e]{T_{e-1}})$$

d. i. die Auflösung der Gleichung $X_e = 0$, und ähnlicherweise werden die übrigen Hilfsgleichungen gelöst. Die allzugroße Vieldeutigkeit dieser Formel beschränkt man auf das zutreffende Maß, wenn man beachtet, daß allgemein auch der Ausdruck

$$[r, R^i].[r, R]^{e-i} = T^{(i)}$$

eine bekannte Größe ist, sodaß die vorige Formel auch in die Gestalt

$$\eta_0 = \frac{1}{e}\left(-1+\sqrt[e]{T_1}+\frac{T^{(2)}}{T_1}\cdot(\sqrt[e]{T_1})^2+\cdots+\frac{T^{(e-1)}}{T_1}\cdot(\sqrt[e]{T_1})^{e-1}\right)$$

gesetzt werden kann, aus welcher dann die übrigen Perioden $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$ hervorgehen, wenn der einen noch auftretenden Wurzel ihre sämtlichen Werte beigelegt werden. Nur irrtümlicherweise konnte, wie Gauß bemerkt hat (W. II, p. 249), Lagrange (Traité de la résolution numérique des équations, 2. éd, Schlußparagraph 297) die erstere Formel als die vorzüglichere bezeichnen; der hierbei auftretende Zweifel, ob $T_1 = [r, R]$ auch nicht Null sei, kann, wie schon Gauß bemerkt aber nicht weiter bewiesen hat, behoben werden. Auch gab schon Gauß (W. II, p. 252) in einer Abhandlung, welche aus dem Jahre 1808 stammt (W. II, p. 265, Bemerkungen), den später von Jacobi u. A. hergeleiteten Summen-Ausdruck für den Quotienten

$$\frac{[r, R^i].[r, R^k]}{[r, R^{i+k}]},$$

insbesondere auch die Formel

$$[r, R^i].[r, R^{-i}] = (-1)^i.p$$

und zeigte (W. II, p. 250), daß zur Bestimmung von $\sqrt[e]{T_1}$ bei Hinzunahme der e^{ten} Einheitswurzeln d. h. neben der Teilung der ganzen Peripherie in e gleiche Teile die Teilung eines gegebenen Winkels in ebensoviel gleiche Teile nebst der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer bekannten Größe genügt. Insonderheit erfordert die Auflösung der Kreisteilungsgleichung $X = 0$ selbst d. h. die Teilung des Kreises in p gleiche Teile nur die Teilung des Kreises und die eines dann gegebenen Winkels in $p-1$ gleiche Teile nebst der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer bekannten Größe, nämlich $\sqrt{p}$.

Die Wurzeln von $X = 0$, welche einer der f-gliedrigen Perioden η_i angehören, sind Wurzeln einer anderen Gleichung

vom Grade f, deren Koeffizienten linear durch die Perioden η_i ausdrückbar sind. Daher zerfällt, wenn die letzteren bekannt geworden sind, der Ausdruck X in e Faktoren f^{ten} Grades mit rational bekannten Koeffizienten. Als Gleichung für die zwei $\frac{p-1}{2}$-gliedrigen Perioden fand Gauß die folgende:

$$x^2 + x + \frac{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}{2} = 0$$

und die zugehörige Zerlegung

$$4 . X = Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} . pZ^2,$$

wo Y, Z ganze ganzzahlige Funktionen von x sind. Auf jener Gleichung beruhen die beiden Beweise des Reziprozitätsgesetzes, welche die A. R. (W. II, p. 234/5) enthält; den Gaußschen Tagebuchnotizen zufolge (s. Nr. 30 T.) muß sie ihm also schon vor dem 2. September 1796 bekannt gewesen sein. Der Herleitung dieser Gleichung entnahm er aber auch (D. A. art. 356) einen neuen Beweis für den quadratischen Charakter $\left(\frac{-1}{p}\right)$ und ward hier schon auf die sogenannten Gaußschen Summen geführt, die uns noch nachher beschäftigen werden. Desgleichen fand er am 1. Oktober 1796 zunächst durch Induktion (Nr. 39 T.) die Gleichung für die drei $\frac{p-1}{3}$-gliedrigen Perioden[1]) und versah sie (Nr. 67 T.) dann am 20. Juli 1797 mit dem Beweise, welchen art. 358 der D. A. enthält und in dessen Verlaufe nebenbei die Zerlegung $4p = x^2 + 27y^2$ für die Primzahlen von der Form $p = 6n+1$ gefunden wird; nach Nr. 135 des T. hat er diesen Beweis am 10. Mai 1808 auf wesentlich einfachere Grundsätze zurückgeführt, ohne jedoch letztere näher zu bezeichnen. Ebensowenig findet sich in seinen Schriften die Zerlegung von X in vier den Wurzeln der $\frac{p-1}{4}$-gliedrigen Prioden entsprechende Faktoren, die er (nach Nr. 128 T.) im Jahre 1806

1) Diese Gleichung, auf deren Aufsuchung schon anderweitige Notizen, wie die in Leiste, Arithm. u. Algebra zu p. 8 und in Hellwig, Anfangsgründe der Mathematik (letzte Einbandseiten) deuten, wird in Lamberts Tabellen p. 223 unter der Form

$$z^3 - 3pz - p(9a - p - 1) = 0$$

gegeben, während

$$4p = 3N^2 + (9a - p - 1)^2.$$

noch ausgeführt hat. Nur die Hilfsmittel zur Bildung der dazu erforderlichen Hilfsgleichung vierten Grades liegen in den Betrachtungen der artt. 15—20 der ersten Abhandlung über die biquadratischen Reste bereit, mit denen sie, wie Gauß selbst in art. 22 dort angemerkt hat, aufs engste verbunden ist.

Aus den in dieser Skizze angegebenen Daten ist ersichtlich, daß zur Zeit, als Gauß seine Entdeckung bezüglich des Siebenzehnecks bekannt gab, ihm, wie er selbst dabei ausgesagt hat, zu einer vollständigen, logisch festgefügten Theorie der Kreisteilung doch noch eine ganze Reihe wesentlicher Sätze fehlte. Kaum wird man daher fehl gehen, wenn man jene Entdeckung als einen glücklichen Wurf, weniger als Ergebnis denn als Quelle der allgemeinen Methode betrachtet. Vielleicht bestärkt diese Ansicht der Umstand, daß Gauß seine Tagebuchnotiz Nr. 1 in seiner handschriftlichen Anmerkung zu art. 365 D. A. (W. I, p. 476) dahin beschränkt: Circulum in 17 partes divisibilem esse geometrice deteximus 1796 Mart. 30. Das arithmetische Prinzip der cyklischen Anordnung der Wurzeln wird Gauß gehabt haben; der Kosinus des Teilwinkels bot ihm die zweigliedrige Periode, die Fünfteilung die quadratische Hilfsgleichung, welche der Verdopplung der Anzahl der Periodenglieder entspricht, und die Wiederholung der letzteren bei der Siebenzehnteilung führte nicht nur zu glücklichem Ziele, sondern auch zur Erkenntnis der allgemeinen Methode, deren Erfolg Gauß sicher genug übersah, um ungeachtet der noch vorhandenen Lücken die oben erwähnte Anzeige wagen zu können. —

An die D. A. fügen wir nun naturgemäß zunächst die Betrachtungen der A. R., deren weitere Ausführung Gauß als ihre Fortsetzung geplant hatte. Im ersten Teile derselben (W. II, p. 199—211) wird die Lösung der binomischen Kongruenz $x^n \equiv 1$ in Bezug auf einen Primzahlmodul p gelehrt. Man darf n als Teiler von $p-1$ und als eine Primzahlpotenz voraussetzen; ist $\varphi(n) = a^\alpha b^\beta \ldots$, so kommt die Auflösung der Kongruenz auf α Kongruenzen vom Grade a, β Kongruenzen vom Grade $b, \ldots$ zurück. Dies zeigt sich für eine Primzahl n in ganz entsprechender Weise wie bei der Gleichung $x^n = 1$. Sei r primitive Wurzel von $x^n \equiv 1$ (mod. p), ϱ primitive Wurzel von $x^{\varphi(n)} \equiv 1$ (mod. n) und $\varphi(n) = e.f$, und bildet man die Perioden

$$\eta_i = r^{\varrho} + r^{\varrho^{e+i}} + r^{\varrho^{2e+i}} + \cdots + r^{\varrho^{(f-1)e+i}},$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, e-1)$$

so ist

$$\eta_i \eta_k \equiv C + m_0 \eta_0 + \cdots + m_{e-1} \eta_{e-1} \pmod{p},$$

wo C und die m ganze Zahlen bedeuten. Setzt man ferner $e = e'f'$ und zerlegt η_i in kleinere Perioden

$$\eta_i = \eta'_{0i} + \eta'_{1i} + \cdots + \eta'_{e'-1,i},$$

so ist die Summe

$$\eta'_{0h} \cdot \eta'_{0k} + \eta'_{1h} \cdot \eta'_{1k} + \cdots + \eta'_{e'-1,h} \cdot \eta'_{e'-1,k}$$

eine lineare Funktion von den η_i. Daher kann man, wenn die letzteren bekannt sind, die Potenzensummen

$$\eta'^m_{0i} + \eta'^m_{1i} + \cdots \eta'^m_{e'-1,i}$$

bilden und mittels ihrer eine Kongruenz, deren Wurzeln die kleineren Perioden sind. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt das obgenannte Ergebnis herbei. Dabei ist zu beachten, daß aus einer Periode η_0 die übrigen mittels linearer Kongruenzen von der Gestalt

$$\eta_0^h \equiv C_h + m_0^{(h)} \eta_0 + m_1^{(h)} \eta_1 + \cdots + m_{e-1}^{(h)} \eta_{e-1}$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots, e-1)$$

bestimmt werden können, vorausgesetzt, daß die Determinante dieser Kongruenzen nicht durch p teilbar ist. Die hier bleibende Lücke hat Gauß, wenn seine Tagebuchnotiz vom 21. Juli 1797 (Nr. 68 T.) hierauf zu beziehen ist, zu ergänzen gewußt, indem er die Theorie der Kongruenzen zu Hilfe zog, die in Bezug auf einen Primzahlpotenzmodul gedacht werden; in welcher Weise aber, tritt nicht zu Tage.

Von der besonderen Kongruenz $x^n \equiv 1$ wendet sich Gauß (W. II, p. 212—242) allgemein zur Betrachtung der Kongruenzen höheren Grades $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Da die Aufgabe, eine Wurzel einer solchen zu finden, nur ein spezieller Fall der allgemeinen ist, die Funktion $F(x) \pmod{p}$ in ihre einfachsten Faktoren zu zerlegen, sieht man sich zu Untersuchungen geführt, welche denjenigen der Theorie der rationalen ganzen Zahlen völlig analog sind, indem die ganzen Funktionen $F(x)$ an Stelle der letzteren treten. In solcher Analogie ist die Theorie systematisch von Dedekind entwickelt worden, nachdem schon früher Schönemann sie auf anderen Grundlagen aufgebaut hatte. Gauß' Darstellung derselben nimmt mehr des Ersteren Weg und liefert bereits die größte Anzahl der allgemeinen Sätze, zu denen Dieser gelangt ist. Nach Definition der Teilbarkeit einer Funktion $F(x) \pmod{p}$ treten

die Primfunktionen als Grundelemente hervor, in die jede andere Funktion eindeutig zerlegbar ist; für relative Primfunktionen $A(x)$, $B(x)$ lassen sich andere Funktionen $C(x)$, $D(x)$ finden derart, daß

$$A(x).C(x)+B(x).D(x) \equiv 1 \pmod{p}$$

(s. die Notiz vom 19. Aug. 1796, Nr. 27 T.). Die Anzahl der inkongruenten Funktionen m^{ten} Grades (mod. p) ist p^m. Die Anzahl (m) der inkongruenten Primfunktionen m^{ten} Grades hat Gauß (am 26. Aug. 1797, Nr. 75 T.) sehr einfach auf analytischem Wege mittels einer sie erzeugenden Funktion bestimmt, nachdem er sie früher auf zwei andern Wegen, deren einer in der Handschrift der A. R. mitgeteilt ist, umständlicher erhalten hatte, und hat so die Formel gefunden

$$p^m = \sum d.(d),$$

in welcher die Summe auf alle Teiler d von m sich erstreckt und aus deren Umkehrung (m) sich ergibt, eine Formel, welche, wenn m als Primzahl gedacht wird, einen neuen Beweis des Fermatschen Satzes herbeiführt.

Die Beantwortung der Frage nun nach den Teilern einer Funktion (mod. p), das Grundproblem der Lehre von den Kongruenzen, welche in Bezug auf einen Doppelmodul oder — in Kroneckerscher Ausdrucksweise — in Bezug auf ein Modulsystem zweiter Stufe gedacht werden, gründet sich bei Gauß auf eine Reihe von Hilfssätzen. Einerseits lehrt er für eine Gleichung $P(x) = 0$ die andere Gleichung $P_p(x) = 0$ bilden, welche zu Wurzeln die p^{ten} Potenzen von den Wurzeln der ersteren hat, und den (am 18. Aug. 1796, Nr. 26 T.) von ihm gefundenen Satz, daß $P_p(x) \equiv P(x) \pmod{p}$ sei, wenn p eine Primzahl. Andererseits zeigt er, daß es für jede von x verschiedene Funktion $P(x)$ einen kleinsten Exponenten ν gibt, für welchen $x^\nu - 1 \pmod{p}$ durch $P(x)$ teilbar ist; und ν ist ein Teiler von $p^m - 1$, falls $P(x)$ Primfunktion vom Grade m. Jede solche teilt also (mod. p) die Funktion $x^{p^m-1} - 1$; z. B. teilt jede von x verschiedene Primfunktion ersten Grades den Ausdruck $x^{p-1} - 1$, womit aufs Neue wieder der Fermatsche Satz bewiesen ist. Aus diesen Ergebnissen folgt auf der einen Seite, daß $x^{p^m-1} - 1 \pmod{p}$ dem Produkte aller inkongruenten von x verschiedenen Primfunktionen kongruent ist, deren Grade Teiler von m sind; auf der andern kann $x^\nu - 1$ nur solche primitive d. h. in keinem ähnlichen Ausdrucke geringeren Grades aufgehende Primteiler (mod. p) haben, deren Grad m den Exponenten bezeichnet, zu welchem p (mod. ν) gehört, derart, daß

$p^m \equiv 1 \pmod{\nu}$, (Nr. 30 T.). Auf solcher Grundlage kann nun für jede Funktion $x^\nu - 1$ nicht nur die Anzahl ihrer Primteiler eines bestimmten Grades ermittelt (art. 360, W. II, p. 230), sondern auch eine Methode gegeben werden, ihre (primitiven) Primteiler selbst zu finden. Dazu dient der am 30./31. August 1797 (Nr. 76, 77 T.) von Gauß erzielte Satz, daß jede ganze symmetrische Funktion der Größen $x, x^p, x^{p^2}, \ldots, x^{p^{m-1}}$ in Bezug auf den Doppelmodul p, $P(x)$, wenn $P(x)$ eine Primfunktion m^{ten} Grades bezeichnet, einer ganzen Zahl und die Koeffizienten von $P(x)$ den elementaren symmetrischen Funktionen jener Potenzen kongruent sind; andererseits die Verteilung der Potenzen $x^\alpha, x^\beta, \ldots,$ wo $\alpha, \beta, \ldots$ die zu ν teilerfremden Zahlen $< \nu$ bezeichnen, in Perioden, ähnlich den Perioden der Kreisteilungsgleichung, welche durch Kongruenzen bestimmt werden, die (mod. p) auflösbar sind, solange die Perioden noch aus solchen von der Gestalt

$$x^k + x^{kp} + x^{kp^2} + \cdots + x^{kp^{m-1}}$$

zusammengesetzt sind. Schon viel früher hatte Gauß den Zusammenhang dieser Untersuchungen mit dem Fundamentaltheoreme erkannt (13. Aug. 1796, Nr. 23 T.); in der Tat führte ihn am 2. September 1796 (Nr. 30 T.) die Anwendung seiner Methoden auf den Fall, wo ν eine ungerade Primzahl ist, zu zwei neuen Beweisen jenes Gesetzes, deren zweiter gewissermaßen den umgekehrten Gang nimmt wie der erste. Zweifelsohne vor den letztangegebenen Tag datiert eine Notiz in Gauß' Nachlaß (Ea 5), in welcher bezüglich der Gleichung, deren Wurzeln die e f-gliedrigen Perioden p^{ter} Einheitswurzeln sind, unter der Überschrift „der goldene Lehrsatz" er den Satz unterstreicht: „diese Gleichung ist möglich für jeden Primmodulus $= \sqrt[f]{1}$ (Mod. p)" d. h. welcher zum Exponenten f (mod. p) gehört, ein Satz, der als ein theorema generale demonstrandum schon in Leiste, Arith. und Alg. zu Seite 108 ausgesprochen ist. Die Quelle, aus der die genannten zwei Beweise des Reziprozitätsgesetzes fließen, ist nur ein Spezialfall dieses allgemeinen Satzes, und so erklärt es sich, daß Gauß in seinem Tagebuche (Nr. 16 T.) den Ausdruck theorema aureum auch für das Fundamentaltheorem verwendet.

Die A. R. schließt mit einigen Sätzen ab, mit denen Gauß begonnen hat, die Theorie der Zerlegung der Funktionen auf den Fall auszudehnen, wo der Modul eine Primzahlpotenz oder allgemeiner eine beliebig zusammengesetzte Zahl ist (Nr. 77, 78 T. Ende August 1797), und diese Fälle auf den einfacheren eines

Primzahlmoduls zurückzuführen (9. Sept. 1797, Nr. 79 T.), worin er die Hilfsmittel gefunden zu haben scheint, gewisse Schwierigkeiten, die jener einfachere Fall noch bot, zu beheben (s. art. 251, W. II, p. 209; art. 363 Ende, W. II, p. 232). —

Nach den D. A. veröffentlichte Gauß zunächst die drei Abhandlungen: Theorematis arithmetici demonstratio nova (Comm. Gotting. 16, 1808 (15. Januar)); summatio quarundam serierum singularium (Comm. Gotting. rec. 1, 1811 (24. Aug. 1808)); theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae (ebendas. 4, 1818 (10. Febr. 1817)). Sie enthalten vier neue Beweise des Fundamentaltheorems. Die zweite von ihnen ist, wie die Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio, deren Fortsetzung sie ursprünglich zu bilden bestimmt war (s. W. II, p. 265, Bemerkungen), unmittelbar aus der Kreisteilung hervorgegangen. Dort finden sich in art. 356 bereits die sogenannten Gaußschen Summen, denen man zusammenfassend die Gestalt

$$W_q = \sum_{i=0}^{n-1} r^{qi^2}$$

geben kann, wo $r = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ gedacht ist, und deren Wert für den Fall einer ungeraden Primzahl n bis auf das Vorzeichen einer Quadratwurzel genau dort angegeben ist. Auch ohne dies letztere zu bestimmen, erkannte Gauß hier schon Mitte Mai 1801 (Nr. 118 T.) einen neuen Weg zum Beweise des Reziprozitätsgesetzes. Aber die Bestimmung des Vorzeichens selbst gestaltete sich zu einer so reizvollen wie schwierigen Aufgabe, die zu bewältigen vier Jahre erforderlich waren. An mehreren Stellen (W. II, p. 16, 156; Nr. 123 T.), mit besonderer Lebhaftigkeit aber in einem Briefe an Olbers vom September 1805 hat Gauß die Mühen geschildert, die aus jener Aufgabe ihm erwuchsen, bis ihm endlich — wie der Blitz einschlägt und ohne daß er sagen könne, wodurch — der befreiende Gedanke kam (30. August 1805, Nr. 123 T.). Die Lösung beruht einerseits auf der Umformung der Summe W_q in ein Produkt, andererseits auf den Eigenschaften der beiden eigentümlich gebauten Reihen

$$f(x,m) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i . (m,i), \quad F(x,m) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{\frac{i}{2}} . (m,i),$$

wo

$$(m,i) = \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-i+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^i)},$$

und deren jede geeignet ist, jene Umformung zu leisten. Aus ihren Eigenschaften entspringt u. a. die für die additive Zahlentheorie bedeutsame Formel

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-x^{2i}}{1-x^{2i-1}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^{\frac{i(i-1)}{2}},$$

sowie für den Fall eines ungeraden n die Gleichung

$$W_q = (r^q - r^{-q})(r^{2q} - r^{-2q}) \ldots (r^{(n-2)q} - r^{-(n-2)q})$$

und hieraus

$$W_1 = +\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} . n},$$

während $W_1 = +(1+i)\sqrt{n}$ oder Null ist, wenn $n \equiv 0$ oder $n \equiv 2$ (mod. 4) resp. Ferner folgt, wenn n eine ungerade Primzahl ist, allgemein

$$W_q = \left(\frac{q}{n}\right) \cdot \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} . n}.$$

Ist aber $n = abc \ldots$ ein Produkt verschiedener ungerader Primzahlen, so besteht die Beziehung

$$W_1 = \prod_{a, b, c, \ldots} \left(1 + r^{\frac{n^2}{a^2}} + r^{4\frac{n^2}{a^2}} + \cdots + r^{(a-1)^2 \cdot \frac{n^2}{a^2}}\right),$$

aus welcher folgender Satz hervorgeht: die Anzahl der $a, b, c, \ldots$, von denen resp. $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \ldots$ Nichtreste sind, ist gerade oder ungerade, je nachdem die Anzahl ν der Zahlen $a, b, c, \ldots$ welche die Form $4\mu + 3$ haben, kongruent 0,1 resp. 2,3 (mod. 4) ist. Wird n als Produkt von nur zwei solchen Primzahlen gedacht, so folgt hieraus das Reziprozitätsgesetz. Ähnliche Betrachtungen ergeben auch seine beiden Ergänzungssätze. Im Anfang seiner Abhandlung bezeichnet Gauß die Summen W_q als eine reiche Quelle für Untersuchungen, deren Darstellung er für eine andere Stelle verheißt. Daß Gauß Beziehungen dieser Summen zu den Θ-Reihen gekannt habe, auf die er hier angespielt haben könnte, habe ich nicht bemerkt. Wahrscheinlich ist hier die mit art. 19 beginnende aber schnell abbrechende Fortsetzung der Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio (W. II, p. 263—65) gemeint, möglicherweise aber auch der zweite der beiden Beweise des Fundamentaltheorems, welche die dritte der oben genannten Abhandlungen enthält. Auch er entstammt der Kreisteilung, ist aber von Gauß in einer Form dargestellt, die ihn der Theorie der höheren Kongruenzen näher bringt. Bedeutet g eine primitive Wurzel für die

ungerade Primzahl p und ξ den Ausdruck

$$x - x^g + x^{g^2} - \cdots - x^{g^{p-2}},$$

so läßt sich zeigen, daß $\xi^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p$, also auch, wenn q eine andere ungerade Primzahl bedeutet,

$$\xi^{q-1} - (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \cdot p^{\frac{q-1}{2}}$$

durch $\dfrac{1-x^p}{1-x}$ teilbar ist, desgleichen

$$x^q - x^{qg} + x^{qg^2} - \cdots - x^{qg^{p-2}} - \left(\frac{q}{p}\right) \cdot \xi.$$

Durch Verbindung dieser Umstände mit der Kongruenz

$$x^q - x^{qg} + x^{qg^2} - \cdots - x^{qg^{p-2}} \equiv \xi^q \,(\text{mod. } q)$$

wird man einfach zum Reziprozitätsgesetze geführt.

Auf wesentlich anderer, ganz elementarer Grundlage beruhen die beiden andern Beweise desselben. Wie Gauß (W. II, p. 50, 161) aussagt, sind sie den Bemühungen zu danken, die er aufwandte, um den analogen Sätzen der Lehre von den kubischen und biquadratischen Resten beizukommen. Vermutlich führte ihn die hierbei sich darbietende Verteilung der Reste nach einem gegebenen Modul in Drittel resp. Viertel ihrer Gesamtanzahl zur Verteilung der absolut kleinsten Reste (mod. p) in die beiden Hälften, welche positiv und welche negativ sind, und die Verbindung mit dem Eulerschen Kriterium zu dem wichtigen Satze, der als Gaußsches Lemma benannt wird: Ist (q, p) die Anzahl der Zahlen

$$q,\ 2q,\ 3q,\ \cdots,\ \frac{p-1}{2}q,$$

deren absolut kleinste Reste (mod. p) negativ sind, so ist

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{(q,p)} \text{ (mod. } p).$$

Die Ermittlung der von Gauß mit dem Namen „Dezident" belegten Zahl (q, p) geschieht nun bei dem ersten der erwähnten Beweise (in der Abhandlung vom J. 1808) mit Hilfe der an dieser Stelle von Gauß eingeführten Funktion $[x]$, welche die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist, eine Funktion, die seitdem in den Arbeiten von Kronecker und jüngeren Mathematikern zu den mannigfaltigsten Untersuchungen Anlaß gegeben hat. Gauß' Betrachtung beruht im wesentlichen auf der Bestimmung des

„Dezidenten" durch die Beziehung

$$(q, p) = \sum_i \left[\frac{2iq}{p}\right] - 2\cdot\sum_i \left[\frac{iq}{p}\right],$$

wo $i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, sowie auf der durch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} [ix] + \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{k}{x}\right] = n.h,$$

in welcher $[nx] = h$ gesetzt ist, ausgedrückten Eigenschaft der gedachten Funktion. Mit ihrer Hilfe läßt sich nachweisen, daß jeder der Ausdrücke

$$L = (q, p) + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right], \quad M = (p, q) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{kp}{q}\right]$$

einer geraden Zahl gleich, und daß

$$L + M = (q, p) + (p, q) + \frac{(p-1)(q-1)}{4}$$

ist, woraus dann das Reziprozitätsgesetz sogleich sich ergibt.

Auf dasselbe Gaußsche Lemma begründet, findet der zweite jener Beweise (in der Abhandlung vom J. 1818) die Beziehung zwischen den beiden Dezidenten (p, q), (q, p), welche das Gesetz bedingt, durch eine Verteilung der Zahlen $\gamma = 1, 2, 3, \ldots, \frac{pq-1}{2}$ in acht Gruppen je nach den Vorzeichen von $\mathfrak{R}\left(\frac{\gamma}{p}\right)$, $\mathfrak{R}\left(\frac{\gamma}{q}\right)$, wo $\mathfrak{R}(x)$ das Kroneckersche Zeichen für den Unterschied zwischen x und der nächstgelegenen ganzen Zahl bedeutet, und durch die Beziehungen, welche zwischen den Anzahlen der in diesen einzelnen Gruppen vorhandenen Zahlen bestehen und aus denen sich erschließen läßt, daß von den drei Zahlen (p, q), (q, p), $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ entweder nur eine oder alle drei gerade sind.

An diese Beweise schließt sich endlich ein einfacher Algorithmus, durch welchen der quadratische Charakter einer Zahl bezüglich einer andern bestimmt werden kann. Er beruht auf dem Euklidischen Algorithmus einerseits und auf der Gleichung

$$\varphi(a, b) + \varphi(b, a) = a'.b'$$

andererseits, in welcher $a' = \left[\frac{a}{2}\right]$, $b' = \left[\frac{b}{2}\right]$ und

$$\varphi(a, b) = \sum_{i=1}^{a'} \left[\frac{ib}{a}\right]$$

ist. —

Werfen wir hier noch einen Blick auf die Chronologie der acht Gaußschen Beweise für das Fundamentaltheorem. Zählen wir sie, wie Gauß in seinen Publikationen, nach der Zeit ihrer Veröffentlichung, so ist

Beweis	I	(D. A. art. 135 sqq.)	vom Jahre	1801
„	II	(ebendas. art. 262)	„ „	1801
„	III	(Comm. Gotting. 16)	„ „	1808
„	IV	(Comm. Gott. rec. 1)	„ „	1811
„ „	V VI	(Comm. Gott. rec. 4)	„ „	1818
„	VII u. VIII	(W. II)	„ „	1863.

Von diesen Beweisen ist B. I der zeitlich erste und am 8. April 1796 (Nr. 2 T.) von Gauß gefunden; B. II ist der zweite, am 27. Juni 1796 (Nr. 16 T.) gefunden, B. VII und VIII, die im Grunde nur einen vollen Beweis bilden, sind spätestens am 2. September 1796 (Nr. 30 T.) von Gauß erhalten und als dritter und vierter (W. II, p. 234) ausdrücklich bezeichnet. Der Beweis IV ist schon Mitte Mai 1801 (Nr. 118 T.) von Gauß gefunden und als fünfter gezählt worden. Die übrigen Beweise entstammen, wie bemerkt, nach seiner eigenen Aussage seinen Bemühungen um die kubischen und biquadratischen Reste, die erst 1805 einsetzten; sicherlich ist die in Nr. 134 T. auf den 6. Mai 1807 datierte demonstratio principiis omnino elementaribus innixa der Beweis III. Ein Anfang desselben, insbesondere die oben angegebene Formel für den Dezidenten (q, p) findet sich schon im Handbuche vom Oktober 1805 des Gaußschen Nachlasses S. 164 vor der Notiz über den Beweis der Irreduktibilität der allgemeinen Kreisteilungsgleichung, also vor dem 12. Juni 1808. In einem andern nachgelassenen, im September 1813 begonnenen Handbuche steht S. 6/8 ein Aufsatz mit dem Titel „Dritter Beweis des Fundamentaltheorems bei den quadratischen Resten in einer neuen Einkleidung" und mit dem Datum Novb. 12 [jedenfalls 1813], der mit den Worten endigt: „Bei dieser Einkleidung des Beweises ist der wahre Nerf desselben mehr in die Augen fallend als bei derjenigen, in welcher er in den Göttingischen Commentationen Bd. XVI erscheint". Da dieser Aufsatz im Prinzip mit dem B. V identisch und nur in der Entwicklung desselben von ihm abweichend, nur eine Modifikation desselben ist, so ist ersichtlich auch B. V erst durch eine vereinfachende Neubearbeitung aus B. III hervorgegangen, also später als dieser. Da aber (W. II, p. 50) B. V und VI als die vor neun Jahren versprochenen, nämlich (W. II, p. 43) als die bei Veröffentlichung von B. IV (24. August 1808) schon vorhandenen

Beweise bezeichnet werden, so muß B. V zwischen dem 6. Mai 1807 und dem 24. August 1808 entstanden sein. Im Tagebuch geschieht seiner keine Erwähnung, ebensowenig des Beweises VI, dessen Datierung am unsichersten bleibt. Beim Beweise III (W. II, p. 4) und in der Anzeige desselben (W. II, p. 153) erwähnt Gauß drei Beweise, die er nach dem Beweise I gefunden und welche „sehr tiefliegende und ihrem Inhalte nach ganz heterogene Untersuchungen voraussetzen"; einer davon sei der Beweis II. Von den beiden übrigen ist unter dem einen zweifelsohne der B. IV gemeint; der andere kann B. V nicht sein, der, wie gesagt, später als B. III ist, und auf welchen die erwähnte Charakterisierung nicht paßt. Es bleibt also nur die Wahl zwischen dem Doppelbeweise der A. R. (der demonstratio tertia und quarta, welche eigentlich erst zusammen eine einzige „demonstratio completa" ausmachen) und dem — ihm übrigens nahestehenden — Beweise VI, und man möchte sich Kronecker entgegen für den erstern entscheiden, da es wunderbar scheinen muß, daß Gauß diesen mit Stillschweigen übergangen haben sollte. Jenachdem man nun sein Citat auf den Beweis VI bezieht oder nicht, würde dieser Beweis vor B. III d. i. vor den 6. Mai 1807 oder, wie B. V, zwischen dies Datum und den 24. August 1808 zu datieren sein; ob dann vor den B. V oder nach denselben, muß dahingestellt bleiben. Der deutschen Darstellung von B. V geht in dem Handbuche vom September 1813 auf S. 4/5 auch eine (im wesentlichen der lateinischen identische) deutsche Darstellung von B. VI vorauf, die als fünfter Beweis gezählt wird, umgekehrt wie in den Commentationen, wo er dem B. V folgt und als Demonstratio sexta bezeichnet wird. Da die lateinischen Fassungen dieser Beweise in Comm. Gott. rec. 4 von Gauß erst 1817 der Öffentlichkeit übergeben sind, möchte man annehmen, daß die deutschen Darstellungen die ursprüngliche Fassung der schon 1808 vorhandenen Beweise wiedergeben. Der Algorithmus zur Bestimmung des quadratischen Charakters einer Zahl B mit Bezug auf eine andere A, mit welchem die dritte Abhandlung schließt, kann hinwieder nicht wohl vor dem August 1808 gefunden sein, da er in dem Handbuche vom Oktober 1805 erst S. 213 d. i. nach astronomischen Beobachtungen von jenem Datum aufgeführt wird. —

Wie gesagt, sind die letzten Beweise des Reziprozitätsgesetzes zumeist durch die Untersuchungen hervorgerufen, welche Gauß über kubische und biquadratische Reste unternahm, Untersuchungen, zu denen überzugehen für ihn nahe lag, nachdem er die Theorie der quadratischen Reste erledigt. Er sagt darüber in einem Briefe

an Dirichlet vom 30. Mai 1828 (W. II, p. 516), was folgt: Die ganze Untersuchung, deren Stoff ich schon seit 23 Jahren vollständig besitze, die Beweise der Haupttheoreme aber (zu welchen das in der ersten Commentation noch nicht zu rechnen ist) seit etwa 14 Jahren usw. — Fällt hiernach der Beginn seiner bezüglichen Forschungen spätestens in das Jahr 1805, so wird dies Jahr von Gauß auch früher schon, wo seine Erinnerung sicher zuverlässig war, zu wiederholten Malen (s. W. II, p. 50 und 161, Comm. prima, W. II, p. 67 und p. 165 in der Anzeige derselben, Comm. sec., W. II, p. 102) bestimmt als deren Anfang angegeben. Dem braucht die Tagebuchnotiz Nr. 130 vom 15. Februar 1807: theoria residuorum cubicorum et biquadraticorum incepta nicht zu widersprechen, da man in ihr den Anfang einer regelrechteren Entwicklung oder Darstellung seiner Ergebnisse erblicken darf. Diese finden sich dann schließlich in zwei Abhandlungen, der Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. I u. II (Comm. Gotting. rec. 6, 1828 (5. April), bezw. 7, 1832 (15. April 1831)), welche Gauß als näher verwandt mit derjenigen der quadratischen Reste einer Darstellung der kubischen vorzog, wenn auch leider nur zu einem Teile veröffentlicht. Sie müssen zunächst in raschem Fortschritte gelungen sein, wie die Notizen Nr. 131—133 T. vom 17., 22., 24. Februar bezeugen, die ohne Zweifel die Auffindung der wesentlichsten Sätze der Comm. prima bedeuten. Dies sind in der Hauptsache die folgenden.

Beschränkt man sich auf den Fall der Primzahlen $p = 4n+1$, welcher einzig Schwierigkeiten verursacht, so zerfallen die (mod. p) inkongruenten Zahlen z, welche bisher nur in zwei Klassen, quadratische Reste und Nichtreste, sich unterschieden, jenachdem $z^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$ oder -1 (mod. p) war, in der Theorie der biquadratischen Reste in vier Klassen A, B, C, D von je $\frac{p-1}{4}$ Zahlen, die bezüglich den Kongruenzen

$$z^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1, f, f^2, f^3 \pmod{p}$$

genügen, in denen $f^2 \equiv -1$ (mod. p); die Klassen A, C zusammen sind die quadratischen Reste, B, D zusammen die quadratischen Nichtreste. Die Comm. prima lehrt nun, in welche dieser Klassen die Zahlen -1 und 2 gehören. Die erstere gehört zu A oder C, jenachdem $p \equiv 1$ oder 5 (mod. 8). Die Zwei ist quadratischer

Nichtrest bezüglich der Moduln $p \equiv 5 \pmod{8}$. Ist aber $p \equiv 1 \pmod{8}$, so ließ die Induktion Gauß einen Zusammenhang der Frage mit der Zerlegung $p = \alpha^2 + 2\beta^2$ erkennen, wonach 2 zu A oder C gehört, jenachdem $\alpha \equiv \pm 1$ oder $\pm 3 \pmod{8}$ ist, ein Satz, der unschwer zu begründen war. Hierdurch fand sich nun Gauß zu der Untersuchung geführt, ob ein ähnlicher Zusammenhang auch mit der für jede Primzahl $p = 4n+1$ möglichen Zerlegung $p = a^2 + b^2$ stattfinde. Das ist in der Tat der Fall, aber er liegt tiefer. Die gedachte Zerlegung ist zunächst eng mit den Zahlen $m_k^{(h)}$ verbunden, welche bei der Bildung der biquadratischen Gleichung für die vier $\frac{p-1}{4}$-gliedrigen Perioden p^{ter} Einheitswurzeln auftreten und die Anzahl der Lösungen t, u der Kongruenz

$$1 + g^{4t+h} \equiv g^{4u+k} \pmod{p},$$

wo g eine primitive Wurzel (mod. p), bezeichnen. Die Beziehungen zwischen ihnen, sowie die Werte von a, b bei der durch sie gelieferten Zerlegung $p = a^2 + b^2$ ergeben den Satz, daß 2 zu A, B, C, D resp. gehört, jenachdem $\frac{b}{2} \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$. Übrigens hängt das Vorzeichen von b und somit die Zugehörigkeit von 2 zu einer der Klassen B, D von der Wahl der Zahl f unter den beiden Wurzeln der Kongruenz $f^2 \equiv -1$ d. i. von der Wahl der primitiven Wurzel g ab, und es besteht zwischen a, b und f die Kongruenz $b \equiv af \pmod{p}$, eine Tatsache, die Gauß (Nr. 133 T.) am 24. Februar 1807 gefunden zu haben scheint, und welche verstattet, den biquadratischen Charakter der 2 auch durch die Kongruenz

$$b'^{\frac{a'b'}{2}} \equiv a'^{\frac{a'b'}{2}} . 2^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p},$$

wo a', b' in der Formel $p = a'^2 + b'^2$ positiv gedacht sind, auszusprechen (W. II, p. 96). — Nebenbei finden sich a, b mittels der Entwicklung von $(x^4+1)^{\frac{p-1}{4}}$ (mod. p) als die absolut kleinsten Reste (mod. p), welche den Kongruenzen

$$2a \equiv \frac{r}{s},\ 2b \equiv \pm r^2 \pmod{p}$$

mit

$$s = 1.2.3 \cdots \frac{p-1}{4},\quad r = \frac{p+3}{4} \cdot \frac{p+7}{4} \cdots \frac{p-1}{2}$$

genügen; ihnen zufolge ist $a \equiv 1 \pmod{4}$ und hierdurch seinem Vorzeichen nach bestimmt, während über dasjenige von b sich ohne weiteres nicht entscheiden läßt (s. unten p. 53). Ähnliche Sätze hat Gauß noch mehrere gegeben in einer Notiz des Nachlasses (Ec 2), wo es heißt:

Ist eine Primzahl $p = 3n + 1 = x^2 + 3y^2$, so ist

$$2x \equiv \frac{\frac{3n}{2} \cdot \left(\frac{3n}{2} - 1\right) \cdots (n+1)}{1.2 \cdots \frac{n}{2}},$$

in derselben Voraussetzung ist $4p = l^2 + 27u^2$ und

$$l \equiv -\frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{1.2\dots n}.$$

Ist eine Primzahl $p = 8n + 1 = a^2 + 2b^2$, so ist

$$2a \equiv \frac{4n(4n-1)\dots(3n+1)}{1.2\dots n},$$

ist $p = 8n + 3 = a^2 + 2b^2$, so ist

$$2a \equiv \frac{(4n+1)4n\dots(3n+2)}{1.2\dots n}.$$

Bei den Versuchen nun, auch für andere Zahlen den biquadratischen Charakter zu ermitteln, sah sich Gauß durch Induktion zwar zu mancherlei Einzelresultaten geführt, im Beweise derselben wie in der Erkenntnis allgemeinerer Sätze aber durch Schwierigkeiten gehemmt, die ihm in keiner Weise mit den Mitteln der rationalen Zahlentheorie zu überwinden gelang. Da kam ihm eine erlösende Eingebung, die zugleich die Grundlage des wichtigsten Gebietes der ganzen neueren Zahlentheorie, der Arithmetik der Zahlenkörper, geworden ist: mox vero comperimus, principia Arithmeticae hactenus usitata ad theoriam generalem neutiquam sufficere, quin potius hanc necessario postulare, ut campus Arithmeticae sublimioris infinities quasi promoveatur (W. II, p. 67). Er erfand die Theorie der komplexen ganzen Zahlen. Über die Berechtigung komplexer Größen hatte er schon zur Zeit der D. A. sich eigene Gedanken gebildet, die er in art. 91 derselben gelegentlich zu entwickeln in Aussicht stellt — ein in der Anzeige der Comm. secunda (W. II, p. 174/8) eingelöstes Versprechen — und die Kreisteilungslehre, mehr noch seine Untersuchungen über die Lemniskatenfunktionen hatten sie immer zwingender ihm auf-

gedrängt; vielleicht, daß in der Notiz Nr. 95 T. unter dem novus in analysi campus die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln verstanden werden muß. So lag es ihm nahe, auch komplexe ganze Zahlen in Betrachtung zu ziehen. Man geht aber wohl nicht fehl, wenn man für den Gedanken, sie zur Grundlage der kubischen und biquadratischen Reste zu machen, die Quelle in der Beziehung erblickt, welche zwischen dem biquadratischen Charakter der Zwei und der Darstellung $p = a^2 + b^2$, ebenso zwischen ihrem kubischen Charakter und der Darstellung $4p = a^2 + 27b^2$ (Nr. 133 T.) d. h. den Darstellungen von p als Norm komplexer ganzer Zahlen von Gauß erkannt worden war. Die Verwendung dieser komplexen Faktoren von p tritt grundlegend auch in den handschriftlichen Fragmenten über kubische und biquadratische Reste zu Tage, welche W. VIII, p. 5—14 abgedruckt und von Fricke erläutert sind und etwa aus derselben Zeit stammen, wie die Notizen Nr. 130/3 T. In diese Zeit fallen dann auch Gauß' Versuche, zu neuen Beweisen des quadratischen Fundamentaltheorems zu gelangen, in der Hoffnung, daß diese auch auf das höhere Gebiet ausdehnbar sein möchten, eine Hoffnung, die ihn nicht trog, denn sie führten ihn zum Gaußschen Lemma, dessen Erweiterung auf das Gebiet der komplexen Zahlen $a + bi$ die Grundlage seiner bezüglichen Beweisführungen bildet. Neben induktiven Studien beschäftigten nun Gauß mannigfache Versuche, den sogenannten Dezidenten einer Zahl für einen gegebenen Modul zu berechnen bezw. das gesamte Restsystem eines solchen in geeignete Viertel zu verteilen und dgl. mehr, wie die von Schering erläuterten und nach 1811 datierten Fragmente (W. II, p. 313—85) und andere, ihnen zeitlich wohl voraufgehende handschriftliche Notizen des Nachlasses (in Ec 3 und Handbuch vom Oktober 1805, S. 248—256) beweisen.

Es muß Wunder nehmen, daß Gauß nirgends in seinem Tagebuche der Einführung der komplexen Zahlen, dieses von ihm selbst für so wichtig erkannten Fortschrittes der Arithmetik, eine Erwähnung tut. Man könnte geneigt sein, Nr. 144, 145 T. vom 23. Oktober 1813 dahin zu deuten; doch könnte damit unmöglich der erste Gebrauch komplexer Zahlen gemeint sein, der, wie bemerkt, viel früher datiert (s. unten p. 46), vielmehr nur etwa ihre systematische Grundlegung für die allgemeine Theorie der biquadratischen Reste, wie die Comm. secunda sie enthält. Wahrscheinlicher aber dünkt uns, daß jetzt Gauß aus jener die Hilfsmittel gewonnen, um die (von dem Satze über den biquadratischen Charakter der Zwei verschiedenen) Haupttheoreme zu beweisen, von denen er im obigen

Briefe an Dirichlet schreibt, daß er ihre Beweise gerade etwa in dieser Zeit gefunden habe. Nach seiner Anzeige der Comm. secunda vom 23. April 1831 waren ihm freilich diese Beweise schon seit 20 Jahren bekannt, doch ist diese Angabe wohl nur als eine abgerundete zu betrachten. Vielleicht ist Nr. 144/5 T. aber auch so zu verstehen, daß Gauß in der Kreisteilung, wenn nicht gar, wie Eisenstein — was zu denken die anschließende letzte Tagebuchnotiz nr. 146, die einzige, in welcher von den komplexen Zahlen $a+bi$ die Rede ist, einigen Anhalt bieten könnte — in der Lemniskatenteilung die Hilfsmittel zu jenen Beweisen gefunden.

Gauß hat ihre Darlegung einer dritten Abhandlung vorbehalten, die niemals geschrieben ist. Die zweite gibt nur den Wortlaut des allgemeinen quadratischen (W. II, p. 130), sowie auch des allgemeinen biquadratischen Reziprozitätsgesetzes (W. II, p. 138), das zwischen zwei (primären) komplexen Primzahlen besteht, und beweist den sogenannten Ergänzungssatz, durch welchen der biquadratische Charakter der Zahl $1+i$ und ihrer sogenannten Assoziierten bestimmt wird. Vorauf geht eine, der rationalen völlig parallellaufende, nur entsprechend reichere Arithmetik der komplexen Zahlen $a+bi$, gegründet auf das Euklidische Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von zwei solchen Zahlen, woraus die eindeutige Zerlegbarkeit jeder komplexen Zahl in sogenannte primäre Primfaktoren, deren es außer der Zahl $1+i$ zwei Arten gibt: die reellen Primzahlen $q \equiv 3 \pmod{4}$ und die konjugiert komplexen Faktoren der reellen Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$, hervorgeht. Aus dem verallgemeinerten Fermatschen Lehrsatze, nach welchem, wenn π eine komplexe Primzahl und n ihre Norm bedeutet, jede durch π nicht teilbare komplexe Zahl $\varkappa$ der Kongruenz $\varkappa^{n-1} \equiv 1 \pmod{\pi}$ genügt, entspringt eine Verteilung aller Reste von π in vier Klassen von gleichviel Zahlen, jenachdem $\varkappa^{\frac{n-1}{4}} \equiv 1, i, -1, -i \pmod{\pi}$ ist, und die Frage, welcher dieser Klassen eine gegebene Zahl zugehört, ist die Frage nach ihrem biquadratischen Charakter. Verteilt man aber alle Reste in vier Gruppen C, C', C'', C''' derart, daß aus den Zahlen r der Gruppe C die der übrigen durch Multiplikation mit $i, -1, -i$ resp. entstehen, ist ferner $\varkappa$ eine durch π nicht teilbare komplexe Zahl und gehört von den Resten aller Produkte $\varkappa r$ eine Anzahl c, c', c'', c''' resp. jenen unterschiedenen Gruppen an, so besteht die Kongruenz

$$\varkappa^{\frac{p-1}{4}} \equiv i^{c'+2c''+3c'''} \pmod{\pi},$$

die ersichtlich das Analogon des Gaußschen Lemma ist. Im Verein mit den Eigenschaften des schon in Comm. Gotting. rec. 4 auftretenden Ausdrucks $\varphi(a, b)$ genügt sie zur Herleitung des biquadratischen Charakters von $1+i$.

Gauß hat, wie bemerkt, einen Beweis des biquadratischen Fundamentaltheorems nicht veröffentlicht. Um so interessanter ist, daß in seinem Nachlasse (in Ec 3) auf vier Oktavseiten geschrieben die flüchtige Skizze eines vollständigen Beweises gefunden worden ist, welcher, auf die Kreisteilung gegründet, dem Beweise VI des quadratischen Reziprozitätsgesetzes entspricht. Sie scheint einer späteren Zeit zu entstammen, vielleicht hervorgerufen durch Eisensteins bezügliche Arbeiten, dessen Symbol $\left[\frac{\varkappa}{m}\right]$ hier auch von Gauß zur Bezeichnung des biquadratischen Charakters von $\varkappa$ bezüglich m für den Fall einer komplexen Primzahl m verwandt wird, während er für den allgemeineren Fall einer zusammengesetzten Zahl m das Symbol $\left(\frac{\varkappa}{m}\right)$ benutzt. Das Gesetz wird hier in etwas anderer Fassung wie in der Comm. secunda dahin ausgesprochen, daß, wenn $m = a+bi$, $M = A+Bi$ zwei ungerade komplexe Zahlen ohne gemeinsamen Teiler und a, A ungerade sind,

$$\left(\frac{m}{M}\right) = i^{\frac{1}{2}bB}\cdot\left(\frac{M}{m}\right)$$

sei. An einer andern Stelle des Nachlasses (in Ec 2) sind noch verschiedene abweichende Formulierungen des Gesetzes vorhanden, deren eine hier mitgeteilt sei. Bezeichnen $m = a+bi$, $m' = a'+b'i$ zwei verschiedene ungerade komplexe Primzahlen, wobei a, a' ungerade, und setzt man

$$m'^{\frac{1}{4}(a^2+b^2-1)} \equiv i^{\mu} \text{ (mod. } m), \quad m^{\frac{1}{4}(a'^2+b'^2-1)} \equiv i^{\mu'} \text{ (mod. } m'),$$

so ist

$$\mu - \mu' - \tfrac{1}{2}((a'-1)b + (a-1)b' + bb') \equiv 0 \text{ (mod. 4)}.$$

Eine wesentlich gleiche Formulierung steht auch in Gauß' im September 1813 begonnenen Handbuche S. 24 d. h. an einer späteren Stelle als die dort ebenfalls niedergeschriebenen Beweise V und VI des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, vermutlich also auch jüngeren Datums als 12. Novb. 1813, was mit Gauß' Angaben in dem erwähnten Briefe an Dirichlet sich wohl verträgt. —

Von dem, was Gauß in der Theorie der kubischen Reste, die er von Anfang an zugleich mit derjenigen der biquadratischen

durchdachte, erarbeitet hat, geben uns nur die zuvor erwähnten Fragmente (W. VIII, p. 5—14) einige Kunde. Von ihnen finden sich die auf p. 5—8 abgedruckten in einem mit der Überschrift Uraniae sacrum versehenen, im November 1802 begonnenen Hefte (Al) des Nachlasses unmittelbar auf astronomische und magnetische Rechnungen folgend, die bis 1805 ausgedehnte Beobachtungen benutzen, werden also vermutlich nicht sehr viel später verzeichnet sein. Teils hat Gauß in ihnen den kubischen Charakter einer Zahl (mod. p) in Zusammenhang gebracht mit der Darstellbarkeit von p durch gewisse binäre quadratische Formen, teils ihn mit Hilfe der Kreisteilung festzustellen gelehrt. So wird neben einem ähnlichen Satze über biquadratische Reste folgende Aussage von ihm gegeben (W. VIII, p. 7): Seien $p \equiv 1$, $q \equiv \pm 1$ (mod. 3) zwei verschiedene Primzahlen und es werde entsprechend den doppelten Vorzeichen

$$(a + 3b\sqrt{-3})^{\frac{q \mp 1}{3}} \equiv A \pm B\sqrt{-3} \pmod{q}$$

gesetzt; je nach den drei möglichen Fällen

$$B \equiv 0,\ B \equiv A,\ B \equiv -A \pmod{q}$$

ist dann

$$q^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1,\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3b},\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3b} \pmod{p}.$$

In dieser Aussage liegt unmittelbar, wenn man sich p in seine komplexen Faktoren zerlegt denkt, das kubische Fundamentaltheorem für den Fall $q \equiv -1$ (mod. 3). Gauß' (in Ec 1 befindlicher) Beweis derselben aber (W. VIII, p. 9), der später sein wird, als die vorerwähnten Untersuchungen, entspringt aus dem gleichen Ideenkreise, wie sein Beweis VI des quadratischen und der erwähnte Beweis des biquadratischen Gesetzes, nämlich aus den Eigenschaften des Ausdrucks

$$r + \varrho r^{g} + \varrho^2 r^{g^2} + \cdots + \varrho^{p-2} . r^{g^{p-2}}$$

wo g eine primitive Wurzel (mod. p) und ϱ eine kubische Einheitswurzel bedeutet. Da nach den Frickeschen Erläuterungen (W. VIII, p. 11—14) aus jener Aussage auch für den Fall $q \equiv +1$ (mod. 3) das kubische Reziprozitätsgesetz, wie es später von Jacobi und Eisenstein bewiesen wurde, sich erschließen läßt, ist mittelbar durch die Gaußsche Methode dies Gesetz schon vordem in seiner ganzen Allgemeinheit festgestellt worden. Ein weiteres

Fragment (W. VIII, p. 15—20) zeigt Gauß bemüht, die Methode seiner Beweise III und V durch geeignete Verteilung des gesamten Restsystems eines Moduls in Drittel, wobei die Gittervorstellung benutzt wird, auf kubische Reste auszudehnen. Daß ein auf die Zahl Drei und einen Modul $p = 3n + 1$ bezüglicher Beweis in ähnlicher Weise ihm geglückt sein muß, zeigt die vom 6. Januar 1809 datierte Notiz Nr. 138 T., aus der wohl zu schließen ist, daß das letztgenannte Fragment vor diesem Datum verfaßt worden ist. Andererseits kann es nicht vor dem August 1808 geschrieben sein, da es in Gauß' Handbuch vom Oktober 1805 erst S. 205—213 auf astronomische Beobachtungen aus diesem Monate folgt.

Aus etwa derselben Zeit (s. W. II, p. 398) stammen andere handschriftliche Aufzeichnungen, welche die Theorie der aus einer dritten Einheitswurzel ϱ gebildeten komplexen ganzen Zahlen allgemeiner zum Gegenstande haben (W. II, p. 387—398). Ist $a + b\varrho + c\varrho^2$ eine komplexe Zahl mit rationalen a, b, c so läßt sich eine nächstgelegene ganze komplexe Zahl so bestimmen, daß der „Determinant" (d. i. die Norm) der Differenz kleiner als 1 wird. Infolge hiervon ist der Euklidische Algorithmus anwendbar und folglich herrscht auch im Gebiete dieser komplexen ganzen Zahlen eindeutige Zerlegbarkeit. Hiermit hatte Gauß die Grundlage gewonnen, um das „letzte Fermatsche Theorem" für den dritten Grad, nämlich die Unlösbarkeit der kubischen Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ nicht nur in rationalen, sondern allgemeiner in komplexen ganzen Zahlen der gedachten Art zu beweisen. Dieselben Identitäten benutzend, deren auch Legendre und die späteren Forscher sich bedient haben, zeigt Gauß zunächst, daß eine der drei Zahlen x, y, z durch $1 - \varrho$ aufgehen muß, und leitet dann (auf zwiefachem Wege) aus einer vorausgesetzten Lösung in relativ primen Zahlen eine zweite (und dritte) von gleicher Beschaffenheit her. Bei der auf dem zweiten Wege erhaltenen neuen Lösung ist die durch $1 - \varrho$ teilbare Zahl nicht mehr ebenso oft durch $1 - \varrho$ teilbar wie früher, daher der Beweis. — Hier tritt auch schon der später von Kummer begründete Satz auf, daß eine komplexe ganze Zahl $f(\varrho)$, deren analytischer Modul gleich 1 ist, $\pm \varrho^n$ sein muß.

Was endlich die Fragmente W. VIII, p. 21—26 anbelangt, so finden sich die beiden ersten von ihnen in Gauß' Handbuch vom Oktober 1805, S. 201 bis 204, also nach den schon beim Fragmente W. VIII, p. 15—20 erwähnten Beobachtungen vom August 1808, aber vor diesem Fragmente selbst und sind demnach zwischen denselben Daten verfaßt wie dieses. Die im zweiten derselben be-

handelte kubische Form

$$x^3+ny^3+n^2z^3-3nxyz$$

tritt schon auf S. 151 jenes Handbuchs auf d. i. vor dem Beweise für die Irreduktibilität der allgemeinen Kreisteilungsgleichung, den man auf den 12. Juni 1808 datieren darf, und findet sich auch an andern Stellen des Nachlasses, z. B. wie das dritte der Fragmente (W. VIII, p. 23) auch in Ec 1, und zwar auf einer leider undatierten Rechnung für die Sternwarte in Göttingen. Alle diese Notizen stammen wohl ziemlich aus der gleichen Zeit. Die gedachten Fragmente lassen nun ersehen, daß Gauß auch die aus einer beliebigen Kubikwurzel $r = \sqrt[3]{n}$ für ganzes n gebildeten komplexen ganzen Zahlen in den Bereich seiner Untersuchungen gezogen hat. Ist $a+b\nu+c\nu^2$ eine solche, so ist ihre Norm

$$N = a^3+nb^3+n^2c^3-3nabc$$

und n ist kubischer Rest in Bezug auf jeden Teiler von N. Durch die Substitution

$$x = ax'+ncy'+nbz'$$
$$y = bx'+ay'+ncz'$$
$$z = cx'+by'+az'$$

geht die Form $x^3+ny^3+n^2z^3-3nxyz$ über in

$$N.(x'^3+ny'^3+n^2z'^3-3nx'y'z'),$$

ein Satz, welcher die Reproduktion dieser Form durch Zusammensetzung mit sich selbst ausspricht und eine Grundlage bildet für die Auflösung der Gleichung

$$x^3+ny^3+n^2z^3-3nxyz = 1,$$

mit der sich Gauß (Nr. 137 T.) vom 23. Dezember 1808 an ebenfalls beschäftigt hat. —

Um vollständig zu sein, muß noch erwähnt werden, daß Gauß auch der Frage nach der arithmetischen Beschaffenheit der Zahl π nahe getreten ist und (W. VIII, p. 27/9) einen eigenen Beweis für die Irrationalität der Tangenten rationaler Bögen gegeben hat nebst kritischen Bemerkungen über die voraufgegangenen bezüglichen Arbeiten von Lambert und von Legendre. Desgleichen die umfangreichen Rechnungen und Tabellen (W. II, p. 477—495) zur Zyklotechnie, die Gauß ausgeführt hat und welche den Zweck verfolgen, die Bögen, deren Kotangenten gegebene rationale Zahlen

sind, genau zu berechnen. Auf Grund der Formel

$$\operatorname{arc\,cotg}\frac{y}{a} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{y+x}{a} + \operatorname{arc\,cotg}\frac{y+z}{a}$$

für

$$y^2 + a^2 = xz$$

lassen sich diejenigen für kleine Kotangenten aus denen für große bestimmen, für welche die bekannten Reihen stärker konvergieren. So hat Gauß u. a. für $\frac{\pi}{4}$ die beiden Ausdrücke

$$\frac{\pi}{4} = 12.(18) + 8.(57) - 5.(239)$$
$$= 12.(38) + 20.(57) + 7.(239) + 24.(268)$$

gegeben, in denen $(18) = \operatorname{arc\,cotg} 18$ usw. ist und die wesentlich schneller zum Ziele führen als frühere, von Machin, Euler, Vega u. a. gegebene ähnliche Formeln. —

Veröffentlicht hat Gauß weitere zahlentheoretische Arbeiten nicht, obwohl er zweifelsohne noch Manches gewußt hat, dessen Kundgebung uns wert gewesen sein würde. Wir haben nun aber, auf die Zeit der D. A. zurückgehend, in Anknüpfung an die artt. 301 und 302 derselben noch von einem andern Gebiete zu handeln, dessen Aufschließung wir gewohnt sind, Dirichlet zuzusprechen, wenn wir von seinen „analytischen Methoden der Zahlentheorie" reden. Den selbständigen Leistungen dieses Forschers geschieht kein Abbruch, wenn man auch nach den handschriftlichen Gaußschen Zeugnissen anerkennen muß, daß vor ihm schon Gauß auch in diesem Gebiete Pfadfinder gewesen ist. Es handelt sich zunächst um asymptotische Gesetze der Zahlentheorie[1]). Hier hatte Gauß, wie erwähnt, frühzeitig mit der Abzählung der Primzahlen begonnen, nach 1811 von Zeit zu Zeit sie fortgesetzt und später durch Goldschmidt bis zum Umfange der Tafel W. II, p. 435 weitergeführt und bald schon den Integrallogarithmus als geeigneten asymptotischen Ausdruck für die Menge der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze erkannt. In der Tat finden sich in Gauß' Exemplare der logarithmischen Tafeln von Schulze Aufzeichnungen vom Mai 1796 (31. Mai, Nr. 9 T.), nach denen die Menge der Primzahlen unterhalb a asymptotisch durch $\frac{a}{\log a}$, die Menge der Zahlen, welch aus zwei Primfaktoren zusammengesetzt sind, durch $\log\log a \cdot \frac{a}{\log a}$ und „wahrscheinlich" die Menge

1) Zum Folgenden vgl. den 9. Gauß-Bericht, Nachr. d. K. Ges. d. W. Gött., geschäftl. Mitth., 1911, Heft 1, p. 26—32; Math. Ann. 71.

derjenigen, welche aus drei Primfaktoren bestehen, durch $\frac{1}{2}(\log\log a)^2 \cdot \frac{a}{\log a}$ usw. in infinitum ausgedrückt werde, ein Gesetz, das in neuerer Zeit durch E. Landau bewiesen worden ist. Ferner gibt an derselben Stelle Gauß für die Menge der Zahlen unterhalb a ohne gleiche Faktoren den asymptotischen Ausdruck $\frac{a}{\sum_n \frac{1}{n^2}}$, allgemeiner für die Menge derjenigen, welche höchstens $\varkappa = 2, 3, \ldots$ gleiche Faktoren haben, den Ausdruck $\frac{a}{\sum_n \frac{1}{n^{\varkappa+1}}}$. Desgleichen für die Summe der reziproken Primzahlen unterhalb x die Gleichung

$$\sum \frac{1}{p} = \log\log x + V,$$

wo V wahrscheinlich eine der Zahl 1,266 nahe Konstante sei; für das entsprechende Produkt $\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ den Ausdruck $a.\log x$, wo a eine der Zahl 1, 874 nahe Konstante. Noch findet sich der Ausspruch: numerus factorum usque ad n

$$(\log\log n + 1).n.$$

In Gauß' Exemplare der Lambertschen Tabellen wird für die Anzahl aller nur aus den Faktoren 2, 3, 5, 7 bestehenden Zahlen unterhalb n der (nicht korrekte) asymptotische Ausdruck gegeben:

$$\frac{\frac{1}{8}(\log n)^4}{\log 2 \,.\, \log 3 \,.\, \log 4 \,.\, \log 5}.$$

Desgleichen steht in einem Hefte des Nachlasses (Ac) vom 22. November 1799 S. 19 der Satz, daß die Summe

$$\sum_1^n \frac{\varphi(n)}{n^2},$$

wo $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion, quam proxime durch $\frac{6}{\pi^2}\log n +$Konst. ausgedrückt werde, während die Konstante etwa 0,697413 sei; und in einem andern Hefte vom Juli 1800 (Ae) S. 39 wird für die Anzahl $\psi(M)$ der Teiler einer Zahl M die asymptotische Formel

$$\sum \psi(M) = M(\log M + 0{,}15443) + ?$$

gegeben. Die Notizen Nr. 14 und 31 des Gaußschen Tagebuchs vom 20. Juni und 6. September 1796 sprechen ferner zwei asymptotische Gesetze aus, für die zuerst Dirichlet einen Beweis bekannt

gemacht hat, und welche mit Benutzung des Eulerschen Zeichens $\int n$ für die Summe der Teiler einer Zahl n sowie der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$ in den Formeln

$$\frac{\int 1 + \int 2 + \cdots + \int n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{\pi^2}{6}$$

d. i.

$$\frac{\int 1 + \int 2 + \cdots + \int n}{n} = \frac{\pi^2}{12} \cdot n$$

resp.

$$2 \cdot \frac{\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

ihren Ausdruck finden. Bei dem gänzlichen Fehlen jedes Zeichens einer für die Auffindung dieser Formeln dienenden Methode hat es fast den Anschein, als ob alle diese Ergebnisse nur induktiv gefunden seien, so schwer es zu denken ist, daß derartig verborgen liegende Beziehungen ohne den Anhalt bestimmter theoretischer Gesichtspunkte erkannt sein sollen.

Neben diesen nur handschriftlich vorhandenen Sätzen stehen die in den genannten Artikeln der D. A. angeführten asymptotischen Bestimmungen des dort definierten „Mittelwerts" für die Anzahl der Geschlechter eigentlich primitiver binärer quadratischer Formen als Funktion ihrer Determinante $\pm D$:

$$\frac{4}{\pi^2} \cdot \log D + \frac{8}{\pi^2} C^{1)} + \frac{48}{\pi^4} \cdot \sum \frac{\log n}{n^2} - \frac{2 \log 2}{3\pi^2}$$

und des Mittelwerts für die Anzahl ihrer Klassen bei negativer Determinante — D:

$$\frac{2\pi}{7 \cdot \sum \frac{1}{n^3}} \cdot \sqrt{D} - \frac{2}{\pi^2}.$$

Obwohl auch hier jede Andeutung der angewandten Methode fehlt, wird doch ausdrücklich von Gauß ausgesprochen (art. 304), daß er durch eine theoretische Untersuchung, deren Grundsätze er bei anderer Gelegenheit mitteilen wolle, zu diesen Formeln gelangt sei, und ein schriftlicher Vermerk (W. I, p. 476, Anm. zu art. 302) in seinem Handexemplare der D. A. setzt die Entstehung derselben auf den Anfang d. J. 1799. In der Tat findet man in Gauß' Heftchen vom 22. Novb. 1799 (Ac) S. 19 die erstere Anzahl, freilich erst in der unbestimmteren Formel $\alpha \log D + \beta$, und an anderer Stelle (Eb)

1) C ist die Eulersche Konstante.

schon etwas bestimmter und mit dem Zusatz: Multitudo generum per disquisitionem theoreticam inventa est, durch $\frac{8}{\pi^2}\cdot\log D +$ Konst.[1]) ausgesprochen. Der für die zweite Anzahl angegebene Ausdruck abgesehen von der Konstante $\frac{-2}{\pi^2}$, welche Gauß auch an späterer Stelle (W. II, p. 284) unterdrückt hat, tritt bereits in Gauß' Heftchen Ab vom Novb. 1798 S. 8 auf ohne Angabe seiner Bedeutung. Die entsprechende Untersuchung für Formen mit positiver Determinante, deren Resultat schon in art. 304 D. A. richtig vermutet wird, erledigte sich nach dem Additam. ad. art. 306 X (W. I, p. 466) und der Anmerkung zu demselben (ebendas. p. 476) erst am Ende d. J. 1800. In dieser Zwischenzeit muß Gauß die analytischen Betrachtungen ausgebildet haben, die er in zwei Abhandlungen aus den Jahren 1834, 1837 niedergelegt hat und die (W. II, p. 269—282) mit ausführlichen Erläuterungen Dedekinds abgedruckt sind, Betrachtungen, welche ihn zur Bestimmung des wahren Wertes der Klassenanzahl schon vor Dirichlet geführt haben.

Sie gründen sich auf denselben geometrischen Hilfssatz wie bei Dirichlet. Denkt man sich im rechtwinkligen Gitter ganzzahliger Punkte, wie es bei den komplexen ganzen Zahlen $a + bi$ auftritt, eine geschlossene Kurve vom Inhalte V und nennt M die Anzahl der Gitterpunkte (oder Quadrate $\varkappa^2$), welche in ihr Inneres fallen, so ist, wenn die Kurve gleichmäßig nach allen Richtungen unendlich erweitert wird, $\lim \frac{M}{V} = 1$, oder anders ausgedrückt: bleibt V konstant, nehmen aber die Quadrate unendlich ab, so ist $\lim\limits_{\varkappa=} \cdot \frac{M\varkappa^2}{V} = 1$. Da die Anzahl der Punkte innerhalb der Kurve

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = A$$

bei negativer Determinante $-D$ die Anzahl $F(A)$ der Darstellungen aller Zahlen $1, 2, 3, \ldots, A$ mittels der Form (a, b, c) ist, so ergibt sich dem Hilfssatze zufolge für die mittlere Anzahl der Darstellungen einer Zahl A durch dieselbe Form die Gleichung

$$\lim_{A=\infty} \frac{F(A)}{A} = \frac{\pi}{\sqrt{D}}.$$

---

1) Im Nachlasse steht in diesen Formeln N statt D, sicher aber in gleicher Bedeutung.

Da sie nur von der Determinante D abhängt, erschließt man für die mittlere Anzahl der Darstellungen einer Zahl A durch das gesamte Formensystem mit der Determinante $-D$ den Wert $h \cdot \frac{\pi}{\sqrt{D}}$, in welchem h die Klassenzahl dieses Systems bedeutet.

Stimmen soweit die Methoden beider Forscher mit einander überein, so unterscheiden sie sich in der Herleitung eines zweiten Grenzwertes für dieselbe mittlere Anzahl d. i. in deren Zurückführung auf die Summe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$, bezüglich welcher auch die erhaltenen Gaußschen Notizen genügenden Aufschluß nicht geben. An einem besonders glücklichen Tage aber, dem 30. November 1800 (Nr. 114 T.) gelang es Gauß, die Klassenanzahl für Formen mit negativer Determinante unter dreifacher Gestalt zu bestimmen: einmal mittels der gedachten Summe, ein zweites Mal unter der Gestalt eines unendlichen Produktes, ein drittes Mal mittels trigonometrischer Funktionen (s. W. II, p. 285/6, wo auch für die Klassenanzahl bei positiver Determinante entsprechende Ausdrücke gegeben sind), und er fand endlich noch am 3. Dezember desselben Jahres (Nr. 115 T.) für Formen mit negativer Determinante $-D$ jenen einfachen, nur aus der Menge der Zahlen unterhalb D, welche Teiler bezw. Nichtteiler der Form x^2+D sind, gebildeten Ausdruck (s. ihn W. II, p. 286 VII für den Fall $D = p \equiv 1$ mod. 4), den für diesen einfachsten Fall einer Primzahldeterminante $-p$ zuerst Jacobi bekannt gemacht hat.

Mit Hilfe des letztern konnte Gauß eine Reihe von Sätzen über die Verteilung der quadratischen Reste (mod. p) in den Achteln bezw. Zwölfteln des Intervalls 1 bis p aufstellen (W. II, p. 288—291, 301—303), sowie endlich auch, was gelegentlich der Comm. prima der biquadratischen Reste noch als eine Lücke angedeutet worden, für den Fall $p \equiv 5$ (mod. 8) jene, für den andern Fall $p \equiv 1$ (mod. 8) bis auf den heutigen Tag noch ungelöste Frage entscheiden (W. II, p. 287), mit welchem Vorzeichen behaftet die Basis b der Zerlegung $p = a^2 + b^2$ im Schlußtheoreme jener Abhandlung erhalten werde; eine Verknüpfung einander scheinbar sehr entlegener Gegenstände und Gedanken, die Gauß selbst als eine sehr verschlungene und interessante bezeichnet hat (Brief an Dirichlet vom 30. Mai 1828, W. II, p. 516). —

So sehen wir, wohin wir uns auch wenden, Gauß' Forschung schon in jedes der verschiedenen Gebiete, welche die heutige Wissenschaft der höheren Arithmetik umfaßt, tief und bahnbrechend eindringen; keins, das nicht — die additive Zahlentheorie etwa ausgenommen — auf Gauß' Arbeiten als seine Grundlage oder den Keim seiner Entwicklung zu weisen hätte. Denn auch die Idealtheorie der algebraischen Zahlenkörper weist uns auf die von Gauß erkannte Notwendigkeit der Zahlen $a+bi$ zurück und ist nur ihr Analogon auf höherer Stufe. —

Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt.

Von

Th. v. Kármán in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein am 14. September 1911.

Seit Osborne Reynolds' Untersuchungen über die mechanische Ähnlichkeit von Bewegungszuständen zäher Flüssigkeiten ist es bekannt, daß der Widerstand, den ein fester Körper in einer unbegrenzten, inkompressiblen Flüssigkeit erfährt, wenn er sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit U geradlinig fortbewegt, durch eine allgemeine Formel von der Form

$$W = \mu l U f\left(\frac{Ul\varrho}{\mu}\right)$$

gegeben wird, wobei

μ die Zähigkeitskonstante

ϱ die Dichte der Flüssigkeit

l eine beliebig gewählte lineare Abmessung des Körpers bedeutet und $f\left(\frac{Ul\varrho}{\mu}\right)$ eine von der Gestalt des Körpers und der Wahl von l abhängige Funktion der einzigen Variablen $R = \frac{Ul\varrho}{\mu}$ bezeichnet, welche letztere wir als Reynolds'schen Parameter einführen wollen.

Die Erfahrung zeigt, daß diese Funktion $f(R)$ für sehr kleine Werte von R, d. h. für den Fall sehr großer Zähigkeit, bezw. sehr langsamer Bewegung nahezu einen konstanten Wert hat. Den Grenzfall $R = 0$ haben die Stokes'schen Untersuchungen wenigstens für Körper mit einfacher Begrenzung in der Tat erledigt und führten zu Widerstandsformeln, die besonders

in neuester Zeit oft besprochen wurden und einen mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit, mit der Zähigkeitskonstante und bei geometrisch ähnlichen Körpern mit den linearen Abmessungen des Körpers proportionalen Widerstand liefern.

Schwieriger erscheint die Behandlung des entgegengesetzten Grenzfalles $R = \infty$, d. h. der Fall sehr geringer Zähigkeit, bezw. rascher Bewegung. Dieser ist nicht weniger wichtig, da fast sämtliche technisch wichtige Fälle des Flüssigkeitswiderstandes und insbesondere auch die Fragen des Luftwiderstandes hierher gehören, weil ja der Einfluß der Kompressibilität der Luft bei den Geschwindigkeiten, mit welchen Luftfahrzeuge fahren und Luftschrauben sich drehen, so unerheblich ist, daß die Luft mit guter Annäherung als inkompressibel betrachtet werden kann. Die Erfahrung zeigt, daß bei großen Werten des Parameters R der Widerstand von der Zähigkeitskonstante so gut wie unabhängig ist. Mit $R = \infty$ gelangen wir eben zu dem Grenzfalle der reibungslosen Flüssigkeit und wir müssen das Grenzgebilde bestimmen, dem der Bewegungszustand der zähen Flüssigkeit zustrebt, falls wir den Grenzübergang zu der idealen Flüssigkeit vornehmen.

Es ist zweifellos, daß weder die Annahme der kontinuierlichen, noch die sog. Theorie der diskontinuierlichen Potentialbewegung diese gesuchte Lösung liefern kann. Die erstere führt bekanntlich zu dem Widerstand Null für beliebige Körper; die zweite, die von Helmholtz und Kirchhoff erfundene diskontinuierliche Potentialbewegung, die mit Rücksicht auf das Widerstandsproblem insbesondere von Lord Rayleigh diskutiert wurde, liefert zwar einen Widerstand, proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit, wie dies unsere obige allgemeine Formel für den Fall fordert, daß der Widerstand unabhängig sei von der Zähigkeitskonstante μ, doch sind die theoretisch berechneten Werte durchaus anders wie die gemessenen. Namentlich fehlt in der Theorie vollkommen die Saugwirkung, die nach den Versuchen hinter dem Körper entsteht und die nach neueren Versuchen bei vielen Körperformen geradezu als maßgebend für die Größe des Widerstandes erscheint. Auch überzeugt man sich leicht, daß die Grundannahme der Theorie, daß die Bewegung in bezug auf ein mit dem Körper mitbewegtes Koordinatensystem stationär ist, der Wirklichkeit keineswegs entspricht. Hinter dem Körper entsteht kein „totes Wasser“, welches mit dem Körper sich einfach hinziehen würde. Wir müssen also nach

anderen, der Erfahrung besser entsprechenden Bewegungsformen suchen.

Der Grund, weshalb die Annahme der diskontinuierlichen Potentialbewegung, d. h. die Annahme einer Trennungsschicht zwischen zwei Potentialgebieten mit unstetigem Geschwindigkeitsübergang der Wirklichkeit nicht nahekommen kann, liegt in der Labilität dieser Trennungsschicht oder „Wirbelschicht", wie es schon von Helmholtz erkannt und von Lord Kelvin[1]) näher erörtert wurde. Die experimentelle Untersuchung der Vorgänge zeigt, daß eine solche Wirbelschicht die Tendenz zeigt, sich sozusagen „aufzuwickeln", so daß die Wirbelstärke in einzelnen Punkten konzentriert wird. Das Gebilde nähert sich scheinbar dem Grenzfalle isolierter Wirbelfäden und so gelangt man zu der Idee, stabile Anordnung isolierter Wirbelfäden zu suchen, die etwa als Endprodukt der zerstörten labilen Trennungsschicht gelten könnte. Die folgenden einfachen Rechnungen liefern die einfachste stabile Anordnung von Wirbelfäden für das ebene Problem, welches übrigens auch von der Theorie der Trennungsschicht bisher allein erledigt werden konnte. Allem Anschein nach gelangen wir in dieser Weise zu einer Bewegungsform, die der Wirklichkeit gut entspricht.

Wir betrachten zwei parallele Reihen geradliniger, unendlich dünner Wirbelfäden. Diese wollen wir in jeder Reihe gleichmäßig verteilen und alle von gleicher Stärke, aber in den beiden Reihen von entgegengesetztem Rotationssinn annehmen. Es ist zunächst leicht einzusehen, daß die beiden Wirbelreihen in zweifacher Weise so angeordnet werden können, daß das ganze Gebilde — wie wir in einiger Entfernung hinter dem Körper wohl verlangen müssen — unverändert mit konstanter Geschwindigkeit fortschreitet: wir können entweder die einzelnen Wirbelfäden der beiden Reihen einander gegenüberstellen, oder aber die beiden Reihen mit der halben Teilung gegeneinander verschieben.

Es zeigt sich nun, daß das Gebilde nur bei der zweiten Anordnungsweise und auch dann nur bei einem bestimmten Werte des Verhältnisses $\frac{h}{l}$ (h Abstand der beiden Wirbelreihen, l Teilung) stabil sein kann.

---

1) Vgl. W. Thomson, Mathematical and physical papers, Bd. IV, p. 215

Bezeichnen wir die Koordinaten des i-ten Wirbelfadens mit $x_\iota y_\iota$, die Wirbelstärke mit ζ, so ist die Geschwindigkeit, die dieser von den übrigen Wirbelfäden erhält, offenbar gegeben durch die Formeln

$$2\pi \frac{dx_\iota}{dt} = \sum_\varkappa (-1)^\varkappa \zeta \frac{y_\iota - y_\varkappa}{(x_\iota - x_\varkappa)^2 + (y_\iota - y_\varkappa)^2}$$

$$2\pi \frac{dy_\iota}{dt} = -\sum_\varkappa (-1)^\varkappa \zeta \frac{x_\iota - x_\varkappa}{(x_\iota - x_\varkappa)^2 + (y_\iota - y_\varkappa)^2},$$

wobei die rechts- und linksdrehenden Wirbeln abwechselnd gezählt werden sollen.

Bezeichnen wir nun die Abweichungen der Koordinaten x_ι, y_ι von den Werten, die der gleichförmig fortschreitenden Bewegung entsprechen, mit $\xi_\iota \eta_\iota$ und führen für die Ableitungen der obigen Geschwindigkeiten nach $x_\varkappa, y_\varkappa$ die Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{dx_\iota}{dt}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_\varkappa}\left(\frac{dy_\iota}{dt}\right) = \alpha_{\iota\varkappa}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\varkappa}\left(\frac{dx_\iota}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{dy_\iota}{dt}\right) = \beta_{\iota\varkappa}$$

ein, so lauten die Bewegungsgleichungen des Wirbelfadens in der Nähe der Gleichgewichtslage

$$\frac{d\xi_\iota}{dt} = \sum_\varkappa (\alpha_{\iota\varkappa}\xi_\varkappa + \beta_{\iota\varkappa}\eta_\varkappa)$$

$$\frac{d\eta_\iota}{dt} = \sum_\varkappa (\beta_{\iota\varkappa}\xi_\varkappa - \alpha_{\iota\varkappa}\eta_\varkappa).$$

Denken wir uns nun zunächst ein Wirbelpaar frei beweglich, die übrigen festgehalten, und setzen die Koordinaten der beiden freien Wirbelfäden $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ proportional $e^{\lambda t}$, so gelangen wir offenbar zu der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \beta_{11} & \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \beta_{11} & -\alpha_{11} - \lambda & \beta_{12} & -\alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \beta_{22} \\ \beta_{21} & -\alpha_{21} & \beta_{22} & -\alpha_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Aus Symmetriegründen folgt, daß bei beiden oben erwähnten Anordnungen die Beziehungen gelten

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{12} = -\alpha_{21}, \quad \beta_{12} = -\beta_{21},$$

sodaß wir aus der Form der Determinante schließen können, daß bei der stabilen Anordnung $\beta_{11} = \beta_{22} = 0$ gelten muß. Diese Be-

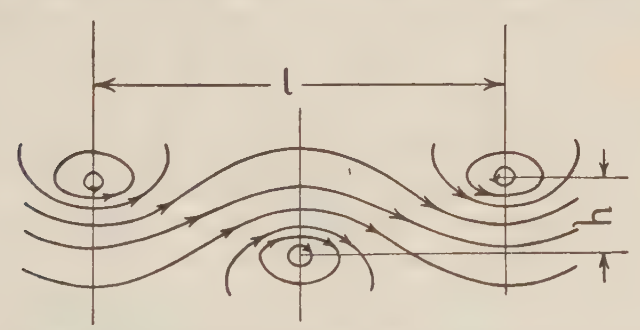
dingung kann aber nur bei der zweiten Anordnung erfüllt werden und sie liefert die transzendente Gleichung für h und l

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(2k-1)^2\frac{l^2}{4}-h^2}{\left[(2k-1)^2\frac{l^2}{4}+h^2\right]^2}-\frac{1}{(kl)^2}\right\}=0$$

oder — wie man leicht erhält —

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{\pi h}{l}=\sqrt{3}.$$

Eine genauere Untersuchung — die an anderer Stelle einer ausführlicheren Darstellung bedarf — zeigt nun, daß wir bei Berücksichtigung der Bewegungsfreiheit sämtlicher Wirbelfäden — wodurch also das System ein solches mit unendlich vielen Freiheitsgraden wird — dieselbe Stabilitätsbedingung erhalten. Es müßte allerdings noch gezeigt werden, daß andere Anordnungen von Wirbelfäden, namentlich zwei parallelen kontinuierlichen Wirbelschichten dieser stabilen Anordnung zustreben. Physikalisch kann man den Vorgang vielleicht dadurch verständlich machen, daß die einzelnen Wirbelfäden der Schicht (oder einer Reihe dicht nacheinander folgenden Wirbelfäden) sich in der Nähe von Punkten ansammeln, wo die örtlichen Differentialquotienten der von den übrigen Ansammlungen herrührenden Fortschreitungsgeschwindigkeit verschwinden. Und dies ist nur bei dieser einzigen Anordnung der Fall.



Wir wollen als Ergebnis feststellen, daß es nur eine einzige stabile Anordnung geradliniger Wirbelfäden geben kann, bei welcher zwei Reihen nach dem entgegengesetzten Sinne drehender Wirbelfäden mit konstanter Geschwindigkeit fortschreiten. Bei dieser stabilen Anordnung sind die beiden Reihen mit der halben Teilung gegeneinander verschoben. Die Fortschreitungsgeschwindigkeit beträgt

$$u = \frac{\zeta}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h}{(2k-1)^2 \frac{l^2}{4} + h^2} = \frac{\zeta}{2l} \mathfrak{Tg}\left(\frac{\pi h}{l}\right)$$

und durch Einführung des aus der Stabilitätsbedingung gewonnenen Wertes

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{\pi} \mathfrak{Ar\,Cos}\, \sqrt{3}, \qquad u = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\zeta}{l}.$$

Wir denken uns folgendes Bild des Widerstandsmechanismus:

Der Körper schreite in der ruhenden Flüssigkeit mit der konstanten Geschwindigkeit U nach der x-Richtung fort. Durch diese Bewegung wird hinter dem Körper eine Wirbelbewegung erzeugt, welche in einiger Entfernung von dem Körper schon sehr wenig von der soeben berechneten stabilen Konfiguration abweicht. Der Bewegungszustand ist nicht stationär in bezug auf ein mit dem Körper mitbewegtes Koordinatensystem, da die Wirbelfäden mit der Eigengeschwindigkeit u fortschreiten, und diese — wie wir weiter unten noch berechnen werden — kleiner ausfällt, als die Geschwindigkeit des Körpers. Dementsprechend muß der Körper einen Widerstand erfahren, da stets neue Wirbelfäden hinter dem Körper entstehen und damit neue Impulsmengen erzeugt werden. Da die Relativgeschwindigkeit des Körpers gegen das Wirbelsystem $U-u$ beträgt (d. h. die Wirbelfäden mit der Geschw. $U-u$ hinter dem Körper zurück bleiben), so müssen in der Zeiteinheit in jeder Reihe $\frac{U-u}{l}$ neue Wirbelfäden entstehen. Jedes Wirbelfadenpaar erzeugt aber — wie sich leicht durch Anwendung bekannter allgemeiner Sätze über Wirbelbewegungen[1]) ergibt — eine nach der x-Richtung gerichtete Impulsmenge vom Betrage $\zeta \varrho h$, so daß wir für die in der Zeiteinheit erzeugte Impulsmenge und damit für die Größe der Widerstandskraft die allgemeine Formel

$$W = \varrho \zeta (U-u) \frac{h}{l}$$

erhalten.

Infolge der wechselseitigen Anordnung der Wirbelfäden bei der stabilen Konfiguration müssen die Wirbelfäden an beiden

---

1) Vgl. z. B. Lamb Hydrodynamics 1895, p. 243 ff.

Seiten abwechselnd entstehen, so daß hinter dem Körper eine periodische, pendelnde Bewegung entsteht. Dies entspricht durchaus der Erfahrung. Die Pendelung wurde allgemein beobachtet[1]), doch wollte man sie zumeist störenden Nebeneinflüssen zuschreiben. Die vorangegangene Stabilitätsbetrachtung zeigt, daß diese pendelnde Bewegungsform eine notwendige Folge der Labilität der symmetrischen Anordnung ist.

Es bleibt noch übrig, daß wir die Wirbelstärke ζ und damit die Fortschreitungsgeschwindigkeit des Wirbelsystems berechnen. Wir sind von der Vorstellung ausgegangen, daß die stabile Konfiguration isolierter Wirbelfäden ein Endprodukt der labilen Wirbelschicht sei. Dementsprechend dürfen wir annehmen, daß die Wirbelstärke jedes Wirbelfadens gleich ist der Gesamtzirkulation einer Wirbelschicht von der Länge l, aus der er entstanden ist. Wir wollen daher setzen

$$\zeta = Ul.$$

Alsdann wird die Fortschreitungsgeschwindigkeit des Wirbelsystems

$$u = \frac{U}{\sqrt{6}}$$

und die Formel für den Widerstand

$$W = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}} \varrho h U^2.$$

Führen wir — wie allgemein üblich eine „Widerstandsziffer" ψ durch die Formel

$$W = \psi \varrho l U^2$$

ein, wo l eine beliebig gewählte Abmessung des unendlich breit gedachten Körpers bezeichnet, so wird

$$\psi = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}} \frac{h}{l},$$

d. h. die einerseits aus den praktischen Messungen gewonnene Widerstandsziffer ist andererseits durch

---

1) Photographische Aufnahmen, die im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen gemacht worden sind, zeigen sehr klar diese Pendelung; vgl. auch die Beobachtungen von Benard, Comptes Rendus, Paris 1908, Bd. 148, p. 839, der das ganze Bewegungsfeld in Wirbelfelder mit entgegengesetztem Rotationssinn zerteilt denkt, ferner die Beobachtungen an Ballonmodellen im Technical report of the advisory committee for aeronautics 1910/11.

das Verhältnis des Abstandes der Wirbelreihen zu der gewählten linearen Abmessung (Plattenbreite, Kreisdurchmesser usw.) ausgedrückt. Diese Beziehung liefert eine Möglichkeit, die Theorie mit der Erfahrung unmittelbar zu vergleichen.

Wir hatten bisher nur Ansätze benutzt, die der Theorie der reibungslosen Flüssigkeit entnommen waren. Allerdings könnten in einer idealen Flüssigkeit keine Wirbelfäden entstehen; dieser scheinbare Widerspruch wird dadurch gelöst, daß wir die Reibung überall vernachlässigen dürfen, nur nicht in unmittelbarer Nähe des eingetauchten Körpers. Dieser Gedanke tritt vielleicht in Prandtl's[1]) Theorie der „Grenzschicht“ bei Flüssigkeiten mit sehr kleiner Reibung zuerst in voller Klarheit hervor und er ermöglicht es erst, daß wir unseren Grenzfall $R = \infty$, d. h. die Mechanik der idealen Flüssigkeit als Grenzfall der zähen Flüssigkeit physikalisch richtig fassen können. Man kann nämlich zeigen, daß die Reibungskräfte mit dem Grenzübergange $\mu = 0$ sich zu Null nähern, während die Wirbelgrößen, die durch die Reibung entstehen, endlich bleiben und durch diese — genauer durch die entsprechende Impulsmenge — wird der Widerstand bestimmt. Um den Widerstandsmechanismus verfolgen zu können, müssen wir die stabile Konfiguration dieser Wirbelfäden suchen, deren Entstehen durch die Prandtl'sche Theorie verständlich gemacht wird.

In dem oben dargelegten Falle der ebenen Bewegung erscheint es vielleicht etwas befremdend, daß wir als Bewegungsbild ein unstetiges Gebilde erhalten. Dies hängt aber offenbar damit zusammen, daß wir den Grenzfall eines unendlich breiten Körpers betrachtet haben und fällt höchstwahrscheinlich in dem räumlichen Falle weg. Die Vermutung liegt nahe, daß man z. B. für einen Umdrehungskörper schraubenförmige Wirbelfäden als stabile Konfiguration erhält. Die Behandlung des räumlichen Falles ist aber schon deshalb schwieriger, weil die Querschnittsabmessungen der Wirbelfäden nicht mehr außer acht gelassen werden dürfen, da ein gekrümmter Wirbelfaden — als unendlich dünn betrachtet — eine unendlich große Fortschreitungsgeschwindigkeit erhalten würde. Der räumliche Fall soll daher weiteren ausführlicheren Arbeiten vorenthalten bleiben.

Schließlich wollen wir noch auf jene Analogie mit den elektromagnetischen Erscheinungen hinweisen, die Helmholtz bereits

---

1) Verhandlungen des Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904, p. 484.

in seiner ersten klassischen Arbeit über Wirbelbewegung entdeckt hat. Nach dieser Analogie entspricht das Geschwindigkeitsfeld der Wirbelfäden dem magnetischen Kraftfeld von linearen Leitern, falls wir die Wirbelstärke durch Stromstärke, die Geschwindigkeit durch magnetische Kraft ersetzen. Der Entstehung von Wirbelfäden an der Körperoberfläche würde dann Stromzuführung entsprechen, und die hinter dem Körper sich langsamer hinziehenden Wirbelfäden dürften durch leichte lineare Leiter dargestellt werden, die sich von dem Körper loslösen und ihre Gestalt und Bewegung durch ihr magnetisches Feld selbst bestimmen.

Zur Transformationstheorie der automorphen Funktionen.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Herrn Richard Dedekind zum 80. Geburtstage gewidmet.

Vorgelegt von F. Klein am 13. Oktober 1911.

Für diejenigen automorphen Funktionen, deren Gruppen ein arithmetisch erkennbares Bildungsgesetz mit dem Charakter der Ganzzahligkeit besitzen, besteht die Möglichkeit der Ausbildung einer Transformationstheorie, welche an derjenigen der elliptischen Modulfunktionen ihr Vorbild besitzt. Diese seit längerem bekannte Tatsache ist bisher einer näheren Prüfung noch nicht unterzogen worden. Ich habe nun letzthin versucht, in dieser Richtung vorzugehen, indem ich den Ansatz der Transformation insbesondere auf eine solche Gruppe in Anwendung brachte, welche sicher nicht mit der Modulgruppe kommensurabel ist. Einige hierbei erhaltene Resultate erlaube ich mir in den folgenden Zeilen vorzulegen.

Unter ω sei die der quadratischen Gleichung:

$$\omega^2 + \omega - 1 = 0$$

genügende reelle ganze algebraische Zahl:

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

verstanden. Der zugehörige reelle quadratische Zahlkörper Ω hat $[1, \omega]$ zur Basis, d. h. wir gewinnen gerade die gesamten ganzen Zahlen von Ω in der Gestalt $(a+b\omega)$ mittelst aller Paare ganzer rationaler Zahlen a, b.

A, B, C, D seien ganze Zahlen von Ω. Mittelst positiv genommener Wurzel $\sqrt{\omega}$ setzen wir alsdann die Substitutionen:

$$(1)\qquad \zeta' = \frac{(A+B\sqrt{\omega})\zeta+(C+D\sqrt{\omega})}{(-C+D\sqrt{\omega})\zeta+(A-B\sqrt{\omega})}$$

an, deren Bauart sich gegenüber Kombination zweier Substitutionen als invariant erweist. Insbesondere bilden alle Substitutionen (1) der Determinanten 2 und 4 eine Gruppe, welche keine andere ist, als die Gruppe Γ der Signatur (0, 3; 2, 4, 5), d. i. die Gruppe des Kreisbogendreiecks der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$.

Als Erzeugende dieser Γ können wir benutzen:

$$(2)\qquad \begin{cases} V_1 = \begin{pmatrix} 0, & \omega+1+\sqrt{\omega} \\ -\omega-1+\sqrt{\omega}, & 0 \end{pmatrix}, \\ V_2 = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \\ V_3 = \begin{pmatrix} \omega+1-\sqrt{\omega}, & -\omega-1-\sqrt{\omega} \\ \omega+1-\sqrt{\omega}, & \omega+1+\sqrt{\omega} \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wobei wir die Substitutionen $\zeta' = V(\zeta)$ abgekürzt durch ihre vier Koeffizienten bezeichnen. Diese Erzeugenden befriedigen die Relationen:

$$(3)\qquad V_1^2 = 1,\quad V_2^4 = 1,\quad V_3^5 = 1,\quad V_1 V_2 V_3 = 1.$$

Die der positiven ζ-Halbebene angehörenden Fixpunkte e_1, e_2, e_3 der Substitutionen (2) sind:

$$(4)\qquad e_1 = \frac{i(\omega+1+\sqrt{\omega})}{\sqrt{2}},\quad e_2 = i,\quad e_3 = \frac{-\sqrt{\omega}+i\sqrt{2-\omega}}{\omega+1-\sqrt{\omega}}.$$

Die Hauptfunktion der Gruppe Γ nennen wir $J(\zeta)$ und wählen sie so, daß sie in den Ecken e_1, e_2, e_3 des Ausgangsdreiecks die Werte $0, 1, \infty$ annimmt.

Den Ansatz der Transformation unserer automorphen Funktion $J(\zeta)$ hat man nun in der Art zu vollziehen, daß man auf ζ eine Substitution T der Gestalt (1) mit ganzzahligen A, B, C, D ausübt, deren Determinante irgend eine von 1, 2 und 4 verschiedene positive ganze Zahl:

$$m = A^2+C^2-(B^2+D^2)\,\omega$$

des Körpers Ω ist. Diese Zahl m werden wir auch dann als

Grad der Transformation bezeichnen, wenn sie keine rationale ganze Zahl ist.

Die mittelst der Substitution $\zeta' = T(\zeta)$ transformierte Funktion:

$$J'(\zeta) = J(\zeta') = J(T(\zeta)) \tag{5}$$

gehört als Hauptfunktion zur transformierten Gruppe $\Gamma' = T^{-1}\Gamma T$, welche sich mit der ursprünglichen Gruppe Γ als **kommensurabel** erweist. Die gemeinsame Untergruppe Γ_μ von Γ und Γ' ist durch Kongruenzen nach dem Modul m definierbar und hat in Γ und Γ' notwendig den gleichen endlichen Index μ; wir werden sie in üblicher Weise als eine **Kongruenzuntergruppe der Stufe** m bezeichnen. Zwischen J und J' besteht demnach eine **algebraische Relation:**

$$f(J', J) = 0 \tag{6}$$

vom Grade μ in J' und in J, welche als „**Transformationsgleichung**" **der automorphen Funktion** $J(\zeta)$ **für den Transformationsgrad** m zu bezeichnen ist.

Diese Gleichung ist das Analogon der Modulargleichung in der Theorie der elliptischen Funktionen und besitzt eine entsprechende Theorie. Insbesondere notieren wir den Satz: **Die „Hauptkongruenzgruppe" der Stufe m liefert durch ihren Diskontinuitätsbereich die Riemannsche Fläche für die Galoissche Resolvente der Transformationsgleichung.** Man kann auch sagen: **Die nach dem Modul m reduzierte Gruppe Γ liefert eine Gruppe G_M der endlichen Ordnung M, die mit der Galoisschen Gruppe der Gleichung (6) isomorph ist.**

Der niederste Fall, bei dem wir diesem allgemeinen Ansatze näher treten können, ist $m = 3$. Wir bevorzugen als Transformation 3ten Grades von der Gestalt (1):

$$T(\zeta) = \frac{(\omega+1)\zeta - \omega}{\omega\zeta + (\omega+1)}. \tag{7}$$

Die einzelne Substitution V von der Gestalt (1) der Gruppe Γ wird mittelst dieser Transformation übergeführt in die Substitution $V' = T^{-1}VT$ der Gruppe Γ':

$$V' = \begin{pmatrix} A' + B'\sqrt{\omega}, & C' + D'\sqrt{\omega} \\ -C' + D'\sqrt{\omega}, & A' - B'\sqrt{\omega} \end{pmatrix},$$

in welcher, sofern sie dieselbe Determinante wie V haben soll, die

A', B', C', D' gegeben sind durch:

$$A' = A, \quad B' = \tfrac{1}{3}(B(2\omega+1)+2D),$$
$$C' = C, \quad D' = \tfrac{1}{3}(-2B+D(2\omega+1)).$$

So oft die Kongruenz $D \equiv B(1-\omega)$ mod. 3 besteht, wird V' wieder in Γ enthalten sein. Da andrerseits durch Auflösung der zweiten und vierten dieser Gleichungen nach B und D die Gleichungen:

$$3B = B'(2\omega+1)-2D', \quad 3D = 2B'+(2\omega+1)D'$$

entspringen, so befriedigen die hier hervorkommenden Substitutionen V' von Γ die Kongruenz:

(8) $$D' \equiv (\omega-1)B', \quad (\text{mod. } 3),$$

und zugleich erhalten wir in den V' auch die gesamten diese Kongruenz erfüllenden Substitutionen von Γ. Die gemeinsame Untergruppe der ursprünglichen Gruppe Γ und der transformierten $\Gamma' = T^{-1}\Gamma T$ ist die durch die Bedingung:

(9) $$D \equiv (\omega-1)B, \quad (\text{mod. } 3)$$

erklärte Kongruenzuntergruppe der Stufe 3. Daß diese Bedingung (9) für eine Untergruppe definierend ist, kann man auch direkt durch Kombination zweier die Kongruenz (9) erfüllenden Substitutionen (1) zeigen.

Da sich die numerischen Rechnungen bei Kombination der Substitution V in Zahlkörper Ω bewegen, so war die Aufstellung des Diskontinuitätsbereiches der fraglichen Untergruppe keine ganz einfache Arbeit. Derselbe erwies sich als aus zehn Doppeldreiecken zusammengesetzt; und zwar konnten dieselben so gelagert werden, daß fünf von ihnen den Punkt e_3 rings umgaben, während die fünf übrigen den mit e_3 äquivalenten Punkt $e_3' = V_3^2 V_1(e_3)$ umlagerten. Der Bereich erschien in dieser Weise aus zwei neben einander gelagerten rechtwinkligen regulären Fünfecken aufgebaut. Die Zusammenordnung der freien Randkurven aber war vermittelt erstlich durch zwei Substitutionen der Periode zwei:

$$V_3^{-1} V_1 V_3, \quad (V_3^2 V_2) V_1 (V_2^{-1} V_3^{-2})$$

mit den Fixpunkten $V_3^{-1}(e_1)$ und $V_3^2 V_2(e_1)$, durch zwei Substitutionen der Periode vier:

$$V_2, \quad (V_3^2 V_1 V_3^2) V_2 (V_3^{-2} V_1^{-1} V_3^{-2})$$

mit den Fixpunkten e_2 und $V_3^2 V_1 V_3^2(e_2)$, endlich durch die hyperbolische Substitution:

$$V_3 V_2^2 V_3^2.$$

Man kann diese Angaben dadurch hinterher bestätigen, daß man die fünf Erzeugenden der Γ_{10} mittelst der Substitutionen (2) explizite berechnet und für sie das Zutreffen der Kongruenz (9) dartut.

Aus dem fertig gezeichneten Diskontinuitätsbereiche der Γ_{10} geht hervor, daß derselbe durch keine Substitution erster Art von Γ in sich übergeht, auch an keiner Symmetrielinie des Dreiecksnetzes selber symmetrisch ist. Dagegen zeigt sich die wichtige Tatsache, daß unser Bereich durch eine Substitution zweiter Art ohne Fixpunkte (im Innern der ζ-Halbebene), welche in der durch Spiegelungen erweiterten $\overline{\Gamma}$ enthalten ist, in sich transformiert wird. Diese Transformation zweiter Art ist:

$$(10) \quad \overline{V}_1 = V_3^2 \overline{V}_0 V_3^2(\zeta) = \frac{(\omega+3-\sqrt{\omega})\,\bar{\zeta}+\omega+1+(2\omega+3)\sqrt{\omega}}{(\omega+1-(2\omega+3)\sqrt{\omega})\,\bar{\zeta}-(\omega+3)-\sqrt{\omega}},$$

wobei $\bar{\zeta}$ der zu ζ konjugiert komplexe Wert sein soll und $\overline{V}_0$ die Spiegelung an der imaginären ζ-Axe bedeutet. Man bestätigt auch leicht hinterher rechnerisch, daß die Substitution $\overline{V}_1$ die durch die Bedingung (9) erklärte Kongruenzgruppe in sich transformiert. Der Zusatz von $\overline{V}_1$ zur Γ_{10} liefert eine erweiterte $\overline{\Gamma}_{10}$, deren Diskontinuitätsbereich aus dem oben genannten regulären rechtwinkligen Fünfeck des Mittelpunktes e_3 besteht, und deren Erzeugende V_2, $V_3^{-1} V_1 V_3$ und $\overline{V}_1$ sind.

Übrigens kann man die Substitution $\overline{V}_1$ auch aus der in $\overline{\Gamma}$ enthaltenen Substitution:

$$\overline{V}_2(\zeta) = \frac{(\omega+1-\sqrt{\omega})\,\bar{\zeta}+\omega+3+(2\omega+3)\sqrt{\omega}}{(\omega+3-(2\omega+3)\sqrt{\omega})\,\bar{\zeta}-(\omega+1)-\sqrt{\omega}}$$

durch Transformation mit T in der Gestalt $\overline{V}_1 = T^{-1}\overline{V}_2 T$ herstellen. Die Gruppe zweiter Art $\overline{\Gamma}_{10}$ kann also auch als umfassendste gemeinsame Untergruppe der beiden kommensurabelen Gruppen $\overline{\Gamma}$ und $\overline{\Gamma}' = T^{-1}\overline{\Gamma}\,T$ angesehen werden.

Zur Gruppe $\overline{\Gamma}'$ gehört als Dreiecksnetz dasjenige, welches aus dem ursprünglichen Netze durch die Transformation:

$$\zeta' = T^{-1}(\zeta) = \frac{(\omega+1)\zeta+\omega}{-\omega\zeta+\omega+1}$$

hervorgeht. Der Diskontinuitätsbereich der $\overline{\Gamma}_{10}$ muß sich, da sie auch in der $\overline{\Gamma}'$ enthalten ist, demnach auch aus zehn Elementardreiecken der neuen Teilung aufbauen lassen. Nur ist die wirkliche Durchführung dieses Aufbaus deshalb umständlich, weil die Symmetrielinien der neuen Teilung von denen der ursprünglichen durchweg verschieden sind. Indessen ist für einen sogleich zu ziehenden Schluß wichtig, daß am Rande des ausgewählten Bereiches der $\overline{\Gamma}_{10}$ die beiden Punkte $e_2 = i$ und $e_1' = \overline{V}_1^{-1}(e_1)$ als Fixpunkte von Substitutionen, die auch in $\overline{\Gamma}'$ enthalten sind, notwendig wieder Ecken gleicher Art im neuen Dreiecksnetz sein müssen.

Der Diskontinuitätsbereich der Γ_{10} ist vom Geschlechte $p = 0$ und liefert über der J-Ebene eine Riemannsche Fläche von folgender Verzweigung: Bei $J = 0$ verlaufen 2 Blätter isoliert, die übrigen 8 hängen zu je 2 in 4 Verzweigungspunkten zusammen; bei $J = 1$ verlaufen gleichfalls 2 Blätter isoliert, und die übrigen 8 hängen zu je 4 in 2 Verzweigungspunkten zusammen; endlich hängen bei $J = \infty$ die 10 Blätter zu je 5 in 2 Verzweigungspunkten zusammen. Aus diesen Angaben allein würde man die Beziehung zwischen J und der Hauptfunktion der Γ_{10} noch nicht ohne große Mühe herleiten können; auch zeigt sich, daß die 10-blättrige Fläche aus der angegebenen Verzweigung allein noch nicht eindeutig bestimmt ist. Indessen kommt uns hier zu Hilfe, daß die Γ_{10} durch die Substitution zweiter Art $\overline{V}_1$ in sich transformiert wird, die im Innern der ζ-Halbebene keine Fixpunkte besitzt, und deren Quadrat in Γ_{10} enthalten sein muß. Dieser Transformation wird für die etwa durch $\tau(\zeta)$ zu bezeichnende Hauptfunktion der Γ_{10} eine lineare Substitution zweiter Art von der Periode 2 ohne Fixpunkte entsprechen. Wir wollen τ so wählen, daß die fragliche Substitution unmittelbar die „Diametralsymmetrie“:

$$\tau' = \frac{-1}{\bar{\tau}} \tag{11}$$

liefert, wobei wir unter $\bar{\tau}$ wieder den zu τ konjugierten Wert meinen. Im Punkte e_2 möge τ verschwinden; dann wird zufolge (11) im Punkte $e_2' = \overline{V}_1(e_2)$ der Wert $\tau = \infty$ zutreffen. Ohne Störung dieser Festsetzungen kann τ noch mit einem beliebigen Faktor vom absoluten Betrage 1 versehen werden. Dieser Faktor

ist bis auf das Vorzeichen bestimmt, indem wir fordern, daß τ in dem einem bei $J = 1$ gelegenen Verzweigungspunkte (und damit wegen (11) auch in anderen) rein imaginären Wert hat. Das Vorzeichen, welches noch offen bleibt, wählen wir endlich so, daß ein gewisser in der unten folgenden Gleichung (12) auftretender Koeffizient einer ungeraden Potenz von τ positiv imaginär wird.

Erst auf Grundlage dieser Angaben war es möglich, die Rechnungen mittelst der Funktionaldeterminantenmethode [1]) durchzuführen. Die Relation zwischen J und τ bestimmte sich in folgender Gestalt:

$$(12)\quad J:J-1:1 = \left(\tau^2 - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}(1-i\sqrt{3})\tau + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\tau^4 + \frac{1}{\sqrt{5}}(4\sqrt{3}+13i)\tau^3 - \frac{3}{10}(1+i\sqrt{3})\tau^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}(9\sqrt{3}+25i)\tau - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$:\left(\tau^2 + \sqrt{15}(1+i\sqrt{3})\tau + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(\tau^2 + i\sqrt{5}\tau + 1)^4$$
$$:\frac{2^7 . 3^4\sqrt{3}}{5^3\sqrt{5}}(1+i\sqrt{3})\tau^5.$$

Die 10 Lösungen τ dieser Gleichung können wir in der Gestalt angeben:

$$(13)\qquad \tau(V_3^\nu(\zeta)),\quad \tau(V_3^2 V_1 V_3^\nu(\zeta)),\quad (\nu = 0, 1, \ldots, 4).$$

Zugleich sind diese Funktionen die Hauptfunktionen der zehn mit Γ_{10} innerhalb Γ gleichberechtigten Untergruppen. Hierbei sei die Bemerkung gestattet, daß es innerhalb Γ nur ein System solcher Γ_{10} gibt, was man auch dahin aussprechen kann, daß jene 10 Γ_{10} auch in der erweiterten $\overline{\Gamma}$ nur mit sich gleichberechtigt sind. Es folgt dies aus dem Umstande, daß Γ_{10} durch die Substitution zweiter Art $\overline{V}_1$ in sich übergeführt wird.

Um nun von der Gleichung (12) aus zur Transformationsgleichung selbst zu gelangen, üben wir zunächst auf ζ in (12) die zu T inverse Transformation T^{-1} aus und setzen:

$$J(T^{-1}(\zeta)) = J'(\zeta),\quad \tau(T^{-1}(\zeta)) = \tau'(\zeta).$$

Dann besteht natürlich zwischen J' und τ' wieder dieselbe Gleichung wie zwischen J und τ. Aber offenbar ist $\tau'(\zeta)$ Hauptfunktion der Gruppe $\Gamma'_{10} = T\Gamma_{10}T^{-1}$, welche

1) Siehe darüber Klein, Math. Ann. Bd. 14, pg. 141.

zufolge der oben an die Gleichung (7) angeschlossenen Rechnungen keine andere ist, als die durch die Kongruenz:

$$-D \equiv (\omega - 1) B, \quad (\text{mod. } 3)$$

erklärte Kongruenzuntergruppe dritter Stufe von Γ. Man kann offenbar die Substitutionen von Γ_{10} einfach durch Zeichenwechsel der ganzen Zahl D in die von Γ'_{10} umwandeln. Da andrerseits ein Zeichenwechsel von C die Gruppe Γ_{10} in sich überführt, so können wir Γ'_{10} aus Γ_{10} auch dadurch herstellen, daß wir in allen Substitutionen von Γ_{10} die Vorzeichen der zweiten und dritten Koeffizienten ändern, oder (was auf dasselbe hinausläuft) daß wir Γ_{10} mittelst der Spiegelung $\overline{V}_0$ an der imaginären ζ-Axe transformieren. Benutzen wir noch die oben festgestellte Relation $\Gamma_{10} = \overline{V}_1^{-1}\, \Gamma_{10}\, \overline{V}_1$, so können wir auch schreiben:

$$\Gamma'_{10} = (\overline{V}_1\, \overline{V}_0)^{-1}\, \Gamma_{10}\, (\overline{V}_1\, \overline{V}_0).$$

Diese Gruppe hat aber auch eine der Funktionen (13) zur Hauptfunktion und zwar zeigt die nähere Betrachtung, daß es die Funktion:

(14) $$\tau = \tau(V_3^2\, V_1\, V_3^2(\zeta))$$

ist. Z w i s c h e n d i e s e r L ö s u n g τ d e r G l e i c h u n g (12) u n d τ' b e s t e h t d e m n a c h e i n e l i n e a r e R e l a t i o n:

(15) $$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Im Punkte $\zeta = i$ (Fixpunkte von T) hat $\tau'(\zeta)$ den Wert der ursprünglichen Funktion $\tau(\zeta)$, während die in (14) gemeinte Funktion τ daselbst den Wert besitzt, der dem ursprünglichen τ im Punkte $\overline{V}_1(i)$ zukommt. Diese beiden τ-Werte sind die Lösungen der Gleichung:

$$\tau^2 + \sqrt{15}(1 + i\sqrt{3})\,\tau + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Wegen der schon oben betonten Invarianz der in Rede stehenden Bereichecken gegenüber der Transformation T ist also die Relation (15) so beschaffen, daß jeder Wurzel τ der eben angegebenen Gleichung zweiten Grades die andere Wurzel dieser Gleichung als τ' entspricht. Indem man die gleiche Betrachtung für die Fixpunkte der Erzeugenden der Periode 2 ausführt, findet man, daß auch jeder Wurzel τ der Gleichung:

$$\tau^2 - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}(1 - i\sqrt{3})\,\tau + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = 0$$

die andere Wurzel als Wert τ' in (15) zugehört. Hieraus folgt aber sofort weiter, daß die Substitution (15) von der Periode 2 ist und also $a + d = 0$ hat; denn ihr Quadrat hat die fraglichen vier Wurzelwerte τ zu Fixpunkten, ist also die identische Substitution. Auf Grund dieser Angaben ist die Relation (15) bereits vollständig bestimmt; wir geben sie in der symmetrischen Gestalt:

$$(16) \qquad (8 + 2i\sqrt{3})\,\tau\tau' - i\sqrt{5}\,(\tau + \tau') + (8 - 2i\sqrt{3}) = 0.$$

Die Transformationsgleichung $f(J', J) = 0$ selbst ergibt sich jetzt durch Elimination von τ und τ' aus der Gleichung (12), der entsprechenden zwischen J' und τ' und der Gleichung (16) als eine in J' und J auf den zehnten Grad steigende symmetrische algebraische Gleichung. Dem Vorgang Kleins in der Theorie der Modulargleichungen[1]) folgend sehen wir jene drei Gleichungen als Ersatz der Transformationsgleichung an.

Die weitere Theorie der gewonnenen Transformationsgleichung für den dritten Transformationsgrad kommt auf bereits bekannte Entwicklungen zurück. Die modulo 3 reduzierte Gruppe Γ liefert als Galoissche Gruppe der Transformationsgleichung nach einer früheren Note des Verf.[2]) eine einfache G_{360}, welche mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen isomorph ist. Daselbst sind unter (7) zwei einander konjugierte Gleichungen sechsten Grades angegeben, welche die niedersten Resolventen der Transformationsgleichung sind. Sie entsprechen zwei Systemen von je sechs gleichberechtigten Ikosaedergruppen G_{60} in unserer Galoisschen G_{360} der Transformationsgleichung. Eine invariantentheoretische Behandlung der G_{360} gab bereits etwas früher A. Wiman[3]) auf Grund der interessanten Tatsache, daß es eine mit unserer G_{360} isomorphe Gruppe von 360 ebenen Kollineationen gibt. Siehe über die Berührung der Wimanschen Entwicklungen zu den hier vorliegenden die eben genannte Note des Verf.

Karlsbad, den 15. September 1911.

---

1) Math. Ann. Bd. 14, pg. 141.

2) Gött. Nachr. von 1896, pg. 199.

3) Math. Ann. Bd. 47, pg. 531 ff.

Über Zustandsgleichungen im Gebiete kleiner Volumen.

Von

G. Tammann.

Mit 4 Figuren im Text.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Oktober 1911.

Die im folgenden zu entwickelnden Zustandsgleichungen für isotrope und anisotrope Stoffe, haben ihren Ursprung in der Erfahrung.

Die Zustandsgleichung der Flüssigkeiten bei kleinem Volumen gründet sich auf die Messungen der Volumenflächen mehrer Flüssigkeiten von E. H. Amagat[1]). Auf Grund der unübertroffenen Untersuchungen von Amagat kann gezeigt werden, daß bei Drucken, die größer sind als die einer gewissen p-T-Linie, die Volumenflächen der Flüssigkeiten sich durch sehr einfache Gesetze wiedergeben lassen, die betreffs ihrer Durchsichtigkeit an die Gesetze idealer Gase erinnern.

Über die Volumenflächen anisotroper Körper sind wir bekanntlich sehr wenig unterrichtet, wir kennen aber ein Gesetz, welches die Wärmeausdehnung eines Stoffes in isotropen und anisotropen Zuständen verbindet, und welches, wie wir sehen werden, darauf hinweist, daß die einfachen Volumengesetze, denen bei höheren Drucken die Flüssigkeiten unterworfen sind, wahrscheinlich auch auf krystallisierte Stoffe übertragen werden dürfen.

Diese Erfahrungen ermöglichen die Behandlung einer Reihe von Fragen aus der Gleichgewichtslehre nach Methoden, die bisher auf die Gleichgewichte zwischen isotropen und anisotropen Phasen

---

1) E. H. Amagat, Ann. de chim. et de phys. S. 6, T. 29, p. 505.

nicht angewandt werden konnten, weil es an jeder Andeutung über Zustandsgleichungen, die für das hier in Betracht kommende Gebiet der p-T-Ebene gelten, fehlte.

Der Weg, der zu den folgenden Zustandsgleichungen führte, gibt auch Auskunft über ihr Wesen und ihren Gültigkeitsbereich. Vor Jahren fand ich für die Lage der Volumenisobaren eines Krystalls und seiner Schmelze beim Schmelzpunkt eine einfache Regel[1]). Denkt man sich die beiden Volumenisobaren zu tiefen Temperaturen geradlinig verlängert, so findet man, daß sie sich beim absoluten Nullpunkt schneiden. Schon damals wurde geprüft, ob eine analoge Regel auch für die Volumenflächen der von Amagat untersuchten Flüssigkeiten gilt. Doch ergab sich, daß bis zu Drucken von 1000 Atm. diese Regel auf die Volumenfläche von Flüssigkeiten bei Temperaturen etwa 100° über ihren Schmelzpunkten nicht übertragbar ist. Von einer weiteren Prüfung bei höheren Drucken wurde damals Abstand genommen. Als diese Frage nun wieder aufgenommen wurde, ergab sich, daß von 1000—3000 Atm. auch die Volumenisobaren der Flüssigkeiten, wenn man sie geradlinig zu tiefen Temperaturen hin verlängert, sich bei der Temperatur des absoluten Nullpunktes schneiden. Es scheint also die Wärmeausdehnung mindestens eines Teils der Stoffe bei kleineren Volumen durch ein einfaches Gesetz, welches sowohl für den isotropen als auch den anisotropen Zustand gilt, geregelt zu werden. Damit war auch der Anstoß gegeben, eine möglichst einfache Form einer Gleichung für die Volumenisothermen der Flüssigkeiten bei höheren Drucken, über 1000 Atm., zu suchen.

Nachdem erst die Forderung, daß dieselbe Gleichung, welche die Isothermen von 1000—3000 Atm. darstellt, auch die Isothermen bei kleineren Drucken wiedergeben soll, aufgegeben war, brauchte ich nach einer geeigneten Gleichung nicht lange zu suchen.

Es stellte sich heraus, daß für Äther eine Gleichung von der Form

$$v = v_{p=\infty} + A \frac{K}{K+p},$$

wo $v_{p=\infty}$, A und K Konstante bedeuten, genügt, um die Volumenisothermen des Äthers von 1000—3000 Atm. mit hinreichendem Anschluß an die Erfahrung wiederzugeben. Damit war eine Grundlage gewonnen, auf der sich weiter bauen ließ.

1) Annalen der Physik, Bd. 1. 1900, S. 275.

1. Die Volumenisothermen der Flüssigkeiten.

Im folgenden wird gezeigt werden, daß bei Drucken über 1000 Atm. die Formel:

$$v_p = v_{p=\infty} + A \frac{K}{K+p} \tag{1}$$

die Volumenisothermen des Äthyläthers, die Amagat bis 3000 Atm. festgelegt hat, in befriedigender Weise wiedergibt.

Nachdem sich für 2 Isothermen des Äthers ergeben hatte, daß die Formel 1) bei Drucken über 1000 Atm. einen guten Anschluß an die Beobachtungen von Amagat ergibt, übernahm Herr Dr. Körber die Prüfung dieser Formel am gesamten Amagatschen Beobachtungsmaterial. Um dem Leser ein Beispiel für den Anschluß der Formel 1) an die Beobachtungen von Amagat zu geben, sind den Rechnungen von Herrn Dr. Körber für 3 Isothermen des Äthers die Werte der Konstanten K, A und $v_{p=\infty}$ entnommen worden (Tabelle 1); außerdem finden sich in Tabelle 1 die mittels der Formel berechneten und die von Amagat bestimmten Volumina.

Tabelle 1. Äthyläther.

	t	0°.00	20°.20	50°
	K	3074	2874	2558
	A	0.2991	0.3200	0.3540
	$v_{p=\infty}$	0.6873	0.6927	0.7000
p_r 0	Amagat	1.0000	1.0320	1.0865 (extr.)
	berechnet	0.9864	1.0127	1.0540
	$\Delta . 10^4$	+ 136	+ 193	+ 325
p_r 500	Amagat	0.9465	0.9674	0.9995
	berechnet	0.9446	0.9649	0.9961
	$\Delta . 10^4$	+ 19	+ 25	+ 34
p_r 1000	Amagat	0.9130	0.9295	0.9545
	berechnet	0.9130	0.9295	0.9545
	$\Delta . 10^4$	0	0	0
p_r 1500	Amagat	0.8885	0.9020	0.9231
	berechnet	0.8883	0.9023	0.9231
	$\Delta . 10^4$	+ 2	− 3	0
p_r 2000	Amagat	0.8684	0.8805	0.8988
	berechnet	0.8685	0.8806	0.8987
	$\Delta . 10^4$	− 1	− 1	+ 1
p_r 2500	Amagat	0.8522	0.8631	0.8790
	berechnet	0.8523	0.8631	0.8790
	$\Delta . 10^4$	− 1	0	0
p_r 3000	Amagat	0.8387	0.8485	0,8629
	berechnet	0.8387	0.8485	0.8629
	$\Delta . 10^4$	0	0	0

Aus den Differenzen der gefundenen und berechneten Volumen ist zu sehen, daß von 0—1000 Atm. die gefundenen Volumen größer sind als die berechneten, daß sich aber bei höheren Drucken die berechneten und gefundenen Volumen kaum merklich unterscheiden.

Einen ähnlich guten Anschluß an die Erfahrung gibt die Formel 1) bei Drucken über 1000 Atm. für alle von Amagat untersuchten Flüssigkeiten mit den von Herrn Dr. Körber berechneten Konstanten.

In dieser Hinsicht besteht zwischen normalen und assoziierten Flüssigkeiten kein wesentlicher Unterschied.

Aus der Tabelle 1 ist, wie erwähnt, zu ersehn, daß man den Anschluß der berechneten Volumen an die beobachteten so weit treiben kann, daß die verbleibenden Differenzen kleiner werden als die zu erwartenden Beobachtungsfehler, welche im Mittel auf etwa 0.0006 des Volumens zu schätzen sind. Es kann uns das nicht wundern; denn dem Rechner stehen drei Konstanten zu Gebot, über die er willkürlich verfügen darf. Wir werden später sehn, daß man sich von dieser Willkür befreien kann, und daß auch dann noch die Formel 1) die Beobachtungen Amagats bei Drucken über 500 Atm. innerhalb der Beobachtungsfehler darzustellen imstande ist. Hier sollte nur gezeigt werden, daß die Formel 1) dank ihrer Anpassungsfähigkeit die Volumen über 1000 Atm. mit fast beliebiger Annäherung an die Erfahrung darzustellen vermag.

Den Konstanten der Formel 1) darf man folgende bestimmte physikalische Bedeutungen geben: $v_{p=\infty}$ ist das Grenzvolumen bei unendlich hohem Druck, A ist das freie Volumen beim Druck $p = 0$, der Ausdruck $A \frac{K}{K+p}$ gibt das freie Volumen beim äußeren Druck p an, und K ist der Teil des inneren Druckes, der durch die gegenseitige Anziehung der Moleküle bedingt wird.

Man kommt also auf Grund des Verlaufes der Volumenisothermen zum Resultat, daß sich das Volumen der Flüssigkeiten bei hohen Drucken so ändert, als ob die Molekularanziehung unabhängig vom Volumen ist.

Aus den letzten Äußerungen von van der Waals[1]) über die Abhängigkeit seiner Konstanten b vom Volumen ist zu ersehn, daß man auf atomistischem Wege die Frage nach dieser Abhängig-

1) J. D. van der Waals. Die Zustandsgleichung. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1911.

keit bei kleinen Werten des Volumens nicht gelöst hat. Damit bleibt auch die Frage nach der Abhängigkeit der Molekularanziehung vom Volumen offen. Daher ist es auch vom Standpunkt der Atomistik angezeigt, zuerst unabhängig von den Vorstellungen von van der Waals die Gesetze der Volumenflächen bei höheren Drucken zu suchen, und dann erst, wenn diese feststehn, diese Gesetze mit denen des Gebietes der van der Waalsschen Gleichung auf Grund atomistischer Theorien zu verbinden.

Schreibt man die Gleichung 1) in der Form:

$$(v_p - v_{p=\infty})(K + p) = AK,$$

so fällt ihre formale Analogie mit dem Boyle-Mariotteschen Gesetz:

$$vp = \text{konst.}$$

in die Augen.

Sowohl die Volumenisothermen der Flüssigkeiten über 1000 Atm. als auch die Volumenisothermen idealer Gase sind gleichseitige Hyperbeln, ein Unterschied besteht nur in der Hinsicht, daß für die Volumenisothermen bei hohen Drucken die Koordinaten der Gasgleichung um $v_{p=\infty}$ und K parallel sich selbst zu verschieben sind. Es gilt also betreffs des freien Volumens $(v_p - v_{p=\infty})$ und betreffs des inneren Druckes $(K+p)$ für das Volumen der Flüssigkeiten ein Gesetz, welches mit dem Boyle-Mariotteschen Gesetz formell identisch ist. Das Volumen idealer Gase ändert sich auf dem Schenkel einer gleichseitigen Hyperbel, dessen Asymptote die v-Achse ist, und das Volumen stark komprimierter Flüssigkeiten ändert sich auf dem Schenkel einer gleichseitigen Hyperbel, dessen Asymptote parallel der p-Achse ist.

Auf die Beziehungen der drei Konstanten $v_{p=\infty}$, A und K zur Temperatur und zum Druck werden wir später näher einzugehen haben.

2. Die Isobaren der Flüssigkeiten.

Aus den Messungen von Amagat folgt, daß die Wärmeausdehnungen für eine konstante Masse bei konstantem Druck, die Werte $\frac{d_p v}{dT}$, um so weniger von der Temperatur abhängen, je höher der betreffende konstante Druck gewählt wird. Bei nicht assoziierten Flüssigkeiten wird der Einfluß der Temperatur auf den Wert von $\frac{d_p v}{dT}$ zwischen 1000—1500 Atm. so gering, daß bei höheren Drucken die Differenzen der Werte $\frac{d_p v}{dT}$ bei verschiedenen

Temperaturen die Versuchsfehler nicht mehr übersteigen, man darf also bei Drucken über 1000 Atm. die Ausdehnung normaler Flüssigkeiten als unabhängig von der Temperatur betrachten und die Gültigkeit der Gleichung:

$$\frac{d_p^2 v}{d T^2} = 0$$

annehmen.

Da Amagat nicht die Werte $\frac{d_p v}{d T}$, sondern die Werte $\frac{1}{v}\frac{d_p v}{d T}$, tabelliert hat, die Ausdehnungen also durch die jeweiligen Volumen dividiert hat, so wurden aus seinen Tabellen für die Volumen bei verschiedenen konstanten Drucken und verschiedenen konstanten Temperaturen, die Volumenänderungen für Temperatursteigerungen bei konstanten Drucken entnommen und durch die entsprechenden Temperatursteigerungen dividiert. Man erhält in dieser Weise die Werte $\frac{d_p v}{d T}$, bezogen auf eine konstante Masse, welche bei $p = 1$ und $t = 0^\circ$ die Volumeneinheit erfüllt. Um diese Werte auf 1 gr zu reduzieren, müßte man dieselben noch durch die Dichte der Flüssigkeit bei $p = 1$ und $t = 0^\circ$ dividieren.

Die Ausdehnungen, $\frac{d_p v}{d T}$, bezogen auf dieselbe konstante Masse, die bei $t = 0^\circ$ und $p = 1$ die Volumeneinheit erfüllt, sind in der Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2. Die Wärmeausdehnung bei konstantem Druck.

p in Atm.	Äthyläther $\frac{\Delta v}{\Delta T}\cdot 10^5$		Schwefelkohlenstoff $\frac{\Delta v}{\Delta T}\cdot 10^5$		Methylalkohol $\frac{\Delta v}{\Delta T}\cdot 10^5$		Äthylalkohol $\frac{\Delta v}{\Delta T}\cdot 10^5$	
	von 0°—20°	von 20°—50°	von 0°—20°	von 20°—50°	von 0°—23°	von 23°—40°	von 0°—20°	von 20°—40°
1	158	185	116	127	112	112	107	113
500	103	108			88	85	80	85
1000	82	84	76	80	73	73	67	68
1500	67	71	66	70	64	65	61	59
2000	60	61	59	60	57	58	55	55
2500	54	53	55	55	52	53	49	50
3000	48	48	50	50	47	49	46	45

p in Atm.	Propylalkohol $\frac{\Delta v}{\Delta T} \cdot 10^5$		Wasser $\frac{\Delta v}{\Delta T} \cdot 10^6$	
	von 0°—25°	von 10°—40°	von 0°—20°	von 20°—50°
1	101	103	84	337
500	74	78	184	360
1000	62	66	265	380
1500	56	57	304	397
2000	51	53	333	406
2500	47	47	360	406
3000	41	45	365	406

Bei Drucken unter 1000 Atm. sind die Wärmeausdehnungen für ein höheres Temperaturintervall durchweg größer als für ein tieferes Temperaturintervall. Mit zunehmendem Druck schwindet aber dieser Unterschied, und die noch bleibenden Differenzen sind nicht größer als die Versuchsfehler, nämlich 2—4 Einheiten der fünften Stelle.

In dieser Beziehung unterscheiden sich die assoziierten Alkohole von den normalen Flüssigkeiten, Äther und CS_2, nicht, nur das Wasser nimmt eine Ausnahmestellung ein.

Man darf also behaupten, daß mit steigendem Druck die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten sich dem einfachen Grenzgesetz nähert, daß die Isobaren der Flüssigkeiten gerade Linien werden; bei normalen Flüssigkeiten wird dieses Gebiet schon bei 1000 Atm. und bei Temperaturen 150° über ihren Schmelzkurven erreicht. Mit sinkender Temperatur verschiebt sich das Giltigkeitsgebiet zu kleineren Drucken, so daß für unterkühlte Flüssigkeiten wie auch die Erfahrung am Betol[1]) gezeigt hat, die Isobaren für $p = 1$ Atm. gerade Linien werden. Auch die assoziierten Flüssigkeiten fügen sich im allgemeinen dieser Regel, nur das Wasser bildet eine Ausnahme, da bekanntlich beim Schmelzpunkt des Wassers die $\frac{d_p v}{dT}$ Werte sich ganz abnorm verhalten.

1) Zeits. f. phys. Chem. Bd. 28, 1899, S. 31.

Die Gleichung der Isothermen und die Tatsache, daß die Isobaren bei höheren Drucken gerade Linien sind, genügen aber zur Festlegung der Volumenfläche nicht. Das wird erst durch folgende sich ebenfalls auf die Messungen von Amagat stützende Regel ermöglicht.

Es hat sich nämlich herausgestellt, daß bei Drucken über 1000 Atm. die gradlinigen Isobaren sämtlich nach einer Geraden hin verlaufen, welche parallel der T-Achse im Abstande $v_{p=\infty}$ von der T-Achse liegt, daß also für die Isobaren die Gleichung:

$$2)\qquad \frac{v_{T,p} - v_{p=\infty}}{T} = \frac{d_p v}{dT} = a_p$$

gilt.

Zur Prüfung dieser Gleichung wurden für je drei Temperaturen aus den Volumen von Amagat, $v_{T,p}$, und dem Grenzvolumen v_∞ der Tabelle 7 die Werte $\frac{v_{T,p} - v_\infty}{T}$ berechnet. Die den Werten $\frac{d_p v}{dT}$ entsprechenden Werte $\frac{\Delta v}{\Delta T}$ wurden für die in der Tabelle 3 angegebenen Temperaturintervalle ebenfalls aus den Volumen Amagats berechnet.

Der Mittelwert je zweier $\frac{v_p - v_\infty}{T}$-Werte bei demselben Druck sollte gleich sein der Ausdehnung $\frac{\Delta v}{\Delta T}$, die sich auf das Temperaturintervall der beiden $\frac{v_p - v_\infty}{T}$-Werte bezieht. Da die Δv-Werte sich von 200.10^{-4}—100.10^{-4} ändern, die Volumen Amagats aber mit einem Fehler von $\pm 6.10^{-4}$ behaftet sein können, so können die Fehler der Ausdehnungen $\frac{\Delta v}{\Delta T}$ bis auf 10% ihres Wertes wachsen. Nun ist aus der Tabelle 3 zu ersehn, daß von 1000 Atm. an die Differenzen der Werte $\frac{v_p - v_\infty}{T}$ und $\frac{\Delta v}{\Delta T}$ diese Fehlergrenze nicht überschreiten, man darf also behaupten, daß von 1000 Atm. an, die Gleichung 2) innerhalb der Fehlergrenzen die Ausdehnungen wiedergibt. Allerdings ist nicht zu leugnen, daß die Ausdehnungen bei Drucken von 1000 Atm. an durchweg etwas kleiner sind als die $\frac{v_p - v_\infty}{T}$-Werte, während man zu erwarten hätte, daß die $\frac{\Delta v}{\Delta T}$-Werte innerhalb der Versuchsfehler sowohl größer als auch

kleiner als die $\frac{v_p - v_\infty}{T}$-Werte sein sollten. Diese einseitige Abweichung weist darauf hin, daß die Werte des Grenzvolumens, $v_{p=\infty}$ etwas zu klein angenommen worden sind.

Tabelle 3.

Äther. $v_{p=\infty} = 0.6905$.

p	$\frac{v_p - v_\infty}{T} \cdot 10^5$			$\frac{\Delta v}{\Delta T} \cdot 10^5$	
	$t = 0^0.00$	$20^0.20$	$49^0.95$	$0^0.0—20^0.2$	$20^0.2—49^0.95$
1	113.4	116.5	—	162	—
1000	81.5	81.5	81.7	82	83
2000	65.2	64.8	64.5	60	61
3000	54.3	53.9	53.4	49	48

Äthylalkohol. $v_{p=\infty} = 0.7380$.

p	$\frac{v_p - v_\infty}{T} \cdot 10^5$			$\frac{\Delta v}{\Delta T} \cdot 10^5$	
	$t = 0^0.00$	$19^0.80$	$40^0.35$	$0^0.0—19^0.8$	$19^0.8—40^0.35$
1	96.0	96.7	97.8	107	113
1000	71.9	71.6	71.4	67	68
2000	57.6	57.4	57.2	55	55
3000	47.6	47.5	47.3	46	45

Methylalkohol. $v_{p=\infty} = 0.7255$.

p	$\frac{v_p - v_\infty}{T} \cdot 10^5$			$\frac{\Delta v}{\Delta T} \cdot 10^5$	
	$t = 0^0.00$	$23^0.85$	$39^0.05$	$0^0.0—23^0.8$	$23^0.8—39^0.0$
1	100.6	101.5	102.0	112	105
1000	75.8	75.6	75.5	73	69
2000	61.1	60.8	60.7	57	54
3000	50.7	50.4	50.3	47	46

Schwefelkohlenstoff. $v_{p=\infty} = 0.7246$.

p	$\frac{v_p - v_\infty}{T} \cdot 10^5$			$\frac{\Delta v}{\Delta T} \cdot 10^5$	
	$t = 0^0.00$	$19^0.35$	$49^0.15$	$0^0.0-19^0.35$	$19^0.3-49^0.1$
1	100.9	101.9	104.2	116	127
1000	79.5	79.3	79.3	76	80
2000	65.9	65.5	65.1	59	61
3000	55.8	55.3	54.9	50	51

Auch in anderer Weise kann das Gesetz 2) an der Erfahrung geprüft werden und zwar in der Art, daß man von einer Bestimmung des Grenzvolumens unabhängig wird. Schreibt man die Gleichung 2) für zwei Drucke p_1 und p_2 hin, so ergibt sich:

$$3)\qquad \frac{v_{p_1} - v_{p_2}}{T} = \left(\frac{d_p v}{dT}\right)_{p_1} - \left(\frac{d_p v}{dT}\right)_{p_2}$$

Es soll also die Differenz zweier Volumen bei verschiedenen Drucken, dividiert durch die ihnen entsprechende absolute Temperatur, gleich sein der Differenz der Ausdehnungen bei jenen Drucken, oder es soll für die Differentialquotienten die Gleichung:

$$4)\qquad \frac{d_T v}{dp} = T \frac{d^2 v}{dT\,dp}$$

gelten.

Rechnet man das Beobachtungsmaterial von Amagat für Druckintervalle von 500 zu 500 Atm. und für die von Amagat gegebenen Temperaturintervalle nach der Formel:

$$T = \frac{(v_{p_1} - v_{p_2})_{\frac{t_2+t_1}{2}}}{\frac{(v_{t_2} - v_{t_1})_{p_1}}{t_2 - t_1} - \frac{(v_{t_2} - v_{t_1})_{p_2}}{t_2 - t_1}}$$

durch, so erhält man die in der Tabelle 4 zusammengestellten Resultate. T gegeb. entspricht der Temperatur $\frac{t_1 + t_2}{2}$, T ber. ist aus der Formel abgeleitet, Tm sind die Mittel der für die verschiedenen Druckintervalle berechneten T-Werte.

So vorzüglich auch die Bestimmungen von Amagat sind, so können doch nur brauchbare Werte für die Ausdehnungen erhalten

werden, wenn man für die von Amagat gemessenen Temperaturintervalle die Mittel nimmt. Da die Summe der Differenzen T gegeb. T ber., dividiert durch die Anzahl der Fälle den geringen Betrag von $-\frac{35^0}{8}$, also die Abweichung von -4^0 ergibt, so darf man wohl behaupten, daß die Gleichungen 3) oder 4) durch die vorliegende Erfahrung bestätigt werden.

Tabelle 4.

	Druckintervall	T ber.	Tm	T gegeb.	Δ
Äther	2000—3000 2000—2500 2500—3000	340 252 294	295	298	+ 3
Äthylalkohol	2000—2500 2500—3000	351 306	328	293	—35
Äthylchlorid	1500—2000 2000—2500	242 279		278 295	+21
Äthylbromid	1500—2000 2000—2500	308 284	296	299	+ 3
Äthyljodid	1500—2000 2000—2500 2500—3000	239 490 300	344	300	—44
Aceton	1500—2000 2000—2500	274 306	290	290	0
Phosphorchlorür	1500—2000 2000—2500 2500—3000	244 333 244	307	299	— 8
Schwefelkohlenstoff	1500—2000 2000—2500 2500—3000	208 307 292	270	295	+25

Durch die Gleichungen 1) und 2) sind die Volumenflächen der Flüssigkeiten bei Drucken, die größer sind als die einer gewissen pT-Linie, festgelegt. Dieses Stück der Volumenfläche kann mit Hilfe nur einer gegebenen Isotherme in folgender Weise konstruiert werden. Läßt man eine Gerade auf der gegebenen Isotherme und einer anderen Geraden gleiten, und zwar so, daß die sich bewegende Gerade bei ihrer Bewegung immer parallel der vT-Ebene bleibt, so erhält man das betreffende Stück der Volumenfläche.

Die andere Gerade liegt in der vp-Ebene bei der Temperatur $T = 0$ und verläuft im konstanten Abstande $v_{p=\infty}$ von der p-Achse.

Man kann ferner beweisen, wenn die Volumenfläche in der beschriebenen Weise entstanden ist, daß dann Ebenen, welche senkrecht zur v-Achse durch die Volumenfläche gelegt werden, diese in geraden Linien schneiden müssen. Wir wollen aber, bevor wir hierauf eingehn, prüfen, was man empirisch betreffs dieser Schnitte der Volumenfläche, der isometrischen Linien, festgestellt hat.

3. Die isometrischen Linien der Flüssigkeiten.

C. Barus[1]) hat sich auf Messung je einer isometrischen Linie für Äther, Alkohol, Thymol, Diphenylamin und Paratoluidin beschränkt, und gezeigt, daß beim Äther, Alkohol und Thymol die isometrischen Linien, welche von 17° und 30 Atm. zum Zustandspunkte bei etwa 220° und 1600 Atm. verlaufen, geradlinig sind, und das dasselbe auch für die isometrischen Linien des Diphenylamins und Paratoluidins die von 68° und 400 Atm. nach dem Zustandspunkte bei etwa 170° und 1200 Atm. verlaufen, gilt.

Amagat (loc. cit. S. 538) hat der Verallgemeinerung von Barus, daß die isometrischen Kurven von Flüssigkeiten auch bei höheren Drucken Gerade sind, nicht ganz beigestimmt, er meint, daß die isometrischen Linien vom geradlinigen Verlauf Abweichungen aufweisen, die etwas größer sind als die Versuchsfehler, und weist darauf hin, daß seine $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$-Werte beim Äther mit steigenden Temperaturen ein wenig ab- und beim Alkohol sehr wenig zunehmen. Untersucht man aber die Resultate von Amagat genauer, so findet man, daß die geringen Abweichungen vom geradlinigen Verlauf seiner isometrischen Linien durchweg die Versuchsfehler nicht überschreiten.

Amagat hat für Äther, Äthylalkohol, Methylalkohol und Schwefelkohlenstoff die Volumen bei mehr als zwei Temperaturen bis zu 3000 Atm. gemessen, und für Temperaturintervalle von 10 zu 10° die $\frac{dp}{dt}$-Werte bei konstantem Volumen angegeben. Diese Werte sind in der Tabelle 5 verzeichnet. Ferner sind für jedes konstante Volumen die Drucke für die tiefste und höchste Temperatur aus Amagats Volumenflächen ermittelt worden und aus diesen Werten die entsprechenden Quotienten $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ bei konstantem Volumen berechnet worden.

1) C. Barus, Phil. Mag. Ser. 5, Vol. 30, 1890, p. 338.

Tabelle 5.

Äthyläther. Amagat Tab. Nr. 61.

v konst.	p bei $t = 0^0$	p bei $t = 49^0.95$	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$	$\frac{dp}{dt}$ 0^0—$10^0.8$	$\frac{dp}{dt}$ $10^0.8$—$20^0.2$	$\frac{dp}{dt}$ $20^0.2$—$30^0.3$	$\frac{dp}{dt}$ $30^0.3$—$40^0.4$	$\frac{dp}{dt}$ $40^0.4$—$49^0.9$	$\frac{dp}{dt}$ Mittel	$\frac{dp}{dt} - \frac{dp}{dt}$ Mittel 0^0.—$10^0.8$	$10^0.8$—$20^0.2$	$20^0.2$—$30^0.3$	$30^0.3$—$40^0.4$	$40^0.4$—$49^0.9$
1.00	1	496	9.92	10.1	10.1	9.8	9.7	9.8	9.90	+0.2	+0.2	—0.1	—0.2	—0.1
0.98	155	689	10.69	10.8	10.7	10.8	10.5	10.5	10.66	+0.14	+0.04	+0.14	—0.16	—0.16
0.96	345	928	11.67	11.8	11.8	11.9	11.1	11.7	11.66	+0.14	+0.14	+0.24	—0.56	+0.04
0.94	586	1214	12.57	12.5	13.2	12.8	12.4	12.2	12.62	—0.12	+0.58	+0.18	—0.22	—0.42
0.92	880	1559	13.59	13.9	13.2	13.0	13.8	13.8	13.54	+0.36	—0.34	—0.54	+0.26	+0.26
0.90	1248	1974	14.53	14.6	14.4	14.5	14.6	14.8	14.58	+0.02	—0.18	—0.08	+0.02	+0.22
0.88	1698	2472	15.49	15.4	15.7	16.2	14.7	14.9	15.38	+0.02	+0.32	+0.82	—0.68	—0.48
0.86	2250	3097	16.95	17.6	17.0	16.3	16.9	16.8	16.92	+0.68	+0.08	—0.62	—0.02	—0.012

Äthylalkohol. Amagat Tab. Nr. 61.

v konst.	p bei $t = 0^0$	p bei $t = 40^0.35$	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$	$\frac{dp}{dt}$ 0^0—$9^0.6$	$\frac{dp}{dt}$ $9^0.6$—$18^0.9$	$\frac{dp}{dt}$ $18^0.9$ - $30^0.6$	$\frac{dp}{dt}$ $30^0.6$—$40^0.3$	$\frac{dp}{dt}$ Mittel	$\frac{dp}{dt} - \frac{dp}{dt}$ Mittel 0^0—$9^0.6$	$9^0.6$—$18^0.9$	$18^0.9$—$30^0.6$	$30^0.6$—$40^0.3$
1.000	1	442	10.93	11.1	10.4	10.7	11.3	10.87	+0.23	—0.47	—0.17	+0.43
0.985	172	631	11.38	11.4	11.1	11.5	11.5	11.37	+0.03	—0.27	+0.13	+0.13
0.970	373	858	12.02	11.6	12.2	12.2	12.2	12.05	—0.45	+0.15	+0.15	+0.15
0.955	610	1120	12.64	12.6	13.0	12.9	13.0	12.88	—0.28	+0.12	+0.02	+0.12
0.940	886	1438	13.68	13.3	13.4	13.6	13.1	13.35	—0.05	+0.05	+0.25	—0.25
0.920	1317	1930	15.19	15.8	15.3	14.8	15.0	15.22	+0.58	+0.08	—0.42	—0.22
0.910	1579	2209	15.61	15.6	15.7	15.8	15.3	15.60	0.00	+0.40	+0.20	—0.30
0.890	2177	2864	17.27	17.2	16.8	16.8	17.6	17.10	+0.10	—0.30	—0.30	+0.50

Methylalkohol. Amagat Tab. No. 62.

v konst.	p bei $t = 0^0$	p bei $t = 39^0.05$	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$	$\frac{dp}{dt}$ 0^0—$9^0.2$	$\frac{dp}{dt}$ $9^0.2$—$23^0.8$	$\frac{dp}{dt}$ $23^0.8$—$39^0.1$	$\frac{dp}{dt}$ Mittel	$\frac{dp}{dt} - \frac{dp}{dt}$ Mittel 0^0—$9^0.2$	$9^0.2$—$23^0.8$	$23^0.8$—$39^0.1$
1.00	1	427	10.91	11.2	10.9	10.9	11.00	+0.20	—0.10	—0.10
0.98	266	747	12.32	12.3	12.2	12.0	12.16	+0.14	+0.04	—0.16
0.96	506	1018	13.11	13.3	13.0	13.2	13.16	+0.14	—0.16	+0.04
0.94	854	1404	14.08	14.6	14.1	14.0	14.23	+0.37	—0.13	—0.23
0.92	1273	1867	15.21	15.0	15.4	15.5	15.30	—0.30	+0.10	+0.20
0.90	1775	2419	16.49	16.9	16.5	16.2	16.53	+0.37	—0.03	—0.33
0.88	2397	3096	17.90	17.6	17.7		17.65	—0.05	+0.05	

Schwefelkohlenstoff. Amagat Tab. Nr. 62.

v konst.	p bei $t = 0^0$	p bei $t = 49^0.15$	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$	$\frac{dp}{dt}$ 0^0—$9^0.1$	$\frac{dp}{dt}$ $9^0.1$—$19^0.3$	$\frac{dp}{dt}$ $19^0.3$—$29^0.9$	$\frac{dp}{dt}$ $29^0.9$—$41^0.2$	$\frac{dp}{dt}$ $41^0.2$—$49^0.8$	$\frac{dp}{dt}$ Mittel	$\frac{dp}{dt} - \frac{dp}{dt}$ Mittel 0^0—$9^0.1$	$9^0.1$—$19^0.3$	$19^0.3$—$29^0.9$	$29^0.9$—$41^0.2$	$41^0.2$—$49^0.1$
0.99	134	830	14.16	14.2	14.1	14.6	14.1	13.9	14.18	+0.02	—0.08	+0.42	—0.08	—0.28
0.97	451	1192	15.08	14.5	15.4	15.3	15.2	15.2	15.12	—0.62	+0.28	+0.18	+0.08	+0.08
0.95	824	1617	16.13	15.7	16.3	16.2	16.3	16.0	16.10	—0.40	+0.20	+0.10	+0.20	—0.10
0.93	1278	2116	17.09	16.8	17.2	17.4	16.5	17.2	17.02	—0.22	+0.18	+0.38	—0.52	+0.18
0.91	1833	2709	17.82	18.3	17.8	17.9	17.7	17.2	17.78	+0.52	+0.02	+0.12	—0.08	—0.58

Diese Quotienten stimmen mit den Mitteln der von Amagat angegebenen $\frac{dp}{dt}$-Werte naturgemäß sehr viel besser überein als die $\frac{dp}{dt}$-Werte unter einander. Nun ist aus den Differenzen $\frac{dp}{dt} - \frac{dp}{dt}$-Mittel zu ersehen, daß ein regelmäßiger Gang dieser Differenzen im allgemeinen nicht zu konstatieren ist, und daß außerdem diese Differenzen erheblich größer sind als die Differenzen der Werte $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ und der Mittel aus den Werten $\frac{dp}{dt}$ von Amagat.

Man darf also auf Grund dieser Zusammenstellung behaupten, daß innerhalb der geringen Fehlergrenzen von etwa ± 3 Atm. und ± 0°.05 die isometrischen Linien auch bei hohem Drucke geradlinig verlaufen.

Wie aus der Tab. 5 ersichtlich, bleibt das Gesetz der geraden isometrischen Linien für Flüssigkeiten bei erheblich kleineren Drucken gültig als die Gesetze der Gleichungen 1) und 2).

Bei kleineren Drucken liegen, wie wir sahen, die wirklichen Volumenflächen über den durch die Gleichungen 1) und 2) bestimmten Volumenflächen. Da die isometrischen Linien auch in dem Gebiete kleinerer Drucke gerade Linien sind, so muß für die Abweichungen der wirklichen Volumenflächen Δv bei kleineren Drucken die Beziehung

$$\frac{\frac{\Delta v}{\Delta T}}{\frac{\Delta v}{\Delta p}} = -\left(\frac{\Delta p}{\Delta T}\right)_v$$

gelten.

Eine genauere Begrenzung des Gebietes, für welches die isometrischen Linien gerade sind, läßt sich wohl zur Zeit nicht durchführen. Dieses Gesetz gilt aber sowohl für sehr große Volumen als auch für solche, die sich dem Grenzvolumen bei $p = \infty$ nähern. Für das Zwischengebiet sind auch bei sonst normalen Stoffen, wie für das Isopentan durch S. Young[1]), Abweichungen vom geradlinigen Verlauf der isometrischen Linien für größere Temperaturintervalle festgestellt worden.

Jedenfalls ist direkt an der Erfahrung gezeigt worden, daß

---

1) S. Young Proc. Phys. Soc. L. 1894/1895 p. 602.

bei höheren Drucken im Gebiet, in dem die Gleichungen 1) und 2) gelten, die isometrischen Linien Gerade sind, daß also die Abhängigkeit des Druckes von der Temperatur bei konstantem Volumen durch die Gleichung

5) $$p_2 - p_1 = B(T_2 - T_1)$$

dargestellt werden kann, oder daß der Quotient $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ für ein gegebenes Volumen einen konstanten Wert hat, der gleich der Konstante B ist. Die vorliegenden Messungen, und hier handelt es sich hauptsächlich um die von Amagat, lassen dieses Ergebnis als gesichert erscheinen.

Die Konstanten der Volumenfläche.

An der Erfahrung konnte gezeigt werden, daß die drei Hauptschnitte durch die Volumenflächen der Flüssigkeiten, ausgenommen die des Wassers, durch Gleichungen folgender Form dargestellt werden.

Für die Isothermen gilt:

a) $$(v - v_{p=\infty})(K + p) = AK,$$

für die Isobaren gilt:

b) $$(v - v_{p=\infty}) = \left(\frac{dv}{dT}\right)_p \cdot T = a_p T,$$

und für die isometrischen Linien gilt die Gleichung:

c) $$p = \left(\frac{dp}{dT}\right)_v (T - T_{p=0}) = B(T - T_{p=0}).$$

Die Schnittkurven der Volumenfläche mit Ebenen parallel der vp-Ebene sind also gleichschenklige Hyperbeln, deren Asymptoten parallel der v- und p-Achse verlaufen und durch die Gleichungen $p = -K$ und $v = v_{p=\infty}$ bestimmt wurden. Die Schnittlinien der Volumenfläche mit Ebenen parallel der vT-Ebene, die Isobaren, und die Schnittlinien mit Ebenen parallel der pT-Ebene, die isometrischen Linien, sind Gerade. Eine solche Fläche nennt man ein hyperbolisches Paraboloid. Diese Fläche kann man sich in dreifacher Weise entstanden denken: 1) durch Gleiten einer Geraden c, Fig. 1, auf einer gleichschenkligen Hyperbel und einer Geraden f im Abstande $v_{p=\infty}$ parallel der p-Achse in den vp-Ebene, wobei die Gerade während ihres Gleitens parallel der vT-Ebene verbleibt, 2) durch Gleiten einer Geraden b, auf der festliegende Geraden c und einer

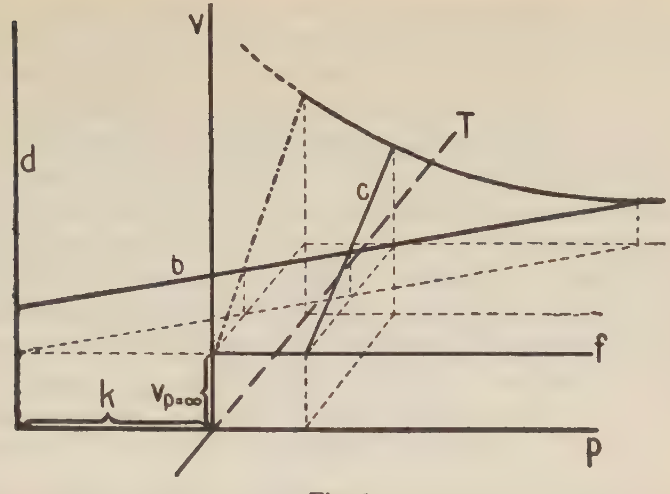


Fig. 1

im Abstande K parallel der v-Achse in der pv-Ebene verlaufenden Geraden d; die Gerade b verbleibt also während ihrer Bewegung parallel der pT-Ebene, und erzeugt die isometrischen Linien; 3) kann man sich auch die isometrische Gerade b festliegend denken und die Gerade c, welche die Gerade b und die Gerade f berührt, gleiten lassen in der Weise, daß die Gerade c beständig parallel der vT-Ebene verläuft.

Die auf diesen drei Wegen entstandenen Flächen sind miteinander identisch.

Die Gleichung der Volumenfläche selbst ist:

6) $$(v - v_{p=\infty})(K+p) = CT,$$

da sich aus dieser Gleichung die der drei Hauptschnitte ergeben.

Auf die Bedeutung der drei Konstanten: $v_{p=\infty}$, C und K haben wir im folgenden näher einzugehn und zu zeigen, daß diese Konstanten vom Druck und der Temperatur für die untersuchten Flüssigkeiten unabhängig sind, daß sie also sich nur mit der Natur der Flüssigkeiten ändern.

Die Konstante $v_{p=\infty}$, das Grenzvolumen der Flüssigkeiten bei unendlich hohem Druck, muß schon deshalb als unabhängig von der Temperatur betrachtet werden, weil die vorliegende Erfahrung nicht zuläßt, auf ein Ansteigen von $v_{p=\infty}$ mit der Temperatur zu schließen. Die Gleichung der Volumenfläche verlangt aber ferner daß auch die Gleichung:

$$v_{p=\infty} = v_{T=0}$$

gilt. Diese Bezeichnung würde aber zur Folge haben, daß ein isotroper Körper bei $T = 0$ inkompressibel sein müßte. Mit dieser Folgerung ist aber die aus Amagats Versuchsergebnissen abgeleitete Tatsache, daß die den inneren Druck bedeutende Konstante K von der Temperatur unabhängig ist, nicht zu vereinigen. Denn wenn der isotrope Stoff bei $T = 0$ inkompressibel wäre, so müßte K mit abnehmender Temperatur wachsen und bei $T = 0$ müßte K unendlich groß werden. Daher und auch aus anderen Gründen, auf die wir später einzugehen haben, ist es notwendig, daß bei sehr tiefen Temperaturen die reale Volumenfläche etwas über der durch die Gleichung 6) bestimmte Volumenfläche liegt.

Für die Konstante C gilt die Beziehung

$$7)\qquad C = K\frac{A}{T},$$

da A aber proportional der Temperatur wächst, so ist C unabhängig von der Temperatur.

A ist das freie Volumen $v_{p=0} - v_{p=\infty}$ beim Drucke $p = 0$. Hierzu ist zu bemerken, daß bei kleinen Drucken die Beziehungen:

$$8)\qquad \left(\frac{dv}{dT}\right)_{p=0} = \frac{A}{T} = a_{p=0}$$

wenn unter $\left(\frac{dv}{dT}\right)_{p=0}$ die reale Ausdehnung der Flüssigkeit verstanden wird, nicht mehr zu gelten brauchen. Die Konstante A hat dann keine reale Bedeutung, sie gibt dann nur das Volumen der Flüssigkeit für den Fall an, daß sich dasselbe bei kleinen Drucken so ändern würde, wie es bei höheren Drucken wirklich, nämlich entsprechend der Gleichung 6), zutrifft. Es scheint, daß bei Temperaturen unterhalb des Schmelzpunktes die Beziehung 8) auch beim Druck $p = 0$ gilt, und daß der wirkliche Wert von $\left(\frac{dv}{dT}\right)_{p=0}$ um so mehr von dem durch die Gleichung 8) geforderten abweicht, je weiter sich die Temperatur der Flüssigkeit von der ihres Schmelzpunktes entfernt.

Für die Wärmeausdehnungen bei verschiedenen Drucken gilt die Gleichung:

$$9)\qquad \left(\frac{dv}{dT}\right)_{p} = a_p = a_{p=0}\,\frac{K}{K+p}.$$

Diese Gleichung kann leicht aus den Gleichungen 6) und b) abgeleitet werden. Betreffs der Realität dieser Beziehung gilt das über die Gleichung 8) gesagte.

Aus der Entstehung der Volumenfläche folgt, daß die Konstante K unabhängig von der Temperatur ist. Hierauf haben wir näher einzugehen.

Wie wir im § 1 gesehen haben, ist die Ermittelung von K aus den Isothermen nicht ohne Willkür auszuführen, und da der Wert von K von Einfluß auf die beiden anderen Konstanten A und $v_{p=\infty}$ ist, so ist für die Frage nach der Gestalt der Volumenfläche eine Methode zur Ermittelung von K, welche frei von jeder Willkür ist, von grundlegender Bedeutung. Die Aufgabe der willkürfreien Ermittelung von K wird durch eine Beziehung von K zur Konstanten B der isometrischen Geraden gelöst. Diese Beziehung ergibt sich auf folgendem Wege.

Aus der Gleichung der Volumenfläche 6) ergibt sich die Beziehung von p zu T bei konstantem Volumen zu

$$p = \left(\frac{C}{v_p - v_{p=\infty}}\right)_{v=\text{konst.}} \cdot T - K.$$

Anderseits gilt für die isometrischen Linien die Gleichung:

$$p = BT - BT_{p=0}.$$

Sollen die isometrischen Linien auf der Volumenfläche Gerade sein und soll außerdem die Gleichung der Volumenfläche bestehen, so müssen beide Gleichungen gelten. Das kann aber nur dann der Fall sein, wenn in den beiden Gleichungen die von T freien Glieder und die Koeffizienten von T einander gleich sind.

Es folgen also die Gleichungen:

10) $$B \,.\, T_{p=0} = K$$

und

11) $$B = \frac{C}{v_p - v_{p=\infty}}.$$

Die geometrische Deutung der Gleichung 10) ist sofort zu übersehn, wenn man in sie für B den Wert $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ einsetzt, man erhält dann:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = \frac{K}{T_{p=0}}.$$

Mittelst der Gleichung 10) läßt sich aus der Richtung der Projektion der isometrischen Geraden auf die pT-Ebene, aus dem Werte $B = \left(\frac{dp}{dT}\right)_v$, und der Temperatur, bei der die Projektion

der isometrischen Linie auf der pT-Ebene die T-Achse schneidet, die Konstante K frei von jeder Willkür berechnen.

Aus den Gleichungen 10) und 11) erhält man ferner für die isometrischen Geraden nach Eliminierung von B eine Gleichung von geometrisch anschaulicher Bedeutung.

Führt man für C den Wert $K\frac{A}{T}$ und für $v - v_{p=\infty}$ den Wert $\frac{AK}{K+p}$ in die Gleichung 11) ein, so erhält man:

$$B = \frac{K+p}{T},$$

und setzt man diesen Wert von B in die Gleichung 10) ein, so ergibt sich:

12) $$\frac{T}{T_{p=0}} = \frac{K+p}{K}.$$

Interpretiert man diese Beziehung geometrisch, so ersieht man, daß die Projektionen der isometrischen Geraden auf die pT-Ebene sich alle in einem Punkte D Fig. 2, welcher auf der nach negativen p-Werten hin verlängerten p-Achse im Abstande K von $p = 0$ liegt, schneiden müssen.

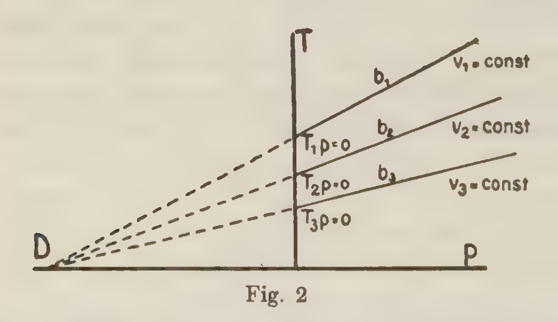


Fig. 2

Um das einzusehn, denken wir uns die Volumenfläche nach dem zweiten Verfahren erzeugt.

Da die isometrischen Geraden durch die Bewegung einer Geraden, welche die Geraden d und c berührt, Fig. 1, erzeugt werden und die Gerade d senkrecht zur p-Achse steht und im Abstande K parallel der v-Achse verläuft, so müssen die Projektionen der isometrischen Geraden die p-Achse in ein und demselben Punkte D, dessen Abstand vom Punkte $p = 0$ gleich K ist, schneiden.

Mit abnehmendem konstantem Volumen nehmen die $T_{p=0}$-Werte, der Schnittpunkte der Geraden b_1, b_2 etc. mit der T-Achse

ab, und die Werte $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ wachsen. Wird schließlich das Volumen gleich dem Grenzvolumen bei $T = 0$, so würde die Projektion der isometrischen Geraden mit der p-Achse zusammenfallen, da für unsere Volumenfläche $v_{T=0} = v_{p=\infty}$ ist.

Dieses Resultat kann mit der allgemein geltenden Formel:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_v = -\frac{\frac{d_p v}{dT}}{\frac{d_T v}{dp}}$$

nur dann in Einklang gebracht werden, wenn man annimmt, daß bei $T = 0$ $\frac{d_T v}{dp} = 0$ ist, und daß bei $T = 0$ $\frac{d_p v}{dp}$ einen endlichen Wert hat.

Der Inkompressibilität amorpher Stoffe bei $T = 0$ würden die für unsere Volumenfläche geltenden Gleichungen entsprechen.

Nun lehren aber die Messungen von Herrn Dr. F. Körber, daß der Extrapolation nach zu urteilen, $v_{T=0} > v_{p=\infty}$ ist, daß also auch bei $T = 0$ die amorphen Stoffe nicht inkompressibel sind. Die wirklichen Volumenflächen müssen also bei sehr tiefen Temperaturen für kleine Drucke über unserer Volumerfläche liegen.

Wenn $\frac{d_p v}{dT}$ bei $T = 0$ Null werden sollte, dann würde, da $\frac{d_p v}{dp}$ bei $T = 0$ den Messungen von Herrn Dr. F. Körber nach zu urteilen einen endlichen Wert hat, $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{v_{T=0}} = 0$. Dann aber müßte, da $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ mit abnehmendem Volumen zunimmt und be $v_{T=0}$ den Nullwert annehmen sollte, $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ ein Maximum für einen Wert von $v_{p=0}$, der einer sehr tiefen Temperatur entspricht, haben. Aus der direkten Erfahrung ist aber eine solche Abhängigkeit von $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ von $v_{p=0}$ respektive $T_{p=0}$ nicht zu schließen. Eine Zunahme von $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ mit abnehmendem Volumen bis zu $T = 0$ wäre nur dann möglich, wenn $\frac{d_p v}{dT}$ bei $T = 0$ noch einen endlichen Wert besitzen würde.

Zusammenfassend darf man wohl behaupten, daß bei sehr tiefen Temperaturen die wirkliche Volumenfläche über unserer Volumenfläche liegt, daß aber aus der direkten Erfahrung zurzeit noch keinerlei Hinweise auf die Werte der Quotienten $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ und $\frac{d_p v}{dT}$ bei $T = 0$ abzuleiten sind.

Wir wenden uns nun zur Prüfung der Gleichung 10) an der Erfahrung. Sollte die Beziehung $B \,.\, T_{p=0} = K$, was ja zu erwarten ist, gelten, so ist die Möglichkeit gegeben, K aus zwei Punkten der Volumenfläche gleichen Volumens, die in das Gebiet der Giltigkeit unserer Volumenformel fallen, ohne jede Willkür zu ermitteln. Ist dann ferner für eine der Isothermen, die durch einen der beiden Punkte geht, noch ein zweiter Punkt bekannt, so kann mit Hilfe zweier Punkte einer Isotherme zuerst $v_{p=\infty}$ und dann auch A berechnet werden. Damit sind dann alle Konstanten der Gleichung der Volumenfläche bestimmt und auch die der drei Hauptschnittkurven sind auf Grund der gegenseitigen Beziehungen der Konstanten untereinander leicht anzugeben. Es würde schließlich nur darauf ankommen, das Zustandsfeld, für welches unsere Volumenfläche gilt, genauer zu begrenzen.

Im folgenden beschränken wir uns auf die von Amagat eingehender untersuchten vier Flüssigkeiten: Äther, Äthyl- und Methylalkohol und Schwefelkohlenstoff, da das sich abnorm verhaltende Wasser hier nicht in Frage kommt und für die anderen Flüssigkeiten Amagat eine nicht genügende Anzahl von Isothermen festgelegt hat, um die $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$-Werte mit einer für die Prüfung genügenden Genauigkeit zu ermitteln.

In der Tabelle 6 sind für die genannten vier Flüssigkeiten die Werte des konstanten Volumens, auf die sich die Werte $B = \left(\frac{dp}{dT}\right)$ beziehen, zusammengestellt, diese Werte sind die Mittel aus den von Amagat angegebenen $\frac{dp}{dt}$-Werten der Tab. 5.

Die Isobaren des Druckes $p = 1$ Atm. der vier Flüssigkeiten sind von Herrn Dr. F. Körber von 0° bis etwa $-140°$ bestimmt worden. Aus diesen Messungen wurden die Temperaturen interpoliert, bei denen die Flüssigkeiten das konstante Volumen v beim Druck $p = 1$ Atm. erfüllen. Die Produkte: $B \,.\, T_{p=1} = K + 1$ sollten vom Volumen unabhängig sein, was in der Tat im Allgemeinen zutrifft.

Tabelle 6.

Äthyläther.

v	1.00	0.98	0.96	0.94	0.92	0.90	0.88	0.86
$T_{p=1}$	273	258.8	244.2	228.8	212.6	195.6	177.5	158.4
B	9.90	10.66	11.66	12.62	13.54	14.58	15.38	16.92
$B \cdot T_{p=1}$	2703	2759	2847	2887	2879	2852	2730	2680

Äthylalkohol.

v	1.000	0.985	0.970	0.955	0.940	0.920	0.910	0.890
$T_{p=1}$	273	257.8	242.7	227.2	211.5	190.3	179.5	157.6
B	10.87	11.37	12.05	12.88	13.35	15.22	15.60	17.10
$B \cdot T_{p=1}$	2967	2930	2925	2926	2823	2896	2800	2695

Methylalkohol.

v	1.00	0.98	0.96	0.94	0.92	0.90	0.88
$T_{p=1}$	273	254.9	236.5	217.9	198.9	179.5	160.1
B	11.00	12.16	13.16	14.23	15.30	16.53	17.65
$B \cdot T_{p=1}$	3003	3100	3112	3030	3043	2967	2826

Schwefelkohlenstoff.

v	0.99	0.97	0.95	0.93	0.91	0.89
$T_{p=1}$	263.6	244.4	224.7	204.2	183.0	161.0
B	14.18	15.12	16.10	17.02	17.78	19.65
$B \cdot T_{p=1}$	3738	3695	3639	3476	3254	3164

Man sieht, daß diese Produkte beim Äther mit abnehmendem Volumen ein wenig zunehmen und dann abnehmen. Das Mittel der Abweichungen vom Mittel (2793) beträgt 73 oder 2.5 Prozent. Beim Äthylalkohol schwanken die Produkte $B \cdot T_{p=1}$ vom Volumen 1.0—0.92 um das Mittel 2912 und nehmen dann mit abnehmendem Volumen deutlich ab. Das Mittel der Differenzen gegen den Mittelwert beträgt hier 34 oder 1.2 Prozent. Beim Methylalkohol findet man ganz Analoges. Das Mittel aus den Produkten bis $v = 0.9$ beträgt 3051 und die mittlere Differenz 37 oder 1.2 Prozent. Beim Schwefelkohlenstoff ist wiederum eine schwache Abnahme der Produkte mit abnehmendem Volumen zu konstatieren. Das Mittel der ersten drei Produkte beträgt 3692, die mittlere Differenz 34 oder 0.9 %.

Die regelmäßig bei sehr kleinen Werten von $T_{p=1}$ auftretende Abnahme des Produktes $B \cdot T_{p=1}$ ist wahrscheinlich dadurch

bedingt, daß die B-Werte mit abnehmendem $T_{p=1}$ nicht so schnell wachsen, wie es der umgekehrten Proportionalität beider Werte nach zu erwarten wäre. Man hat also auch hier wieder ein Anzeichen dafür, daß die wahre Volumenfläche bei sehr tiefen Temperaturen von der der Gleichung 6) abweicht.

Jedenfalls ist, wenn man bedenkt, daß ein kleiner Fehler in der Volumenbestimmung zu erheblichen Fehlern von B und $T_{p=1}$ führt, die Beziehung $B \cdot T_{p=1} = K + 1$ innerhalb recht weiter Grenzen des Volumens durch die Erfahrung gestützt. Wir können jetzt mit Hilfe der Konstanten K und der von Amagat festgelegten Isothermen bei 0° die Volumen der Flüssigkeiten berechnen, und durch den Vergleich der beobachteten und berechneten Volumen uns am unmittelbarsten vom Anschluß der wirklichen Volumenfläche an die der Gleichung 6) überzeugen.

In der Tab. 7 findet man die Mittel der aus der Tab. 6 entnommenen Konstanten K. Mit diesen und den Volumen bei 0° für 1000, 2000 und 3000 Atm. wurden zwei Werte der Konstanten $v_{p=\infty}$ aus der Formel

$$\frac{v_2(K+p_2) - v_1(K+p_1)}{p_2 - p_1} = v_{p=\infty}$$

berechnet. Das Mittel dieser beiden $v_{p=\infty}$-Werte findet man in der Tab. 7. Aus der Formel $A = (v_p - v_{p=\infty})\frac{K}{K+p}$ wurden dann für 1000, 2000 und 3000 Atm. drei A-Werte für 0° ermittelt. Die Mittel dieser Werte sind wieder in der Tabelle 7 zu finden. Für die anderen Temperaturen wurden die A-Werte nach der Proportion $A_{t=0} : A_t = 273 : 273 + t^0$ aus dem A-Wert für $t = 0°$ ermittelt, und schließlich nach der Gleichung $v = v_{p=\infty} + \frac{AK}{K+p}$ die Volumen für die Drucke p der Tabelle 7 berechnet. Die Differenzen: Volumen beobachtet von Amagat minus berechnetem Volumen sind in den Spalten $\Delta v \cdot 10^4$ tabelliert worden.

Man ersieht, daß die berechneten v-Werte für den Druck $p = 1$ fast durchweg kleiner sind als die beobachteten Volumen, ferner ersieht man, daß diese Abweichungen mit wachsender Temperatur erheblich zunehmen und daß sie sich von 20° an auch bei 500 Atm. geltend zu machen beginnen. Die wahre Volumenfläche überlagert also bei kleinen Drucken die berechnete Volumenfläche, und zwar über einen Streifen der pT-Ebene, der mit wachsender Temperatur allmählich breiter wird. Bei Drucken, die größer sind als die pT-Kurve, welche diesen Streifen begrenzt, übersteigen aber

die Differenzen der beobachteten und berechneten Volumen wahrscheinlich nicht die Fehlergrenzen Amagats. Leider hat Amagat über die Größe seiner Fehler sich nicht geäußert, auch hat er direkte Beobachtungen wahrscheinlich nicht angegeben. Daher muß man bei der Schätzung der Fehler Amagats auf eigene Erfahrungen zurückgreifen. Bei solchen Bestimmungen ist nur bei großer Sorgfalt die Vermeidung von Fehlern über ± 3 Atm. und $\pm 0.1^\circ$ möglich, diesen Fehlern entsprechen Fehler des Volumens von 0.0003—0.0006. Aus den Tabellen von Amagat ist aber ersichtlich, daß die Differenzen der Volumen bei verschiedenen Drucken und Temperaturen sich in einer Weise ändern, welche es wahrscheinlich macht, daß der mittlere Fehler des Volumens den geschätzten ein wenig übersteigt.

Tabelle 7.

Äthylalkohol $K = 2911$ $v_{p=\infty} = 0.7380$.

p in Atm.	Isotherme bei 0°.0 $A = 0.2644$	$\Delta v \cdot 10^4$	Isotherme bei 19°.80 $A = 0.2836$	$\Delta v \cdot 10^4$	Isotherme bei 40°.35 $A = 0.3035$	$\Delta v \cdot 10^4$
1	1.0000	—23	1.0213	— 2	1.0446	+32
500	0.9616	—20	0.9775	—25	0.9950	—20
1000	0.9344	— 4	0.9477	—14	0.9618	—21
1500	0.9130	+ 5	0.9250	— 1	0.9372	— 6
2000	0.8954	+ 7	0.9062	+ 1	0.9174	— 5
2500	0.8806	+ 4	0.8904	— 1	0.9006	— 7
3000	0.8679	— 3	0.8771	— 2	0.8863	—12
		5		4		10

Methylalkohol. $K = 3050$ $v_{p=\infty} = 0.7255$.

p in Atm.	Isotherme bei 0°.0 $A = 0.2752$	$\Delta v \cdot 10^4$	Isotherme bei 23.85 $A = 0.2922$	$\Delta v \cdot 10^4$	Isotherme bei 39.05 $A = 0.3146$	$\Delta v \cdot 10^4$
1	1.0000	— 6	1.0268	+22	1.0438	+38
500	0.9604	—15	0.9813	—13	0.9943	—15
1000	0.9324	— 3	0.9499	—10	0.9610	—14
1500	0.9105	+ 5	0.9257	— 4	0.9356	— 8
2000	0.8923	+ 6	0.9060	— 2	0.9148	— 7
2500	0.8769	+ 2	0.8893	— 6	0.8974	—10
3000	0.8640	— 2	0.8752	—12	0.8827	—14
		4		7		10

Schwefelkohlenstoff. $K = 3691$ $v_{p=\infty} = 0.7246$.

p in Atm.	Isotherme bei 0°.0 A = 0.2764	$\Delta v . 10^4$	Isotherme bei 19°.35 A = 0.2960	$\Delta v . 10^4$	Isotherme bei 41.25° A = 0.3182	$\Delta v . 10^4$	Isotherme bei 49.15 A = 0.3262	$\Delta v . 10^4$
1	1.0000	— 9	1.0225	+20	1.0500	+73	1.0605	+172
500	0.9672	— 8	0.9840	+ 7	1.0050	+ 2		
1000	0.9417	— 4	0.9564	—11	0.9738	—11	0.9802	+ 48
1500	0.9215	+ 4	0.9343	— 8	0.9495	—13	0.9551	+ 41
2000	0.9046	+ 7	0.9160	— 6	0.9293	—16	0.9343	+ 30
2500	0.8897	+ 3	0.9003	— 8	0.9122	—21	0.9167	+ 21
3000	0.8768	— 3	0.8864	—19	0.8977	—24	0.9015	+ 11
		4		10		15		50

Äthyläther. $K = 2792$ $v_{p=\infty} = 0.6905$.

p in Atm.	Isotherme bei 0°.0 A = 0.3033		Isotherme bei 10°.80 A = 0.3153		Isotherme bei 20°.20 A = 0 3257		Isotherme bei 30°.35 A = 0.3372		Isotherme bei 40°.45 A = 0.3482		Isotherme bei 49°.95 A = 0.3588	
	v Amagat	$\Delta v . 10^4$	v Amagat	$\Delta v . 10^4$	v Amagat	$\Delta v . 10^4$	v Amagat	$\Delta v . 10^4$	v Amagat	$\Delta v . 10^4$	v Amagat	$\Delta v . 10^4$
1	1.0000	+63	1.0166	+109	1.0320	+159	1.0495	+219	1.0680	+294		
500	0.9465	—12	0.9575	— 4	0.9674	+ 6	0.9782	+ 17	0.9889	+ 31	0.9995	+47
1000	0.9130	— 8	0.9219	— 7	0.9295	— 8	0.9380	— 8	0.9465	— 4	0.9545	— 2
1500	0.8885	+ 7	0.8956	0	0.9020	— 4	0.9089	— 9	0.9160	— 10	0.9231	— 8
2000	0.8684	+12	0.8750	+ 8	0.8805	— 7	0 8870	+ 1	0.8928	— 6	0.8988	— 7
2500	0.8522	+17	0.8580	+ 11	0.8631	+ 7	0.8686	+ 2	0.8740	— 2	0.8790	— 8
3000	0.8387	— 5	0.8439	— 11	0.8485	+ 10	0.8530	0	0.8578	— 6	0.8629	— 6
		6		7		7		4		5		6

Da nun das Mittel aus den Abweichungen beim Äther, ausgenommen die beim Druck $p = 1$ und die bei 500 Atm. für die Temperaturen 30, 40 und 50°, 0.0006 beträgt, so darf man wohl behaupten, daß die Differenzen zwischen gefundenen und berechneten Volumen noch innerhalb der Fehlergrenzen von Amagat liegen. Daß die berechneten Volumen bei 40 und 50° auch über 500 Atm. durchweg etwas größer sind als die Amagatschen Volumen, könnte seinen Grund darin haben, daß die von Amagat für diese Isothermen angegebenen Temperaturen um etwa 0.5° zu tief sind.

Beim Äthyl- und Methylalkohol sind die Differenzen bei kleinen Drucken kleiner als beim Äther und Schwefelkohlenstoff. Das Mittel der Differenzen für die beiden Alkohole beträgt 0.0006 respektive 0.0007 und liegt wohl in den Grenzen der Beobachtungsfehler. Beim CS_2 sind die großen Differenzen bei 41 nnd 49° zum Teil jedenfalls größeren Beobachtungsfehlern zuzuschreiben, denn bei 41° sind die beobachteten Volumen kleiner als die herechneten und bei 49° gilt die umgekehrte Beziehung.

Zusammenfassend darf man wohl behaupten, daß die Abweichungen bei höheren Drucken zwischen den beobachteten und den berechneten Volumenflächen, auf kaum zu verkleinernde Beobachtungsfehler zurückzuführen sind.

Es kommt schließlich darauf an, das Gebiet der pT-Ebene, in dem Gleichung 6) die wirklichen Volumenflächen wiedergibt, etwas genauer zu begrenzen. Dieses Gebiet liegt zwischen zwei pT-Kurven, von denen die eine wahrscheinlich durch die Gleichung:

$$T_0 = T_s + 50° + 0.1° p,$$

in der T_s die Temperatur des Schmelzpunktes bedeutet, allgemein dargestellt wird. Die untere Grenzkurve scheint bei $T = 200°$ die T-Achse zu schneiden und fällt wahrscheinlich mit steigendem Druck zu tieferen Temperaturen. In Fig. 3 sind für Äther die beiden Kurven T_0 und T_u angedeutet und ebenso die Schmelzkurve, T_s, von der entsprechend den Erfahrungen für viele Stoffe angenommen ist, daß ihr Maximum bei etwa 15000 Atm. und bei einer Temperatur von etwa 100° über der Temperatur des Schmelzpunktes bei $p = 0$ liegt. Man ersieht, daß der größte Teil der Schmelzkurve in dem Gebiete verläuft, für welches unsere Volumenfläche die wirkliche Volumenfläche wiedergibt. Durch diese Tatsache gewinnt unsere Volumenfläche eine besondere Bedeutung für die Behandlung von Fragen aus der Gleichgewichtslehre, welche die Gleichgewichte anisotroper und isotroper Phasen betreffen.

Der Punkt *Kr* deutet die Lage des kritischen Punktes für Äther an. Mit dem Gebiet in der nächsten Gegend dieses Punktes hat sich die Forschung bisher hauptsächlich beschäftigt.

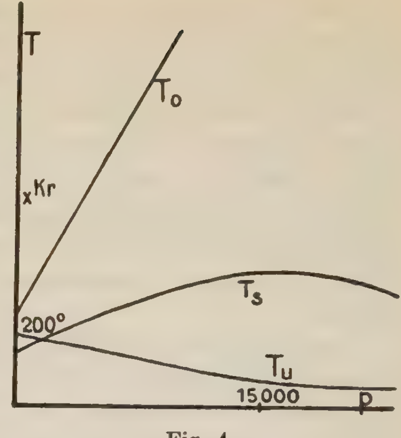


Fig. 4.

Aus der Volumenfläche ist noch ein wichtiger Schluß auf die Energiefläche zu ziehn. Da $\left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_p$ bei höheren Drucken verschwindet, so wird für komprimierte Flüssigkeiten, so wie bei idealen Gasen der Energieinhalt bei konstanter Temperatur unabhängig vom Volumen oder vom Druck.

Es ist das leicht aus der allgemein gültigen Formel

$$\left(\frac{dC_p}{dp}\right)_T = -T\left(\frac{d^2v}{dT^2}\right)_p$$

zu ersehn. Da für Krystalle aller Wahrscheinlichkeit nach die Isobare nebenfalls gerade Linien sind, so muß der Abstand der Energieflächen eines Krystalls und einer Schmelze bei konstantem Druck unabhängig von der Temperatur sein.

4. Die Beziehungen der Volumenflächen eines Krystalls und seiner Schmelze.

Bei der Krystallisation von nicht assoziierten Flüssigkeiten beobachtet man beim Druck $p = 0$ durchweg eine Kontraktion, man hat also anzunehmen, daß bei der Krystallisation normaler Flüssigkeiten der innere Druck diskontinuierlich um einen Betrag, $\varDelta K$, anwächst.

Der innere Druck in einem Krystall $K + \varDelta K$ bei $p = 0$ ist ein Vektor, doch kann man, um den hieraus folgenden Komplikationen zu begegnen, einen gewissen mittleren inneren Druck im Krystall, dem das Volumen des Krystalls entspricht, annehmen, um die Kontraktion bei der Krystallisation auf eine Kompression der Schmelze zurückzuführen. Da sich der innere Druck K bei $p = 0$ in einer Flüssigkeit als unabhängig vom Volumen, entsprechend dem guten Anschluß der Bestimmungen Amagats an die Formel 6), ergeben hat, so wollen wir annehmen, daß auch der

mittlere innere Druck bei $p = 0$ in einem Krystall unabhängig vom Volumen ist.

Die Annahme einer Erhöhung des inneren Drucks bei der Krystallisation wird den beiden Hauptbeziehungen zwischen dem Volumen eines Krystalls und seiner Schmelze gerecht, nämlich der, daß das Volumen des Krystalls beim Drucke $p = 0$ immer kleiner ist als das seiner Schmelze, und der, daß die Kompressibilität des Krystalls in demselben Zustandspunkte immer kleiner ist als die seiner Schmelze. Man kann die Erhöhung des inneren Druckes, den Wert $\varDelta K$, sowohl aus der Volumenänderung als auch aus der Änderung der Kompressibilitäten bestimmen, vorausgesetzt, daß bei der Krystallisation Volumenänderungen, die nicht durch Änderung des inneren Drucks bedingt sind, nicht auftreten. Nehmen wir fürs Erste an, daß die Änderung des inneren Druckes die einzige Ursache der Volumenänderungen bei der Krystallisation ist, so kann die Volumenänderung bei der Krystallisation aus der Änderung des inneren Drucks berechnet werden.

Setzt man in der Isotherme der Flüssigkeit:

$$v_2 = v_{2,\,p=\infty} + A \frac{K}{K+p}$$

p das eine Mal gleich 0 und das andere Mal gleich $\varDelta K + p$, und subtrahiert von der ersten der beiden Gleichungen die zweite, so erhält man für die berechnete Volumenänderung bei der Krystallisation $\varDelta_b v_p$ die Gleichungen:

13) $$\varDelta_b v_p = A_2 \frac{K \varDelta K}{(K+\varDelta K+p)(K+p)}$$

und

$$\varDelta_b v_{p=0} = A_2 \frac{\varDelta K}{K+\varDelta K}.$$

Aus der gegebenen Volumenisotherme der Flüssigkeit und der gegebenen Kompressibilität des Krystalls $\frac{dv_2}{dp}$ beim Druck $p = 0$ ergibt sich der Wert $\varDelta K$ in folgender Weise. Durch Differentiation der Gleichung für die Flüssigkeitsisotherme erhält man:

$$\frac{dv_2}{dp} = -A_2 \frac{K}{(K+p)^2}.$$

Die Kompressibilität der Flüssigkeit muß aber unter dem inneren Druck $K+\varDelta K$, entsprechend unseren Annahmen, gleich sein der Kompressibilität des Krystalls, es muß also gelten:

14) $$\frac{dv_2}{dp} = -A_2 \frac{K}{(K+\Delta K)^2}.$$

Führt man den Wert von ΔK, welcher die Gleichung 14) befriedigt, in die Gleichung 13) ein, so ist die Volumenänderung beim Schmelzen $\Delta_b v_p$ aus der Kompressibilität des Krystalls und der Isotherme der Schmelze bestimmt worden.

Mit wachsendem p nimmt $\Delta_b v_p$ ab und konvergiert schließlich gegen den Wert Null. Es können sich also bei der Annahme, daß die Vergrößerung des inneren Drucks bei der Krystallisation die einzige Ursache der Volumenverkleinerung bei der Krystallisation ist, die Isothermen eines Krystalls und seiner Schmelze nie schneiden.

Nun lehrt aber die Erfahrung, allerdings hauptsächlich Extrapolationen nach zu urteilen, daß sich die beiden Volumenisothermen in der Regel bei einem endlichen Druck schneiden. Um zu einem solchen Schnittpunkte zu kommen, muß man die Annahme machen, daß bei der Krystallisation außer der Volumabnahme durch Steigerung des inneren Druckes noch eine Volumenvergrößerung eintritt. Es müßte also bei der Umlagerung der Moleküle aus dem Zustande vollkommener Unordnung in dem Zustand einer bestimmten Anordnung, z. B. in die eines Raumgitters, eine Volumenvergrößerung eintreten.

Die in Fig. 4 gestrichelte Kurve ist durch Subtraktion der

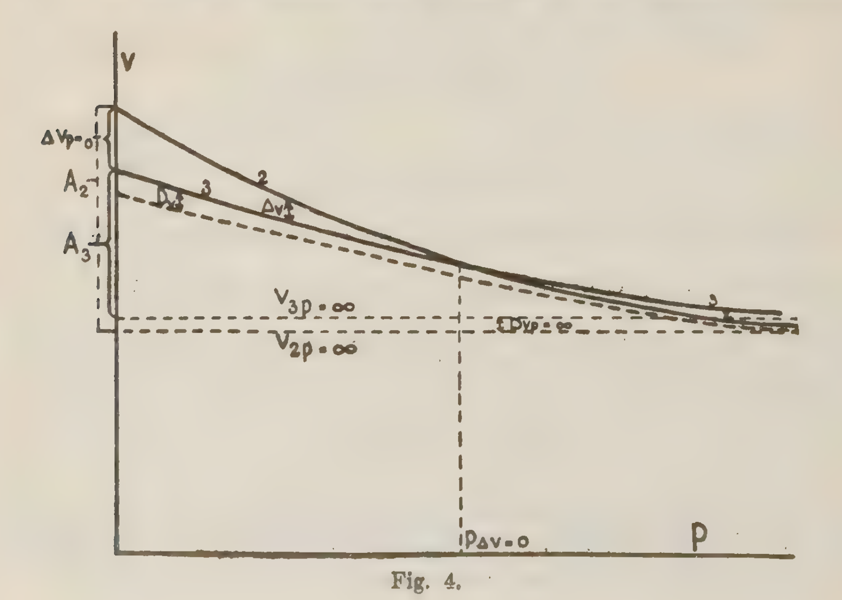


Fig. 4.

$\Delta_b v_p$ von den Volumen v_{2p} der Flüssigkeitsisotherme 2 entstanden. Diese Kurve kann man sich dadurch entstanden denken, daß die Isotherme der Flüssigkeit, die Kurve 2, parallel sich selbst um das Stück ΔK in der Richtung zu kleineren Drucken hin verschoben worden ist. Bei dieser Verschiebung ändert sich der Grenzwert des Volumens für $p = \infty$ nicht, die Kurve 2 und die gestrichelte Kurve werden also nach $p = \infty$ hin sich asymptotisch einander nähern.

Damit sich die Isothermen des Krystalls und seiner Schmelze bei einem endlichen Druck schneiden, braucht man nur eine zweite Verschiebung der Isotherme des Krystalls, der gestrichelten Kurve Fig. 4 in der Richtung nach wachsendem Volumen vorzunehmen.

Diese Verschiebung kann entweder eine Parallelverschiebung sein, oder bei der Verschiebung kann eine Änderung der Isotherme vorgenommen werden. Über diese Änderung der Krystallisothermen muß eine spezielle Annahme eingeführt werden.

Eine solche naheliegende Annahme ist folgende: die Verschiebungen, Dv_p, der in der Richtung der p-Achse um ΔK verschobenen Isotherme sollen sich mit dem Druck nach demselben Gesetz ändern, nach dem sich das Volumen der Flüssigkeit selbst ändert. Diese Annahme führt für die Verschiebungen zur Gleichung:

15) $$Dv_p = Dv_{p=\infty} + (Dv_{p=0} - Dv_{p=\infty}) \frac{K + \Delta K}{K + \Delta K + p}.$$

Beide Annahmen ergeben dieselbe allgemeine Form der Isotherme des Krystalls:

$$v_s = v_{s, p=\infty} + \Delta_s \frac{K + \Delta K}{K + \Delta K + p},$$

nur in den Beziehungen der Konstanten der Krystallisotherme zu denen der Flüssigkeitsotherme sind Unterschiede je nach der Annahme, zu der man sich entschließt, zu beachten.

Die erste Annahme einer Parallelverschiebung in der Richtung der v-Achse gestattet die Konstanten der Krystallisotherme aus denen der Flüssigkeitsisotherme abzuleiten, wenn nur die wirklich beobachtete Volumenänderung beim Schmelzen für einen bestimmten Druck p, Δv_p, und die Kompressibilität des Krystalls gegeben sind. Dann kann auf Grund der Gleichung 14) der Wert ΔK ermittelt werden und mit Hilfe der Gleichung 13) der Wert $\Delta_b v_p$. Da ferner die Beziehung:

16) $$-\Delta v = -\Delta_b v_p + Dv_{p=\infty}$$

besteht, so kann auch $Dv_{p=\infty}$ bestimmt werden und infolgedessen auch die Konstante $v_{3,p=\infty}$ und A_3, da für diese die Beziehungen:

17) $$v_{3,p=\infty} = v_{2,p=\infty} + Dv_{p=\infty}$$

und

18) $$A_3 = A_2 - \Delta_b v_{p=0} + Dv_{p=\infty}$$

gelten.

Bei Einführung der zweiten Annahme ist die Kenntnis einer größeren Anzahl von Punkten der Krystallisotherme notwendig, um deren Konstanten zu berechnen.

Zur Prüfung, ob die der Gleichung 15) zugrunde liegende Annahme der Lage der beiden Isothermen zu einander entspricht, kann man untersuchen, ob die Differenzen der Krystall- und der um ΔK verschobenen Flüssigkeitsisotherme durch die Gleichung 15) dargestellt werden können. Wenn das der Fall ist, so werden für die Konstanten der Flüssigkeits- und der Krystallisotherme die Gleichung 17) und die Gleichung:

19) $$A_3 = A_2 - \Delta_b v_{p=0} + Dv_{p=0} - Dv_{p=\infty}$$

gelten. Man erhält diese Beziehungen, wenn man die Gleichung der um ΔK verschobenen Flüssigkeitsisotherme zur Gleichung 15) addiert, und die so entstandene Gleichung mit der Gleichung der Krystallisotherme vergleicht.

Aus den Volumenisothermen eines Krystalls und seiner Schmelze, die für dieselbe Temperatur gelten, kann der Druck des Schnittpunktes der beiden Isothermen $p_{\Delta v = 0}$, für den $v_2 = v_3$ wird, berechnet werden.

Die Gleichungen der beiden Isothermen sind:

$$v_2 = v_{2,p=\infty} + A_2 \frac{K}{K+p}$$

und

$$v_3 = v_{3,p=\infty} + A_3 \frac{K+\Delta K}{K+\Delta K+p}.$$

Setzt man $v_2 = v_3$ und $v_{3,p=\infty} - v_{2,p=\infty} = Dv_\infty$, so erhält man für $p_{\Delta v = 0}$ eine Gleichung zweiten Grades aus der sich $p_{\Delta v = 0}$ berechnet zu:

20) $$\begin{cases} p_{\Delta v = 0} = N \pm \sqrt{N^2 + \dfrac{K^2 + K\Delta K}{Dv_\infty}(A_2 - A_3 - Dv_\infty)} \\ N = -K - \dfrac{\Delta K}{2} + \dfrac{A_2 K}{2Dv} - \dfrac{A_3(K+\Delta K)}{2Dv_\infty}. \end{cases}$$

Wenn $(A_2 - A_3 - Dv_\infty) > 0$, so ist $p_{\varDelta v = 0}$ stets reell.

Wie früher[1]) bewiesen, ist das Sichschneiden der beiden Volumenisothermen bei einem endlichen Druck eine notwendige, aber auch hinreichende Bedingung für das Auftreten eines zweiten Gleichgewichtsdruckes für einen Krystall und seine Schmelze bei einem Druck, der größer ist als der Druck des Schnittpunktes beider Isothermen. Die Einführung der Konstanten Dv_∞ hat also nicht nur das Auftreten eines Schnittpunktes der beiden Isothermen, sondern auch das Auftreten eines zweiten Gleichgewichtsdruckes für einen Krystall und seine Schmelze bei einem Druck, der größer als $p_{\varDelta v = 0}$ ist, zur Folge. Diese zweite Folge kann man sich durch folgende Überlegung plausibel machen. Bei gleichen inneren Drucken muß das Volumen der anisotropen Phase mit dem inneren Druck $K + \varDelta K$ größer sein als das Volumen der isotropen Phase mit dem inneren Druck $K + p$, wo $p = \varDelta K$ ist, weil der Molekularaufbau einer anisotropen Phase sperriger ist als der einer isotropen Phase, was die Konstante der Sperrigkeit Dv_∞ zum Ausdruck bringt; daher ist zu erwarten, daß beim Wachsen der äußeren auf die anisotrope Phase wirkenden Kräfte, dieselben die Phase mit dem größeren Volumen in das der Phase kleineren Volumens zwingen werden, wodurch bei einem gewissen Druck Gleichgewicht zwischen beiden Phasen eintreten kann.

Nachdem die Beziehungen der Isotherme eines Krystalls zu der seiner Schmelze erörtert sind, haben wir die Beziehungen der Isobaren eines Krystalls und seiner Schmelze zu untersuchen.

Diese Beziehungen werden durch folgende Gleichung geregelt. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die Volumenänderung beim Schmelzen gleich ist der Differenz der Ausdehnungen einer Schmelze und ihres Krystalls beim Schmelzpunkt multipliziert mit der absoluten Temperatur des Schmelzpunktes.

$$21)\qquad v_{2,\,p=1} - v_{3,\,p=1} = \varDelta v_{p=1} = T_{p=1}\left[\left(\frac{dv_2}{dT}\right)_{p=1} - \left(\frac{dv_3}{dT}\right)_{p=1}\right].$$

Diese Gleichung ist ganz analog der Gleichung 3), die für Flüssigkeiten gilt. Die Erfahrung lehrt also, daß die Isobare eines Krystalls beim Druck $p = 1$ mit der Isobare seiner Schmelze bei demselben Druck durch dasselbe Gesetz verknüpft ist, welches die

---

1) Nachrichten der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen vom 13. Mai 1911, S. 9.

Isobaren zweier verschiedener Drucke einer Flüssigkeit verbindet, oder daß sich ein Krystall betreffs seiner Wärmeausdehnung so verhält, wie eine einem bestimmten höheren Druck unterworfene Flüssigkeit. Hierauf weisen, wie wir sahen, auch die Volumenänderung bei der Krystallisation und die Tatsache, daß die Kompressibilität eines Krystalls kleiner ist als die seiner Schmelze, hin.

Die empirische Gleichung 21) ist aber, wenn bei derselben Temperatur zwei Gleichgewichtsdrucke für einen Krystall und seine Schmelze existieren, nicht ganz richtig. Es fehlt der Volumenänderung beim Schmelzen $\varDelta v_{p=1}$ ein Glied, die Sperrigkeitskonstante $Dv_{p=\infty}$.

Denn, wenn für die Isobaren einer Flüssigkeit die Gleichung:

$$v_{2,p} - v_{2,\,p=\infty} = T\left(\frac{dv_2}{dT}\right)_p$$

gilt, so muß für den entsprechenden Krystall die Gleichung:

$$v_{3,p} - v_{3,\,p=\infty} = T\left(\frac{dv_2}{dT}\right)_{\varDelta K+p} = T\left(\frac{dv_3}{dT}\right)_p$$

gelten, und subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten und berücksichtigt, daß

$$v_{3,\,p=\infty} - v_{2,\,p=\infty} = Dv_{p=\infty}$$

und

$$v_{2,p} - v_{3,p} = \varDelta v_p$$

ist, so erhält man die Gleichung:

22) $$\varDelta v_p + Dv_{p=\infty} = T\left[\left(\frac{dv_2}{dT}\right)_{K+p} - \left(\frac{dv_2}{dT}\right)_{\varDelta K+p}\right] = T\left[\left(\frac{dv_2}{dT}\right)_p - \left(\frac{dv_3}{dT}\right)_p\right].$$

Es unterscheiden sich die beiden Gleichungen 21) und 22) um das Glied $Dv_{p=\infty}$, und die Erfahrung hätte nicht die Gleichung 21) sondern die Gleichung 22) ergeben sollen. Da aber die Bestimmungen der Größen $\varDelta v_p$, $\left(\frac{dv_2}{dT}\right)_p$ und $\left(\frac{dv_3}{dT}\right)_p$ auch beim Druck einer Atmosphäre schwer genauer als bis auf 1 Prozent auszuführen sind, und $Dv_{p=\infty}$ wahrscheinlich von der Größenordnung von 0.001 $\varDelta v_p$ ist, so hat man sich nicht darüber zu wundern, daß die Erfahrung nicht zur theoretisch richtigen Formel 22) geführt hat. Jedenfalls hat man in der Verschiedenheit der beiden Gleichungen 21) und 22) nicht einen Widerspruch zu erblicken, sondern darf wohl behaupten, daß auch die Gleichung 22) innerhalb der Fehlergrenzen durch die

Erfahrung bestätigt wird. Eine Bestimmung von $Dv_{p=\infty}$ wird sich aber auf Grund der Gleichung 22) kaum ausführen lassen, und zwar besonders aus dem Grunde, weil bei sehr tiefen Temperaturen man über die Lage der Volumenisobaren eines Krystalls und des ihm entsprechenden amorphen Körpers nichts weiß.

Die Gleichung 22) verbindet die Volumenfläche eines Krystalls mit der seiner Schmelze, aber auch wenn diese Gleichung für beliebige Drucke gilt, ist diese Verbindung doch keine ganz bestimmte, denn allein durch die Isobaren des Krystalls ist diese Beziehung nicht festgelegt; hierzu wäre noch die Kenntnis weniger Punkte je einer Isotherme für den betreffenden Stoff notwendig, aber solche Beobachtungen fehlen zur Zeit. Deshalb kann auch noch nicht die Entscheidung darüber getroffen werden, ob die Volumenisothermen der Krystalle Hyperbeln sind, und erst recht nicht, ob, wenn das der Fall ist, die Sperrigkeit des Molekularaufbaues eines Krystalls von Druck unabhängig ist oder ob und nach welchem Gesetz sie sich mit dem Druck ändert. Aber mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit darf man vermuten, daß die Isothermen von Krystallen Hyperbeln sind und dann müßte, wenn für einen Stoff im isotropen Zustande die Zustandsgleichung

$$v_2 = v_{2,\,p=\infty} + A_2 \frac{K_2}{K_2 + p}$$

gilt, für denselben Stoff im anisotropen Zustande die Zustandsgleichung

$$v_3 = v_{3,\,p=\infty} + A_3 \frac{K_3}{K_3 + p}$$

gelten.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß das Volumen einer Reihe von Flüssigkeiten in einem weiten Zustandsfelde durch die sehr einfache Gleichung:

$$(v - v_{p=\infty})(K + p) = CT$$

dargestellt werden kann.

Versteht man unter $v - v_{p=\infty}$ das freie Volumen, unter $K + p$ den inneren Druck, so ist man von der Analogie dieser Gleichung mit der Zustandsgleichung idealer Gase überrascht. Aber während die Gaskonstante R unabhängig von der Natur des Gases für molekulare Mengen desselben ist, hängt die Konstante C von der Natur der Flüssigkeit ab.

Im Sinne von La Place ist die Konstante K gleich der Mo-

lekularattraktion pro 1 qcm, gemessen in Kilogrammen. Daß sich die Flüssigkeiten in einem weiten Zustandsgebiete so verhalten, als ob die Molekularattraktion unabhängig vom Volumen ist, wird nicht weniger überraschen. Diese Erkenntnis steht mit den Annahmen der herrschenden kinetischen Flüssigkeitstheorien in direktem Widerspruch. Man wird aber die Flüssigkeitstheorien der neuen Erkenntnis anzupassen haben, und speziell darnach zu trachten haben, das Gebiet kleiner Drucke, in dem die Zustandsgleichungen auf so große Schwierigkeiten stoßen, mit dem Gebiete, in dem die einfachen Gesetze gelten, durch geeignete Hypothesen zu verbinden.

Für anisotrope Körper gilt wahrscheinlich eine der Zustandsgleichung isotroper Körper analoge Zustandsgleichung. Doch die Entscheidung über die Zustandsgleichung anisotroper Körper steht noch der Erfahrung zu. Wenn aber eine solche Entscheidung gefallen sein wird, ist den Anwendungen der beiden Zustandsgleichungen auf die Gleichgewichtslehre isotroper und anisotroper Zustände ein weites Feld eröffnet.

Beiträge zur Kenntnis des Oberdevon am Nordrande des rechtsrheinischen Schiefergebirges.

Von

Privatdozent **Dr. R. Wedekind**, Göttingen.

Vorgelegt von A. von Koenen in der Sitzung am 28. Oktober 1911.

I. Allgemeines und Uebersicht.

Auf Anregung des Herrn Geheimrat v. Koenen hatte ich mich vor einigen Jahren mit den geologischen und palaeontologischen Verhältnissen des Enkeberges beschäftigt[1]). Es hatte sich dabei gezeigt, daß zwischen dem Adorfer Kalke und den Clymenienschichten eine Schichtenserie liegt, die durch den ungewöhnlichen Reichtum an Vertretern der Gattung *Cheiloceras* ausgezeichnet ist. Innerhalb dieser „Cheilocerasschichten" ließen sich zwei Horizonte unterscheiden, von denen der tiefere auf Grund eingehender palaeontologischer Untersuchungen den Goniatitenschiefern von Nehden gleichgestellt wurde. Schon damals konnte die Vermutung ausgesprochen werden, daß die Gattung *Cheiloceras* auf die Cheilocerasschichten beschränkt ist. Bei meinen weiteren Untersuchungen, die sich auf den ganzen Nordrand des rechtsrheinischen Schiefergebirges ausdehnten, hat sich dies bisher bestätigt. Es sind mir zwar aus den Clymenienschichten von Balve *Cheiloceras*-ähnliche Formen bekannt geworden, die aber bei leidlicher Erhaltung von den Nehdener Formen scharf unterschieden werden können, wie demnächst an anderer Stelle ausführlicher ge-

---

1) Vgl. meine Dissertation „Die Cephalopodenfauna des höheren Oberdevon am Enkeberge". Neues Jahrbuch für Mineralogie etc. Beilage-Band 26. 1908.

zeigt werden soll. Die Möglichkeit, daß echte *Cheiloceras*-Arten in den Enkeberger Kalk noch hinaufreichen, bestreite ich jedoch keineswegs.

Des Weiteren hatte sich bereits bei meiner ersten Arbeit gezeigt, daß der Wechsel der Cephalopodenfaunen im Oberdevon ein überaus schneller ist, ebenso wie ihn etwa der Jura und die untere Kreide zeigt. Es lassen sich in der Tat, was ja auch bereits nach A. Denckmanns Arbeiten zu erwarten war, eine ganze Reihe palaeontologisch begründeter Zonen unterscheiden. Von Bedeutung ist nun der Nachweis, daß sich die am Enkeberg ausgeschiedenen Zonen auch bei Balve wiederfanden[1]). Die Feststellung der palaeontologisch begründeten Unterzonen ist allein deshalb schon von größter Wichtigkeit, weil die Frage der Faziesvertretung im Oberdevon nur dadurch gelöst werden kann. Um hierfür ein Beispiel anzuführen, greife ich eines jener Probleme heraus, dessen Lösung ich nahe zu sein glaube:

1. Im Tagebau der Grube Martenberg[2]) ist die Grenze des Mitteldevon gegen das Oberdevon aufgeschlossen. Ueber den Prolecanitenschichten folgt der Adofer Kalk, der als Plattenkalk mit geringen tonigen Zwischenlagen ausgebildet ist.

2. Nur 2 km nördlich findet sich ein neuer Aufschluß im unteren Oberdevon, der ebenfalls die Grenze gegen das Mitteldevon zeigt. Der mitteldevonische Eisenstein wird hier überlagert von milden Tonschiefern. Im Hangenden der Tonschiefer folgen schwarze bituminöse Kalke. Während die liegenden Tonschiefer außer verkiesten Goniatiten der Intumescensstufe noch Seesterne und Crinoidenkelche in guter Erhaltung einschließen, lieferten die dunklen Kalke bisher noch keine Goniatiten, an denen die Lobenlinie zu präparieren war. Immerhin läßt sich nach der Gestalt und den Querschnitten der Goniatiten sagen, daß diese Kalke ebenfalls noch der Intumescensstufe angehören. Hangendere Schichten sind nicht aufgeschlossen.

---

1) Es sei erwähnt, daß sich an der Straße Hövel—Beckum (Blatt Balve) ein kleiner Steinbruch befindet, in dem während des letzten Jahres frisch gebrochen wurde. In diesem Steinbruch findet sich außer zahlreichen Exemplaren von *Prolobites delphinus* die gesamte Fauna, die ich aus den Schichten mit *Prolobites delphimus* und *Clymenia involuta* vom Enkeberge beschrieben habe. Die Cheilocerasschichten sind am Beil gut zu studieren.

2) A. Denckmann: Bericht über wissenschaftliche Ergebnisse 1901—1902. Mitteldevon, Oberdevon und Culm des Sauerlandes, Bl. Balve. Jahrb. d. K. Geol. Landesanst. Bd. 23. Seite 590 ff.

3. Wenige km nördlich ist im Diemeltal bei Giershagen wiederum eine interessante Schichtenfolge aufgeschlossen. Ueber Tentaculitenschiefern (mitteldevonisch?) folgt ein Gestein, das beim ersten Anblick den Tonplatten des Göttinger Muschelkalkes recht ähnlich ist. Die tiefsten Teile dieser „devonischen Tonplatten“, sowohl die Kalkplatten wie die tonigen Zwischenlagen, sind ungewöhnlich reich an Tentaculiten. Die Kalke selbst gleichen dem später noch zu besprechenden „Padberger Kalke“ (*Stringocephalus*-Stufe). In dem oberen Teile der Tonplatten fanden sich in einem kleinen Steinbruche zahlreiche *Gephyroceras-Arten.*

Wenn wir nun von den Beobachtungen Denckmanns (Kellerwald u. s. w.) ausgehen, so wäre die in den unter 1 und 2 erwähnten Aufschlüssen beschriebene Schichtenfolge so zu deuten:

Normale Zonenfolge n. Denckmann:	Adorf:	2 km nördl. Adorf:
3. Adorfer Kalk.	Plattenkalk.	Dunkle plattige Kalke.
2. Büdesheimer Schiefer.	Lücke.	Schiefer.
1. Prolecanitenschicht.	Prolecanitenschichten.	Schiefer (?)

Eisensteine des oberen Mitteldevon.

Da nun anderseits bei Martenberg im Hangenden des Adorfer Kalkes noch schwarze Goniatitenkalke, aber nur ganz vereinzelt und linsenförmig, auftreten, könnte die Schichtenfolge auch folgendermaßen gedeutet werden:

Adorf:	2 km nördl. Adorf:
Adorfer Kalk.	Dunkle Kalke, Schiefer.
Prolecanitenschichten.	Schiefer.

Eisensteine des oberen Mitteldevon.

Mit anderen Worten: Der Adorfer Kalk ist im Aufschluß 2 z. gr. T. durch Schiefer mit verkiester, der Adorfer sehr ähnlichen Goniatitenfauna vertreten. Dabei ist dann aber das Fehlen von *Beloceras* in den Schiefern sehr auffällig, das übrigens m. W. bisher nie in Schiefern gefunden ist. Daß Fazieswechsel im Oberdevon keine Seltenheit ist, zeigt Beispiel 3.

Ob die erste oder zweite Deutung der Schichtenfolge richtig ist, lasse ich vorläufig unentschieden, behalte mir jedoch vor, auf diese von mir angeregten Fragen später zurückzukommen. Vorläufig sollen diese Beispiele nur zeigen, wie notwendig eine im einzelnen genau palaeontologisch begründete Schichtenfolge für das Oberdevon ist.

Da für die Einteilung des Oberdevon Lokalnamen gewählt sind, mußten meine Untersuchungen von den namengebenden Lokalitäten ausgehen. Wenn ich hier als Ausgangspunkt das Briloner Devongebiet wähle, so geschieht das deshalb, weil gerade über dieses Gebiet noch verhältnismäßig wenig bekannt ist und es gerade hier Probleme gibt, die von grundlegender Bedeutung für das Oberdevon sind.

Uebersicht.

Die Höhe des Altenberges — südlich der Grube Grottenberg auf Blatt Madfeld — gewährt einen vortrefflichen Ueberblick über das Briloner Devongebiet. Das Gebiet quert von O nach W der **Rösenbecker-Diabassattel** mit seinen einzelnen Bergen wie Enkeberg, Burg, Weiße Frau, Rösenbecker Berg und Sticklenberg. Dem Rösenbecker Diabassattel nahezu parallel zieht im N eine steile Massenkalkkante, die südliche Begrenzung des Briloner Massenkalkplateaus, dem das **Nehdener Karbon-Devon-Gebiet** eingelagert ist. Im Süden des Diabassattels folgt die **Altenbergmulde** mit dem Kriesenberge, Hömberge, Altenberge, Raumberge, Eisenberge und Hansenberge.

Die fazielle Entwicklung des Oberdevon ist in diesen drei räumlich nicht nennenswert voneinander entfernt liegenden Gebieten — Nehden ist von dem Rösenbecker Diabassattel ca. 5 km und dieser von der Altenbergmulde nur 1,5 km Luftlinie entfernt — eine in vieler Beziehung recht verschiedene.

II. Stratigraphie.

1. Das Nehdener Karbon-Devongebiet.

Literatur: 1860. Stein, R.: Geognostische Beschreibung der Umgegend von Brilon. Zeitschrift d. D. G. G. Bd. 12. Seite 245.

1873. Kayser, E.: Ueber die Fauna des Nierenkalkes vom Enkeberge und der Schiefer von Nehden. Ebenda. Bd. 25. Seite 604—605.

1895. Denckmann, A.: Zur Stratigraphie des Oberdevon im

Kellerwald und in einigen benachbarten Devongebieten. Jahrb. d. K. Geol. Landesanstalt. Bd. 15. Seite 54 ff.
1908. Wedekind, R.: Die Cephalopodenfauna des höheren Oberdevon am Enkeberge. N. Jahrb. f. Min. etc. B. B. 26. S. 574 ff.

Darauf wie die devonische Schichtenfolge von Nehden von den verschiedenen Forschern gedeutet ist, braucht hier schon deshalb nicht eingegangen zu werden, weil dieser Punkt in meiner Dissertation bereits eingehend behandelt ist. Außerdem mag hier darauf hingewiesen werden, daß die Nehdener Fauna von Spanien bis nach Rußland verbreitet ist. Der Horizont der Nehdener Goniatitenschiefer ist also sowohl palaeontologisch wie petrographisch ein Leithorizont ersten Ranges, sodaß nicht besonders betont zu werden braucht, wie wichtig die exakte Festlegung dieses Horizontes bei Nehden selbst ist.

Die Lagerungsverhältnisse des Nehdener Karbon-Devon-Gebietes sind auf Dechens Karte von Westfalen 1:80000 Blatt Soest so dargestellt, als ob es sich um eine dem Massenkalk allseitig eingesenkte Mulde, also um einen Kesselbruch handle. Die Deutung der Schichtenfolge scheint auch bei Kayser auf dieser Auffassung zu beruhen, wenn er a. a. O. Seite 604 sagt: während von da aus" — von der Muldenmitte im Dorfe Nehden nämlich — „nach N wie nach S liegendere Schichten auftreten".

Nach meinen Untersuchungen handelt es sich im Devongebiet von Nehden um äußerst komplizierte Lagerungsverhältnisse, die an die Schuppenstrukturen der Ense-Hauern bei Wildungen erinnern. Die gänzlich abweichende Ausbildung des unteren Karbon, in denen u. a. pflanzen- und kohlenschmitzenführende Schichten mit Cephalopoden und Trilobiten führenden Schiefern und vermutlich auch Cephalopodenkalken wechsellagern, machen es mir zur Zeit noch unmöglich eine geologische Karte des ganzen Gebietes zu geben, sodaß ich mich hier mit einer Skizze des Immentales begnügen muß, um die Lagerungsverhältnisse zu demonstrieren (vergl. die Skizze auf Seite 8).

Das Immental[1]), das sich in NW—SO-Richtung östlich von Nehden hinzieht, gewährt den besten Einblick in die Schichtenfolge und den Aufbau des Gebietes. Wenn man von einer Höhe, etwa von dem kleinen Tannenwäldchen aus, das gleich östlich von Nehden liegt, in das erwähnte Tal hineinschaut, so sieht man, daß sich oberhalb des Immentales auf dessen Ostseite eine nahezu horizontale Kante hinzieht, die ganz aus Massenkalk besteht. Unter dieser

1) Siehe Meßtischblatt Alme.

Kante treten einige Köpfe hervor, die nahezu senkrecht gegen die obere Massenkalkkante Stunde 6 streichen. Sie werden durch Schluchten und durch Wasserrisse voneinander getrennt. Während die obere Kante nur aus Massenkalk gebildet wird, bestehen die unter dieser Kante heraustretenden Köpfe aus mittel- und oberdevonischen Schichten, die in mehrfacher Wiederholung aufeinanderfolgen. Allein im Immental konnten 3 derartige Schuppen festgestellt werden (vgl. die Skizze S. 8).

Von besonderem Interesse ist zunächst die südlichste Schuppe. In Höhe 440,1 des Meßtischblattes Alme tritt als ältestes Glied dieser Schuppe Massenkalk mit dem Streichen h 6 unterhalb der oberen Massenkalkkante gegen das Immental vor mit südlichem Einfallen. Es folgt im S eine kleine Schlucht in der bis zur oberen Kante hinauf sich nicht selten die bekannten Goniatiten der unteren Cheilocerasschichten finden. Auch Herr Geheimrat von Koenen hat hier bereits in früheren Jahren Nehdener Goniatiten gesammelt. Die sich im S an diese Schlucht anschließende Klippe besteht aus Kramenzelkalk (Clymenienschichten), der wie die übrigen Glieder dieser Schuppe nach S einfällt. Die jüngeren Horizonte sind in der nördlich folgenden Schuppe leichter zugänglich und besser aufgeschlossen.

Hier sind in dem durch den Fossilreichtum bekannten Wasserrisse am Hassel wiederum die Nehdener Schiefer aufgeschlossen. Im Hangenden folgt eine mächtige Serie von Kramenzelkalken und Schiefern des oberen Oberdevon, die durch einen roten und grünen Knollenkalk in 2 Teile geteilt werden, die hier kurzweg die liegenden und hangenden[1]) Kramenzelkalke genannt werden sollen.

Der rote und grüne Knollenkalk entspricht auch hier seiner Ausbildung und seiner Lage nach dem „Foßley“. Nach meinen in den letzten Jahren gesammelten Erfahrungen kann ich mit A. Denckmann nicht an der Horizontbeständigkeit des Foßley[2])

1) Mit Bezug auf die roten und grünen Knollenkalke.

2) Demgegenüber bin ich durch meine Untersuchungen zu der Ansicht gelangt, daß das, was man kurzweg und meist mit Unrecht als „*Cypridinen*schiefer“ bezeichnet, in allen Horizonten des Oberdevon auftreten und die verschiedenen Horizonte des Oberdevon vertreten kann. Es ist ja, um einige schlagende Beispiele anzuführen, bekannt, daß bei Adorf inmitten des Adorfer Kalkes *Cypridinen* führende Schiefer auftreten ebenso wie bei Nehden in den Nehdener Schiefern. Es ist am besten, den Begriff *Cypridinen*schiefer überhaupt fallen zu lassen, da vielfach die als *Cypridinen*schiefer bezeichneten Schiefer überhaupt keine *Cypridinen* führen, wie z. B. der Foßley Denckmanns.

Um Mißverständnisse zu vermeiden wiederhole ich: Foßley ist horizontbeständig, die *Cypridinen*schiefer nicht!

zweifeln. Da weder unterhalb noch oberhalb dieses Horizontes bisher eine Diskordanz bei Nehden beobachtet werden konnte, ist das Alter der liegenden und hangenden Kramenzelkalke bestimmt. Es entsprechen:

1) die liegenden Kramenzelkalke den Schichten mit *Prolobites delphinus* SDBG. und der *Clymenia involuta* W. bis hinauf zu den Dasberger Kalken Denckmanns,
2) die hangenden Kramenzelkalke dem Wocklumer Horizonte Denckmanns.

An der Basis dieser ganzen Schichtenfolge und anderseits immer an den Massenkalk gebunden liegen im Nehdener Karbon-Devon-Gebiet die Nehdener Goniatitenschiefer. Leider sind die Kramenzelkalke der Gegend von Nehden zur Zeit sehr schlecht aufgeschlossen, sodaß es mir bisher unmöglich war, die einzelnen Clymenienhorizonte palaeontologisch festzulegen. Da auch das Liegende der Nehdener Schiefer an keiner Stelle so aufgeschlossen ist, daß es einem Studium zugänglich wäre, ließ ich an mehreren Stellen künstliche Aufschlüsse herstellen[1]), die sowohl palaeontologisch wie stratigraphisch beachtenswerte Resultate ergaben.

Abgesehen von kleineren Schürfen wurden 3 größere Schurfgräben gezogen; von denen der erste dazu diente, die fossilführenden Lagen der Nehdener Schiefer in einem größeren Schichtenverbande kennen zu lernen und weiter dazu, ein größeres Material für eine Revision der Nehdener Fauna zu erlangen. Ein weiterer Schurfgraben wurde angelegt, um das unmittelbar Hangende und ein dritter um das unmittelbar Liegende der Schiefer kennen zu lernen resp. festzustellen.

Der 1. Schurfgraben wurde nur wenige Schritte westlich des kleinen Schieferbruches am Uberg angesetzt und von dort aus in der Richtung gegen den Kramenzelkalk getrieben. Es wurden die folgenden Schichten angefahren, deren unterer Teil auch in dem oben erwähnten Steinbruche aufgeschlossen ist:

Zuunterst:

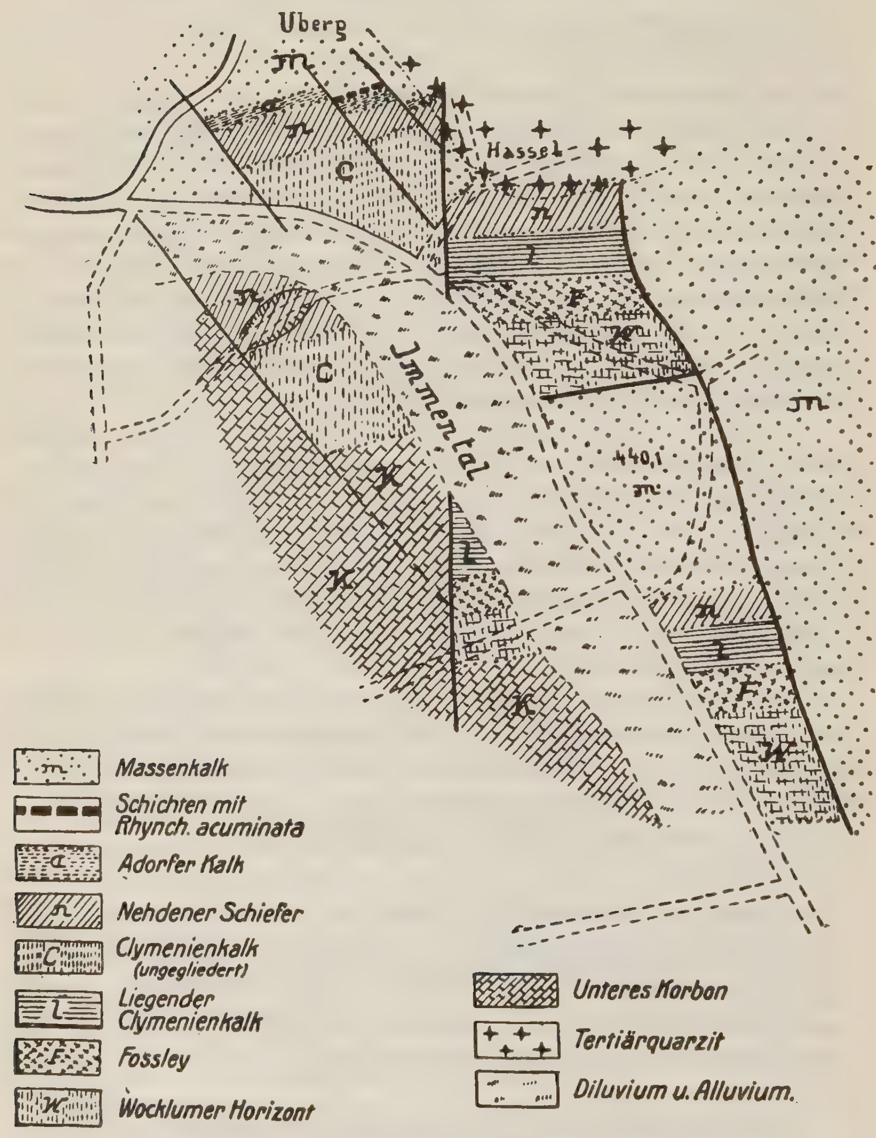
1) Eine ca. 20 cm mächtige Bank eines festen schwarzen, bituminösen Kalksteines mit spärlichen und schlecht erhaltenen Goniatiten der unteren *Cheiloceras*schichten.
2) Dunkle Schiefer in denen die verkiesten Goniatiten das Maximum der Häufigkeit erreichen.

---

1) Herr Oberförster Riedel-Alme hat mir hierzu bereitwilligst die Erlaubnis erteilt, so daß ich ihm zu großem Dank verpflichtet bin.

3) Eine ca. 20 cm mächtige Bank des unter 1) beschriebenen Gesteines.

4) Es folgt eine höchstens 10 m mächtige Serie von grünen, z. T. auch rötlich und violett gefärbten Schiefern, die zahlreiche Abdrücke von Brachiopoden und schlecht erhaltenen verkiesten und nicht verkiesten, dann flach gedrückten Goniatiten einschließen.



Geologische Skizze des Immentales bei Nehden.

Dem unteren Teile der unter 4 aufgeführten Schiefer sind tiefschwarze brotleibförmige Kalkknollen eingelagert, die durch einen großen Reichtum an inartikulaten Brachiopoden ausgezeichnet sind. Etwa einen halben m höher erscheinen teils größere teils kleinere Kalkknollen von hellgrauer Färbung, die neben zahlreichen *Tornoceras*- noch *Cheiloceras*-Arten in größerer Zahl führen. Die grauen Kalkknollen, die lagenweise angeordnet sind, bezeichnen den tiefsten Teil der oberen *Cheiloceras*schichten. Ob bereits *Dimeroceras*-Arten hier vorkommen, muß noch die Durcharbeitung des gewonnenen Materials ergeben.

Die höheren Teile dieser Schiefer lieferten hier keine Versteinerungen ebensowenig wie die tiefsten Teile der hier anstehenden Kramenzelkalke. Bereits vor einem Jahre, im Winter 1910, gelang es mir am Uberg im Hangenden der Goniatitenschiefer auf dem dem Anbauer Wegener gehörigen Acker Goniatiten und Clymenien nachzuweisen.

Ein zweiter Schurfgraben wurde am Hassel, an dem in der Literatur vielgenannten Wasserrisse angesetzt. Zunächst wurden auch hier wiederum die erwähnten den Schiefern eingelagerten grauen Kalkknollen angefahren. Der grüne Schiefer wird durch eine eingelagerte wenig mächtige Kramenzelbank in zwei Teile geteilt. In dem über den Kramenzelkalken liegenden Schiefern wurde eine kleine Fauna gesammelt. Einen auffälligen Gegensatz gegen die Fauna der unteren Cheilocerasschichten bildet auch hier wiederum der Reichtum der *Tornoceras*-Arten. Besonders interessant und wichtig erscheinen mir außerdem die Formen, deren Gehäuse eine ausgesprochen *Sporadoceras*-artige Gestalt zeigt. Sie stehen der Lobenlinie nach *Sporadoceras biferum* PHILL. am nächsten, nur ist die Einsenkung des Außensattels, welche *Spor. biferum* PHILL. auszeichnet, noch äußerst schwach. Es ist beachtenswert, daß ich auch am Enkeberg in den oberen *Cheiloceras*schichten ähnliche Formen beobachtet und erwähnt habe.

Der Übergang in die Kramenzelkalke ist ein ganz allmählicher, indem sich zunächst ganz vereinzelte Kalkknollen oder an deren Stelle mit erdigem Material angefüllte Hohlräume einstellen. Die Kramenzelkalke selbst lieferten bisher an dieser Stelle keine Fossilien.

Der dritte oder Hauptschurf ergab das wichtigste Resultat. Er wurde 10 m östlich des Schieferbruches am Uberg angesetzt und führte von dieser Stelle aus von den Nehdener Schiefern, die durch Fossilfunde als solche sichergestellt waren, bis in den Massenkalk. Unmittelbar unter den Nehdener Schiefern liegt

ein stellenweise stark dolomitisierter plattiger Kramenzelkalk, der nur wenig mächtig, vermutlich nicht mächtiger als 3—4 m, ist. Außer mehreren kleineren schlecht erhaltenen Goniatiten wurde in diesem Plattenkalk ein großes Exemplar eines *Gephyroceras* gefunden, und zwar der Art, die am Martenberg bei Adorf am häufigsten ist. Außerdem fanden sich mehrere noch zu bestimmende *Cardiola*-Arten. Die tieferen Lagen des Plattenkalkes sind besonders reich an *Rhynchonella acuminata.*

Das Liegende der Plattenkalk bildet eine massiger ungemein fester Kalk von dunkelblauer Farbe.

Wie weit der Briloner Massenkalk noch dem Oberdevon angehört, läßt sich zur Zeit noch nicht mit Sicherheit angeben. Es wurden jedoch bereits an zahlreichen Stellen zwischen Rösenbeck, Madfeld und Nehden neue Fundpunkte aufgefunden, die neben Korallen, an Brachiopoden und Gastropoden reich sind, sodaß ich hoffen kann, in kurzer Zeit die Gliederung des Briloner Massenkalkes durchzuführen.

Die Schichtenfolge des Oberdevon von Nehden ist somit die folgende:

7. Wocklumer Schichten.
6. Foßley.
5. Untere Clymenienschichten (noch ungegliedert).
4. Obere Cheilocerasschichten.
3. Untere "
2. Adorfer Kalk.
1. Iberger Kalk mit *Rhynchonella acuminata.*

Briloner Massenkalk (zum größten Teile mitteldevonisch[1])).

2. Der Rösenbecker Diabassattel.

Literatur: 1860. Stein, R.: Geognostische Beschreibung der Umgegend von Brilon. Zeitschr. d. D. Geol. Ges. Bd. 12. Seite 208 f.

1873. Kayser, E.: Ueber die Fauna des Nierenkalkes vom Enkeberg und der Schiefer von Nehden. Zeitschrift d. D. Geol. Ges. Bd. 25. Seite 603 ff.

1895. Denckmann, A.: Zur Stratigraphie des Oberdevon im Kellerwalde etc. Jahrb. d. K. geol. Landesanstalt. Bd. 15. Seite 29—32.

1908. Wedekind, R.: Cephalopodenfauna des höheren Oberdevon am Enkeberge. N. Jahrb. für Mineral. etc. B. B. 25. S. 565 ff.

Die Kartierung des Rösenbecker Diabassattels verbunden mit einer langjährigen Beobachtung der Aufschlüsse ergab einige Re-

1) Führt stellenweise häufig *Stringocephalus Burteni.*

sultate, durch welche die Schichtenfolge der Clymenienkalke dieses Zuges vervollständigt wurde. Der untere Teil der Schichtenfolge, der am Enkeberge von mir genauer untersucht ist, wurde insbesondere in dem Steinbruche auf der Westseite der Burg, oberhalb des Rösenbecker Bergmannsweges, in gleicher Vollständigkeit wie am Enkeberge nachgewiesen.

Zur Orientierung sei den Angaben, die A. Denkmann über diesen Steinbruch (a. a. O.) bereits gemacht hat, hinzugefügt, daß eine Kluft, welche senkrecht zu den Schichten steht und nach N einfällt, die Schichtenköpfe der Kramenzelkalke abschneidet, ohne sie aber zu verwerfen. Dort wo diese Kluft zu Tage streicht, stehen die Cheilocerasschichten an. Ca. 3 m vor der Devon-Karbon-Grenze findet sich *Prolobites delphinus* SDBG. sehr häufig nebst anderen Goniatiten und Clymenien der Schichten mit *Prolobites delphinus* SDBG. und *Clymenia involuta* W.

Den Abschluß der gesamten Schichtenfolge bilden dunkelblaue nur 2 cm dicke Kalkplatten, die durch einen großen Reichtum an Clymenien der Guppe der *Clymenia laevigata*, *striata* etc. und an Goniatiten ausgezeichnet sind. Die Stellung dieses Horizontes kann nicht zweifelhaft sein. Sie liegen konkordant über den Schichten mit *Prolobites delphinus* etc. und noch über den unmittelbar auf diese Kalke folgenden unteren Annulatakalken mit *Clymenia costa-protacta* W. Anderseits habe ich die reichen Fundstellen von Balve aufgesucht und mich davon überzeugen müssen und können, daß der dunkelblaue 2—3 cm mächtige Clymenienhorizont an der Burg — ich nenne ihn vorläufig kurz den oberen Burgkalk — sowohl vom Annulatakalk, wie vom Dasberger Kalk faunistisch verschieden ist, wie ihn Denckmann in der Gegend von Balve festgelegt hat. Der obere Burgkalk bildet einen Teil und zwar einen tieferen Teil der Annulatakalke Denckmanns. Höhere Teile der Clymenienschichten finden sich an der Burg und Weißen Frau nicht, dagegen kann stellenweise in einzelnen Koulissen das ganze Oberdevon fehlen. Nur am Südflügel des Rösenbecker Diabaszuges findet sich zwischen Culm und Massenkalk ein Schieferhorizont, der keine andere Deutung zuläßt, als daß es sich um Schiefer des Wocklumer Horizontes handelt. Im Fortstreichen nach O finden sich am Messinghäuser Tunnel Adorfer Kalke und untere Clymenienschichten.

Das Enkeberger Profil kombiniert mit dem der Burg ergibt für den Rösenbecker Diabassattel die folgende Schichtenfolge:

Alaunschiefer des unteren Karbon.

Lücke!

7. Oberer Burgkalk.
6. Unterer Annulatakalk.
5. Schichten mit *Prolobites delphinus* etc.
4. *Sandbergeri* Zone.
3. Obere Cheilocerasschichten.
2 Untere „
1. Adorfer Kalk.

Massenkalk (z. T. oberdevonisch).

Es fehlt somit am Rösenbecker Diabassattel zwischen dem oberen Burgkalk und den Alaunschiefern ein mächtiger Teil der Clymenienschichten.

3. Die Altenberg-Mulde.

Literatur: 1895. Holzapfel, E.: Fauna der Schichten mit Maeneceras terebratum etc. Abhandl. d. K. Geol. Landesanst. Seite 317.
1905. Denckmann, A.: Mitteldevon, Oberdevon und Culm des Sauerlandes. Jahrb. d. K. Geol. Landesanst. Bd. 23. S. 589.

Die einzelnen Horizonte sind im allgemeinen nicht besonders gut aufgeschlossen. Ein immerhin lehrreiches Profil gewähren die Aufschlüsse des Kriesenberges und Bellersteins südlich von Padberg. Im Dorfe Padberg selbst stehen Diabase an, die von mitteldevonischen Schiefern überlagert werden. Fossilführend sind diese u. a. aufgeschlossen an der Straße, die südlich des Hömberges von Padberg nach Hessinghausen führt. Wichtig ist der Fundpunkt am Hüttenberge östlich Padberg, wo diese Schiefer außer Tentaculiten verkieste weitgenabelte *Anarcestes*-Arten in meist kleinen Exemplaren einschließen. Erst die genauere Untersuchung des gewonnenen Materials muß ergeben, ob es die Aequivalente der Wissenbacher Schiefer sind.

Die Diabase werden überlagert von einem grobkörnigen, dickbankigen Kalke, in dem ich bisher nur ganz vereinzelte und unbestimmbare Brachiopodenreste gefunden habe. Durch die Fossilarmut, durch die petrographische Ausbildung wie durch die geringe Mächtigkeit ist dieser Padberger Kalk von dem Massenkalk der beiden nördlich gelegenen Gebiete verschieden. Seinen Charakter bewahrt er im ganzen Verlaufe der Altenbergmulde, wo er mehrfach durch Steinbrüche und Bingen aufgeschlossen ist. Nebenbei sei bemerkt, daß ich ihn in der gleichen Ausbildung weiter im W nördlich von Hoppecke in der gleichen Schichtenfolge wiedergefunden habe. Auffällig ist, daß die Bingen immer dort liegen, wo größere Querbrüche den Padberger Kalk durchsetzen.

Nach oben hin gehen die Padberger Kalke direkt über in Plattenkalke, in denen sowohl an der Straße Padberg—Bredelar wie an mehreren anderen Punkten Adorfer Fauna nachgewiesen werden konnte. Steinbrüche fehlen in dem Plattenkalke der Altenbergmulde gänzlich, sodaß die gesammelte Fauna spärlich ist. Nach dem Fossilreichtum einzelner Gesteinsplatten zu urteilen, die direkt aus dem Anstehenden herausgebrochen wurden, dürfte die Fauna ebenso reich sein wie bei Martenberg. Durch die Funde von Adorfer Goniatiten hat sich somit die bereits früher von A. Denckmann (a. a. O.) ausgesprochene Ansicht glänzend bestätigt, daß es sich hier um Plattenkalke der Intumescensstufe handle. Die obere Grenze der Plattenkalke ist nur an einer Stelle aufgeschlossen und zwar an dem Wege, der von Padberg aus zwischen dem Kriesen- und dem Kalvarienberge hindurch in NO-Richtung nach der großen Binge der Grube Charlottenzug führt. Auch an diesem Wege konnte der Adorfer Kalk durch Fossilien nachgewiesen werden. Nach oben hin wechsellagern die Plattenkalke mit Tonschieferlagen. Dieser Wechsel ist nur wenig mächtig, da sich bald zusammenhängende dunkle und dann hellere Tonschiefer einstellen. Nördlich der Schlucht, die den Kriesenberg und Bellerstein trennt, stellt sich Foßley ein, der wiederum von einer mächtigen Folge von Tonschiefern überlagert wird. Als Hangendes der Tonschiefer erscheint auf der Höhe des Bellerstein, westl. Höhe 443, den Schiefern muldenförmig eingefaltet, Kulmkieselschiefer.

Diese Schichtenfolge ist folgendermaßen zu deuten:

Petrographische Ausbildung:	Entsprechender Horizont:	nach Denckmann:	nach Holzapfel:
Kulmkieselschief.	Kulmkieselschief.	Kulm.	Kulm.
Tonschiefer mit spärl. Kalkeinlagerungen.	Wocklumer Schichten.	„Aequivalent des Wocklum.Kalkes".	„blaue mitteldevonische Tonschiefer".
Grünrote Knollenkalke.	Foßley.	„Foßley".	„Cypridinenschiefer".
Milde Tonschiefer.	Dasberger- Annulata- Enkeberger- } Horizont		
Zuunterst: dunkle Tonschiefer.	Nehdener Schiefer.		
Plattenkalke.	Adorfer Kalk.	vermutl. oberdev.	
Padberger Kalk.	*Stringocephalus*-Kalk.	Massenkalk.	*Stringocephalus*-kalk.

Wie man aus dieser Tabelle ersieht, sind bezüglich der Deutung große Meinungsverschiedenheiten vorhanden. Ich war deshalb bemüht meine Anschauung, welche ja auch von der A. Denckmanns in einigen Punkten verschieden ist, durch weitere Fossilfunde sicher zu stellen.

Zunächst ist die Deutung des wichtigen, weitverbreiteten Padberger Kalkes als oberes Mitteldevon durch den Nachweis von Adorfer Kalken im Hangenden und weitgenabelter Anarcestes Arten im Liegenden sichergestellt.

Was die unter dem Foßley auftretenden Tonschiefer angeht, so hat sich A. Denckmann über deren Stellung nicht ausgesprochen. Jedenfalls liegen die Verhältnisse hier genau so wie auf dem linken Hönneufer und so wie nördlich von Letmathe, wo im Liegenden des Foßley und der Cypridinenschiefer unmittelbar die Intumescensschichten folgen.

Denckmann[1]) sucht diese auffällige Schichtenfolge durch die Transgression der Cypridinenschiefer zu erklären, gibt aber auch die Möglichkeit einer anderen Erklärung zu, nämlich der, daß die Cypridinenschiefer die fehlenden Schichtenglieder vertreten.

Einige Beobachtungen, die ich in der Altenbergmulde machte, sind zur Entscheidung dieser Fragen wichtig. Die Plattenkalke gehen allmählich in Tonschiefer über, indem sich zuerst zwischen den Plattenkalken dünne Tonschieferlagen einstellen, die dann an Mächtigkeit zunehmen und endlich den Plattenkalk bis auf kleine den Schiefern eingelagerte Kalkknollen gänzlich verdrängen. Der untere Teil der Tonschiefer ist stellenweise von dunkler Farbe und gleicht den fossilführenden Lagen der Goniatitenschiefer von Nehden. Einmal auf diese Ähnlichkeit aufmerksam geworden, gelang es mir bei der Verfolgung dieser Schiefer nach Osten in der Nähe von Hessinghausen am nördlichen Waldrande des Raumberges (Blatt Adorf) in denselben eine kleine Fauna von Nehdener Goniatiten nachzuweisen. Nachdem nun auch von mir nachgewiesen ist, daß die Nehdener Schiefer auch bei Nehden das unmittelbare Hangende des Adorfer Kalkes bilden, kann man meines Erachtens wenigstens am Altenberge nicht annehmen, daß die im Liegenden des Foßley auftretenden Schiefer transgredieren, da dort eine Schichtenlücke zwischen Adorfer Kalk und Nehdener Schiefer nicht vorhanden ist. Ob nun aber die Tonschiefer im Liegenden des Foßley den Enkeberger, Annulata- und Dasberger Kalk lückenlos vertreten, lasse ich dahingestellt, da mir noch Faunenfunde fehlen.

1) Exkursion in das Devon- und Culmgebiet nördlich von Letmathe. Jahrb. der Landesanstalt. Bd. 27. 1906, Seite 38 f.

Zusammenstellung der Profile.

Horizonte:	I. Nehden:	II a. Burg:	II b. Messinghaus.:	III. Altenbergmulde:
Wocklumer Horizont.	Schiefer m. spärl. Kalkeinlager.	Verwerfungsdiskordanz.	Milde Tonschiefer.	Schiefer mit spärl. Kalkeinlagerungen.
Foßley.	Grün-roter Knollenkalk.		Verwerfungsdiskordanz.	Grünroter Knollenkalk.
Dasberger Horiz.	Kramenzelkalk.			Tonschiefer.
Obere Annulatakalk.				
Oberer Burgkalk.		Dunkelblauer Kalk		
Unt. Annulatakalk.		Knollenkalk.		
Schichten m. *Prolob. delphinus* u. s. w.		Knollenkalk.		
Sandbergeri-Bank.				
Ob. Cheiloceras-schichten.	Schiefer m. Kalkeinlagemengen.	Knollenkalk.		
Unt. Cheiloceras-schichten.	Dunkle Tonschief.	Knollenkalk.		Dunkle Goniatitenschiefer.
Adorfer Kalk.	Adorfer Kalk.	Plattenkalk.		Plattenkalk.
Prolecaniten-schichten.	Iberger Kalk mit *Rhynch. acuminata.*	Korallenkalk (Phillipsastraea).	? Massenkalk.	Noch nicht nachgewiesen.
Stringocephalus-chichten.	Massenkalk.	Massenkalk.	Massenkalk.	Padberger Kalk.

III. Tektonik.

Bei einem Vergleich der Schichtenfolge des Rösenbecker Diabassattels mit der der Altenbergmulde fallen besonders zwei Punkte auf: a) Die Lückenhaftigkeit der oberdevonischen Schichtenfolge am Rösenbecker Diabassattel und b) die fazielle Verschiedenheit des oberen Mitteldevon und Oberdevon in der Altenbergmulde und dem Rösenbecker Diabassattel. Bevor auf diese Punkte näher eingegangen werden kann, ist ein Ueberblick über die Tektonik des Gebietes erforderlich.

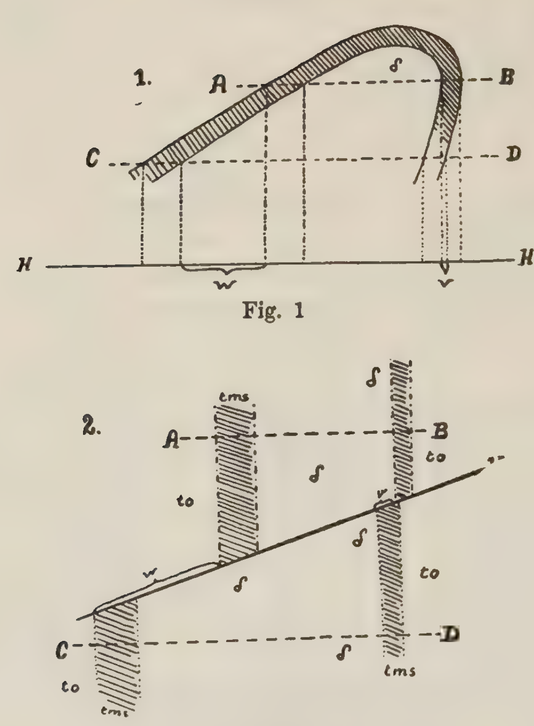


Fig. 1

Fig. 2.

Fig. 1 Querriß, Fig. 2 Grundriß eines Sattels. δ = Diabas, *tms* = Massenkalk, *to* = Oberdevon, *V* = Verwerfung.

An der Verwerfung *V* (Fig. 2) ist der eine Teil eines überkippten Sattels abgesunken. Das Ausmaß des Verwurfes, gemessen am mitteldevonischen Kalkbande, ist am Hangend- (*w*) und Liegendflügel (*v*) verschieden stark. Die Erklärung gibt der kombinierte Querriß (Fig. 1), in welchem der Schnitt des stehengebliebenen Teiles des Sattels mit einer beliebigen Isohypse durch die Linie *CD*, der Schnitt des abgesunkenen Sattelteiles mit der gleichen Isohypse durch die Linie *AB* dargestellt ist. Die Schnitte dieser Linien mit dem Kalkbande *tms* auf die Horizontale *H—H* projiziert, zeigt die Erklärung für das verschiedene Ausmaß des Verwurfes.

a) Der Rösenbecker Diabassattel bildet einen nach N überkippten Sattel. Die Kartierung ergab, daß in den Rösenbecker Diabassattel 3 Gruppen von Verwerfungen eintreten, die das Kartenbild im höchsten Grade komplizieren (das Gleiche gilt auch für die Altenbergmulde):

1. Die S—N gerichteten Verwerfungen bilden das jüngste der Bruchsysteme, da sie alle übrigen Brüche ablenken und verwerfen. Sie erlangen dadurch eine größere Bedeutung, daß an ihnen das Gebirge derartig absinkt, daß bei einem Fortschreiten von O nach W immer jüngere Gebirgsmassen zu Tage treten. Der Enkebergabbruch bildet die Grenze von Devon und Karbon; östlich desselben und nördlich des Hoppeketales treten devonische Schichten nicht mehr zu Tage. In seinem Fortstreichen nach S erlangt er dadurch größere Bedeutung, daß er das mittel- und oberdevonische Faltengebiet von Padberg—Adorf—Giebringhausen von dem westlich gelegenen Lenneschiefergebiete trennt.

Von gleicher Bedeutung ist der Bleiwäscher Abbruch der auf eine große Erstreckung hin den Briloner Massenkalk gegen Karbon begrenzt. Nun ist auffallend, daß die Zechsteingrenze von Giershagen vielfach die gleiche S-N-Richtung zeigt.

2. Die Koulissen-Verwerfungen[1]. Sie streichen h 9 und zerlegen das ganze Gebirge in eine große Zahl von Koulissen. Am Rösenbecker Diabassattel ist eine auffallende Erscheinung, daß das mittel- und oberdevonische Kalkband des Südflügels von den gleichen h 9 streichenden Verwerfungen stärker verworfen ist als das des Nordflügels der gleichen Koulisse. Diese Erscheinung wird dadurch verständlich, daß der Liegendschenkel des überkippten Sattels ein steileres Einfallen besitzt als der Süd- oder Hangendschenkel, wie dies unsere Figuren 1 und 2 zeigen. AB und CD in Figur 2 zeigen zwei verschieden stark gesenkte Koulissen. Die Stärke oder der Grad der Senkung ist im Querriß Figur 1 dargestellt durch die Linien AB und CD. Die Projektion des durch diese Linien geschnittenen Kalkbandes auf die Horizontale erklärt ohne weiteres das verschiedene Ausmaß (v und w) der Verwerfung am S- und N-Flügel. Mit dieser Erklärung stimmt überein, daß der Massenkalk am Südflügel (scheinbar) weit mächtiger ist als am Nordflügel.

3. Streichende- (und Schuppen-) verwerfungen sind am Rösenbecker Diabassattel selbst nicht aufgeschlossen. Gute Auf-

---

1) A. Denkmann: Stratigraphie des Oberdevon etc. Seite 18.

schlüsse für das Studium der streichenden Brüche bietet das Gebiet von Rhenegge, wo sie durch zahlreiche Steinbrüche mit allen ihren Begleiterscheinungen in geradezu klassischer Weise aufgeschlossen sind[1]). Wo sie aufgeschlossen sind, fallen sie steil nach S ein. Am Rösenbecker Diabaszuge sind streichende Verwerfungen am N- und S-Flügel vorhanden. Sie bewirken die große Lückenhaftigkeit des oberdevonischen Schichtensystems.

b) Die Altenbergmulde. In der Altenbergmulde sind Querbrüche keine seltene Erscheinung. Immerhin erscheinen auch hier bemerkenswerte Verhältnisse. Wo der Padberger Kalk aufgeschlossen ist, fällt er steil nach S ein. Die Altenbergmulde ist nach N überkippt. Der Hangendschenkel des südlich zu erwartenden Sattels fehlt. Bei der Kartierung war die Verfolgung des leicht kenntlichen Foßley von Wichtigkeit. Im Profil von Bredelar-Padberg tritt der Foßley in seiner nahezu normalen Mächtigkeit von 70 m zutage, während die Wocklumer Schiefer (scheinbar) 600 m und mehr mächtig erscheinen. Diese bilden anfangs — also in ihrem südlichen Teile — eine flache Mulde, der auf der Höhe des Bellersteines Kieselschiefer eingelagert sind. Dort wo der Bellerstein klippenartig gegen das Bahnwärterhaus (Punkt 298) vorspringt, sind die Wocklumer Schiefer antiklinal gestellt. Erst nördlich des Hoppeketales am Forstenberge folgen wiederum die Kulmschiefer (vergl. Fig. 3a).

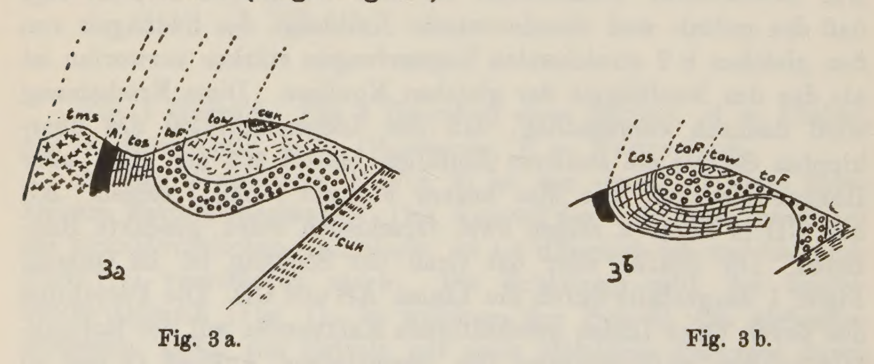


Fig. 3 a. Fig. 3 b.

Schematische Querrisse durch die Altenbergmulde. Der Querriß 3a entspricht etwa dem Bellersteinprofil, in welchem der Foßley als schmales Band, der Wocklumer Horizont in großer Breite zu Tage streicht. Querriß Fig. 3b ist weiter westlich durch die Mulde gelegt. Er zeigt das breite Ausstreichen des Foßley.

1) Eine Mitteilung über dieses interessante Gebiet ist in Vorbereitnng.

Mit dem Fortschreiten nach O ändern sich mit jeder Koulisse diese Verhältnisse derartig, daß die vom Foßley bedeckten Flächen größer, die von den Schiefern des Wocklumer Horizontes bedeckten Flächen kleiner werden. Am Osthang des Altenberges beträgt die Breite des Foßley 500 m, die Breite des Wocklumer Horizontes nur noch 300 m.

Es bedarf wohl keiner weiteren Worte, daß das Anwachsen an Mächtigkeit ein nur scheinbares ist. Diese abnormen Verhältnisse erklären sich folgendermaßen. Die Koulissen sind verschieden stark gesenkt. Insgesamt muß aber der Scheitel der Altenbergmulde sehr hoch liegen, er kann nur (relativ) wenig niedriger liegen als der Scheitel des Rösenbecker Diabassattels. Damit erklärt sich dann auch in durchaus natürlicher Weise die verschiedene Mächtigkeit des Foßley und des Wocklumer Horizontes, wie unsere Figur 3 und 4 zeigt.



Fig. 4.

Die Lage der Altenbergmulde, deren Scheitel mit × bezeichnet ist, zu dem Rösenbecker-Diabassattel (××).

Die gesamte Altenbergmulde ist durch eine streichende Verwerfung, die wegen der hohen Heraushebung der Altenbergmulde zu einer Ueberschiebung wird, von dem Rösenbecker Diabassattel getrennt. Nun wird diese Ueberschiebung gleichzeitig die Grenze zweier verschiedener Oberdevonfazies: Der kalkigen Oberdevonfazies des Rösenbecker Diabassattels und der vorwiegend schiefrigen Oberdevonfazies der Altenbergmulde. Die große Nähe der beiden verschiedenen Fazies — am Grottenberge beträgt die Annäherung der beiden Fazies nur 200 m! — wird dadurch verständlich!

c) Ueber das tektonische Verhältnis des Briloner Massenkalkplateaus zum Rösenbecker Diabassattel bin ich zur Zeit noch nicht in der Lage einwandfreie Angaben zu machen. Das Gleiche gilt von dem Nehdener Devongebiet. Immerhin scheint mir die oben erwähnte obere Massenkalkkante durch eine Ueberschiebung von dem Schuppengebiet des Immentales getrennt zu sein.

Göttingen, Geologisches Institut, den 15. Okt. 1911.
